

ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 10

SÉRIES ENTIÈRES

10.1 Rayon et expression

10.1 *Mines MP* Rayon de convergence et somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{3n+2}$.

10.2 Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

- Déterminer l'intervalle de convergence de f .
- Exprimer la fonction f à l'aide des fonctions usuelles sur $] -1; 1[$.
- Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

10.3 Soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$.

Déterminer le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et déterminer la somme de la série.

10.4 Soit $0 < a < b$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = a^n$ et $a_{2n+1} = b^n$.

Déterminer le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et déterminer la somme de la série.

10.5 Déterminer le rayon et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{n+3}{2n+1} x^n$.

10.6 *Centrale PSI 2012* Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n^3}{2^n + 3^n} x^{2n+1}$.

10.7 *Centrale PSI 2012*

Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = n + 1 - \frac{1}{n!}$. On va ici étudier la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

- Déterminer son rayon R et faire l'étude de la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence.
- Donner une expression simple de $f(x)$ (la fonction somme de cette série entière) pour $x \in] -R; R[$.
- En déduire des équivalents de $f(x)$ quand $x \mapsto -R^+$ et quand $x \mapsto R^-$.

10.8 *Centrale PSI 2012* Déterminer le rayon de convergence R et calculer la somme des séries entières suivantes

pour $x \in] -R; R[$: $\sum_{n \geq 0} n^2 (-1)^n x^{2n+1}$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n^2 - 1}$.

10.9 *Centrale PSI 2012* On pose, pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ et lorsque la série converge : $f_p(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^n$.

- Déterminer le domaine de définition de f_p et donner des expressions simples de f_0 et f_1 .
- Montrer que les f_p sont dérivables sur leur domaine de définition et établir une relation entre f'_p et f_{p+1} .
- Donner un équivalent de $f_p(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.
- Que dire de $f_p(x)$ quand x tend vers -1 par valeurs supérieures ?

10.10 Pour x réel, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f .
- Étudier la convergence de la série entière en R et en $-R$.
- Établir la continuité de f en $-R$.
- Déterminer la limite de f en R .

10.11 *Compléments OdIT 2016/2017 Mines-Télécom PSI planche 554I*

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{3^{n-1}(2n+1)}$.

10.2 Théorie

10.12 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels tous non nuls.

Quelle relation lie les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{a_n} z^n$.

10.13 Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2 z^n$.

10.14 Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

On pose $b_n = \frac{a_n}{1 + |a_n|}$ et on note R' le rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n$.

a. Montrer que $R' \geq \max(1, R)$.

b. Établir que si $R' > 1$ alors $R' = R$.

c. Exprimer alors R' en fonction de R .

10.15 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et on suppose $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{S_n} = 0$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} S_n x^n$ puis former une relation entre leur somme.

10.16 Classique mais hors programme ! Soit une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon R tel que $0 < R < +\infty$ et qui

vérifie $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ converge, alors $\lim_{t \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

10.3 Relations avec l'intégrale

10.17 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R et à sa somme notée f .

a. Déterminer le rayon R et faire l'étude de la convergence de $f(x)$ aux bornes de l'intervalle de convergence.

b. Montrer que : $\forall x \in]-R; R[, f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{(1-xt)(1+t^2)}$.

c. Pour $x \in]-R; 0[\cup]0; R[$, trouver a, b et c tels que : $\forall t \in [0; 1], \frac{1}{(1-xt)(1+t^2)} = \frac{a}{1-xt} + \frac{bt}{1+t^2} + \frac{c}{1+t^2}$.

En déduire une expression compacte de $f(x)$. Que vaut donc $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$?

d. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $a_{n+2} + a_n$.

En déduire une expression de a_{2n} sous forme de somme ; puis $\frac{\pi}{4}$ comme somme de série.

10.18 *Centrale PSI 2012* Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

a. Déterminer la nature des séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$.

b. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$?

c. Pour $x \in]-R; R[$, exprimer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sous forme d'une seule intégrale.

En déduire une expression compacte de $f(x)$ si $x \in]-R; 0[$.

d. Montrer que la convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vers f est uniforme sur $[-R; 0]$. En déduire $f(-R)$.

10.19 Développer en série entière la fonction $x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.

10.20 Développer en série entière la fonction $x \mapsto \int_0^x \ln\left(t^2 - \frac{5}{2}t + 1\right) \frac{dt}{t}$.

10.21 Calculer $\int_0^1 \ln(t) \ln(1-t) dt$.

10.22 Montrer que $\int_0^1 \frac{\text{Arctan } x}{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ (nombre de CATALAN).

10.23 *Mines PSI 2008 d'après RMS* Soit $f : t \in]-1; 1[\mapsto \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$.

Montrer que f est intégrable sur $] -1; 1[$ et calculer $\int_{-1}^1 f(t) dt$.

10.4 Équation différentielle

10.24 Soit f définie sur $] -1; 1[$ par $f(x) = \frac{\text{Arcsin } x}{\sqrt{1-x^2}}$

a. Justifier que f est développable en série entière sur $] -1; 1[$.

b. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.

c. Déterminer le développement en série entière de f sur $] -1; 1[$.

