DEVOIR 18 : SÉRIES ENTIÈRES

PSI 1 2025-2026 **mardi 27 janvier 2026**

QCM

1 *Convergence des séries entières : soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle positive décroissante et la série entière* $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n x^n$ *de rayon de convergence* $R=1$. *On pose* $u_n : x\mapsto (-1)^n a_n x^n$

1.1 $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ CVN sur $]-1;1[$

1.2 $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ CVU sur $]-1;1[$

1.3 $a_n = 2^{-n} \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n$ CVN sur $[-1;1]$

1.4 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n$ CVU sur $[0;1]$

2 *Fonctions DSE : soit* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^∞ *(CV pour converge)*

2.1 f paire $\Longrightarrow \left(\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(2n+1)}(0)=0\right)$

2.2 $\left(\forall x\in\mathbb{R}, \sum_{n\geqslant 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \text{ CV}\right) \Longrightarrow f$ DSE sur $\mathbb{R}$

2.3 f DSE sur $]-1;1[\Longrightarrow f\times \mathrm{Arcsin}$ DSE sur $]-1;1[$

2.4 f DSE sur $\mathbb{R} \Longrightarrow f\times\mathrm{Arctan}$ DSE sur $\mathbb{R}$

3 *DSE classiques : vrai ou faux avec* $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ *?*

3.1 $\forall x\in]-1;1[,\ \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$

3.2 $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{Arctan}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

3.3 $\forall x\in]-1;1[,\ (1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

3.4 $\forall x\in[-1;1],\ \sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

4 *DSE classiques : vrai ou faux*

4.1 $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{ch}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

4.2 $\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$

4.3 $\forall x\in]-1;1[,\ \ln(1-x)=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n$

4.4 $\forall x\in]-1;1[,\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

Énoncé Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont 0 est un point intérieur, $f\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et $r>0$ tel que $]-r;r[\subset I$, donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit développable en série entière sur l'intervalle $]-r;r[$.

Preuve Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$.

Montrer que la fonction somme $S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R;R[$.

Exercice 1 Soit la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{(n^2+n-1)x^n}{n!}$ et f la fonction somme (là où elle existe). Déterminer le rayon de convergence R de la série. Pour $x\in]-R;R[$, exprimer $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 2 Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\geqslant 1} 2nx^{3n+1}$.

DEVOIR 18 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 18	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1			X	X	
2	X		X		
3			X	X	
4	X			X	

1.1 et **1.2** Faux : pour $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n x^n$ par exemple car $R_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$ donc R_n n'est même pas bornée sur $]-1;1[$ **1.3** Vrai : car $||u_n||_{\infty,[-1;1]} = 2^{-n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} 2^{-n}$ CV **1.4** Vrai : on a convergence de la série entière sur $[-1;1]$ par le CSSA qui nous assure aussi $R_n||_{\infty,[-1;1]} \leqslant a_{n+1} \to 0$.
2.1 Vrai : $f^{(2k)}$ est paire et $f^{(2k+1)}$ est impaire pour tout k **2.2** Faux : $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ **2.3** Vrai : par produit de CAUCHY **2.4** Faux : Arctan n'est DSE que sur $]-1;1[$ ($f = 1$ par exemple).
3.1 Faux : c'est $(-1)^{n+1}$ **3.2** Faux : c'est pour $x \in [-1;1]$ **3.3** Vrai : cours **3.4** Vrai : cours.
4.1 Vrai : cours **4.2** Faux : le rayon vaut 1 et pas $+\infty$ **4.3** Faux : $n = 0$ n'y est pas **4.4** Vrai : en écrivant la relation $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \dfrac{1}{2}\Big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\Big)$.

Énoncé Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont 0 est un point intérieur, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $r > 0$, alors :

$$\Big(f \text{ est DSE sur }]-r;r[\Big) \iff \Big(f \in C^\infty\big(]-r;r[, \mathbb{R}\big) \text{ et } \forall x \in]-r;r[,\ \lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt = 0\Big).$$

Preuve Soit $r \in]0;R[$, en notant $u_n : x \mapsto a_n x^n$, on a $||u_n||_{\infty,[-r;r]} = |a_n|r^n$ et on sait que, puisque $r < R$, on a convergence absolue de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n r^n$ donc la convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ sur $[-r;r]$. Comme toutes les fonctions u_n sont continues sur $[-r;r]$, S est continue sur $[-r;r]$ et donc sur $]-R;R[$.

Exercice 1 Pour $r > 0$, $\left((-1)^n\dfrac{(n^2+n-1)r^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 quel que soit r par croissances comparées car $\dfrac{(n^2+n-1)r^n}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{r^n}{(n-2)!}$ donc $R = +\infty$. Si $x \in \mathbb{R}$, $n^2+n-1 = n(n-1)+2n-1$ donc on a $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(n^2+n-1)x^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(n(n-1)+2n-1)x^n}{n!}$ ce qui s'écrit aussi, en décomposant la somme, $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{n(n-1)x^n}{n!} + 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{nx^n}{n!} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n!}$ (tout converge).
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-2}\dfrac{x^{n-2}}{(n-2)!} - 2x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n!} = (x^2-2x-1)e^{-x}$.

Exercice 2 Pour $x \in \mathbb{R}$, par croissances comparées, la suite $(2nx^{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| < 1$. Ainsi le rayon R de cette série entière est $R = 1$. Or, $\forall x \in]-1;1[,\ f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$. On peut dériver terme à terme et $\forall x \in]-1;1[,\ f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ donc $2xf'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2nx^n$. Ainsi, on peut conclure que $\forall x \in]-1;1[,\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2nx^{3n+1} = x(2x^3f'(x^3)) = \dfrac{2x^4}{(1-x^3)^2}$.