10.25 On considère l'équation différentielle suivante : (E) : $4xy'' + 2y' - y = 0$.

a. Rechercher une solution φ de (E) développable en série entière. Préciser son rayon de convergence R . Exprimer φ avec les fonctions usuelles.

b. Résoudre l'équation (E) sur les intervalles $I =]-\infty; 0[$, puis sur $J =]0; +\infty[$.

c. Déduire des questions **a.** et **b.** l'ensemble des solutions de (E) sur \mathbb{R} .

10.26 On considère l'équation différentielle suivante : (E) : $xy'' + 2y' - xy = 0$.

a. Rechercher une solution φ de (E) développable en série entière. Préciser son rayon de convergence R . Exprimer φ avec les fonctions usuelles.

b. Résoudre l'équation (E) sur les intervalles $I =]-\infty; 0[$, puis sur $J =]0; +\infty[$.

c. Déduire des questions **a.** et **b.** l'ensemble des solutions de (E) sur \mathbb{R} .

10.5 Produit de Cauchy et dénombrement

10.27 Nombres d'EULER et de BERNOULLI

Soit n un entier, le nombre de permutations up-down σ de $\llbracket 1; n \rrbracket$, c'est-à-dire les permutations σ telles que $\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \dots < \sigma(n)$ est noté a_n si n est pair (nombre d'EULER appelés aussi "secant numbers" ou zig numbers) et b_n si n est impair (nombre de BERNOULLI aussi appelés "tangent numbers" ou zag numbers). On pose $a_n = 0$ si n est impair et $b_n = 0$ si n est pair et on prend $a_0 = 1$ par convention.

a. Déterminer les valeurs de b_1, a_2, b_3, a_4 et b_5 .

On considère $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n!} x^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{b_n}{n!} x^n$ et les fonctions somme a et b respectives (là où les séries convergent).

b. Que peut-on dire des rayons de convergence respectifs R_a et R_b des deux séries entières précédentes ?

c. Montrer que si n est pair : $b_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k b_{n-k}$. Trouver une relation donnant a_{n+1} si n est impair.

d. En déduire une équation différentielle vérifiée par la fonction b sur $] -R_b; R_b[$. Que vaut donc b ?

e. Pour $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, écrire la formule de TAYLOR reste intégral appliquée à la fonction tangente entre 0 et x .

f. En déduire la valeur exacte de R_b .

g. Trouver une relation simple entre a et b pour en déduire a . Justifier que les dérivées successives de a sont positives sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, en déduire le rayon R_a .

10.28 Centrale PSI 2011 d'après RMS

Une involution d'un ensemble X est une application de X dans lui-même telle que $f \circ f = \text{id}_X$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n le nombre d'involutions de $\llbracket 1; n \rrbracket$: $I_1 = 1$, $I_2 = 2$ (l'identité et une transposition) et $I_3 = 4$ (l'identité et trois transpositions) par exemple. On convient que $I_0 = 1$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

Que peut-on en déduire sur le rayon R de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{I_n}{n!} z^n$. On note S sa somme.

b. Établir que $\forall x \in]-R; R[$, $S'(x) = (1+x)S(x)$ et en déduire une expression simple de $S(x)$.

c. Déterminer enfin une expression de I_n sous forme de somme.

10.29 Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-1; 1[$, $\sum_{k=m}^{+\infty} \binom{k}{m} x^{k-m} = \frac{1}{(1-x)^{m+1}}$.

10.30 On note $N(n, p)$ le nombre de permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui ont exactement p points fixes.

On pose en particulier $D(n) = N(n, 0)$, puis $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D(n)}{n!} x^n$.

a. Relier $N(n, p)$ et $D(n-p)$.

b. Justifier la définition de f sur $] -1; 1[$ puis calculer f . En déduire $N(n, p)$.

c. Étudier la limite de la suite $\left(\frac{1}{n!} N(n, p) \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

10.31 Centrale PSI 2012 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre de façons d'écrire n comme somme de 2 carrés

(d'entiers naturels), ou encore $a_n = \text{card} \left(\left\{ (p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p^2 + q^2 = n \right\} \right)$. On définit b_n qui vaut 1 si n est un carré (d'entier) et 0 sinon. Ainsi $a_3 = 0$, $a_{25} = 4$ car $25 = 5^2 + 0^2 = 4^2 + 3^2 = 3^2 + 4^2 = 0^2 + 5^2$; $b_2 = 0$

et $b_9 = 1$. On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et on considère les 2 séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$

de rayons de convergence respectifs R et R' et de fonctions somme respectives f et g .

a. Déterminer R' et majorer R . Trouver une relation entre $f(x)$ et $g(x)$ pour x assez petit. En déduire R .

b. Justifier que, pour $x \in]0; 1[$, la fonction $h_x : t \rightarrow x^{t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

c. En déduire un équivalent de $g(x)$ quand x tend vers R^- . Puis un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow R^-$.

10.32 Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, C_n le nombre de parenthésages distincts d'un mot à n éléments : C_n est le n -ième nombre de CATALAN. Par exemple : $((**)((**))*$ est un des parenthésages corrects compté dans C_5 , il s'agit des parenthésages donnant un sens à un "produit" de n termes avec une loi non associative.

Par exemple, 2 puissance 3 puissance 2 n'a pas de sens mais $2^{(3^2)} = 2^9 = 512 \neq 64 = 8^2 = (2^3)^2$.

Pour trois éléments, il n'y a que les parenthésages $((**))*$ et $(**)((**))*$ donc $C_3 = 2$. Pour quatre éléments, $((**)((**))*$, $((**)((**))*$, $((**)((**))*$, $((**)((**))*$ et $((**)((**))*$ sont les seuls parenthésages possibles donc $C_4 = 5$.

a. Soit $n \geq 2$, montrer que $C_n = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$ avec C_0 et C_1 à définir.

b. Si $\sum_{n \geq 0} C_n x^n$ admet un rayon de convergence $R > 0$, trouver une relation, pour $x \in]-R; R[$, entre $C(x)^2$ et $C(x)$. En déduire alors une expression de $C(x)$ pour x assez petit en valeur absolue.

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de C_n à l'aide d'un coefficient binomial.

10.6 Développement en série entière

10.33 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f :]-\alpha, \alpha[\rightarrow \mathbb{R}$ paire ou impaire de classe C^∞ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0; \alpha[, f^{(n)}(x) \geq 0$.

a. Dans la formule de TAYLOR avec reste intégral, pour $x \in]0; \alpha[$ et $n \in \mathbb{N}$, rappeler les valeurs des coefficients a_k et du reste $R_n(x)$ dans : $f(x) = \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) + R_n(x)$.

b. Établir que si $0 \leq x < y < \alpha$, on a $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$.

c. Montrer alors que f est développable en série entière sur $]-\alpha; \alpha[$.

10.34 Former le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \text{sh}(\text{Arcsin } x)$.

10.35 *Centrale PSI 2013*

a. Rappeler le développement en série entière de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^{-\frac{1}{2}}$ sur $] -1; 1[$ sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en trouvant une expression de a_n qui utilise des factorielles.

b. Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$ et donner une expression simple de sa somme pour $x \in]-R; R[$. Quelle est la nature de cette série quand $x = \pm R$?

10.36 *CCP PSI 2013* Gérémy Soit $\varphi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n^2 - 1}$.

a. Trouver le domaine de définition D de φ .

b. Expliciter $\varphi(x)$ pour tout $x \in D$.

10.37 *Centrale PSI 2013* Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{2u_n - 1}{n+1}$.

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq 2$. Trouver trois réels a, b, c tels que $u_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

b. Déterminer le rayon R de $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$. Montrer que sa somme $S :]-R; R[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifie (E) : $y' = 2y + \frac{x}{(1-x)^2}$.

c. Donner un développement asymptotique à deux termes de $S(x)$ quand x tend vers 1^- .

10.38 *Centrale PSI 2012* Soit α et λ deux réels avec $\lambda \in]-1; 1[$, on note E l'ensemble des fonctions de classe C^1

sur \mathbb{R} telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \alpha f(x) + f(\lambda x)$.

- Montrer que $E \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Déterminer un élément développable en série entière de E (autre que la fonction nulle).
- Soit $f \in E$ tel que $f(0) = 0$. Montrer que $f = 0$.
- Déterminer entièrement E .

10.39 *Centrale PSI 2012* On pose, lorsque ceci a un sens : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x+n}$.

- Établir que f est de classe C^∞ sur $] -1; +\infty[$ en donnant ses dérivées sous forme de série de fonctions.
- Prouver que f est développable en série entière et donner son développement.
- Déterminer des équivalents de $f(x)$ quand $x \mapsto -1^+$ et quand $x \mapsto +\infty$.

10.40 Domaine de définition et étude aux bornes de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)x^n$.

10.41 Montrer $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

10.7 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

10.42 *Centrale PSI 2014* Servane

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{P(n)}{n!} z^n$?
- Dorénavant, $P \in \mathbb{Z}[X]$, exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!}$ sous la forme $N \times e$ avec $N \in \mathbb{Z}$.

10.43 *Centrale Maths1 PSI 2015* Mathieu Gaultier

Soit $R > 0$ le rayon de la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. On suppose que $\sum_{n \geq 0} |a_n| R^n$ converge. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- Montrer que f est continue en R .
- On pose $f(x) = \frac{1}{x} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$. Montrer que $\int_0^1 f(t) dt$ existe et l'exprimer sous la forme d'une série.
- Calculer $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ (on admet que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$).

10.44 *Centrale Maths1 PSI 2015* Clément Suberchicot

On pose $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$.

- Rayon de convergence de cette série entière.
- Sachant que $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.
- On pose $g(x) = e^{-x} f(x)$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

10.45 *Mines PSI 2015* Jean-Raphaël Biehler

Soit la série suivante $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4n+1}$. Montrer qu'elle converge et la calculer.

10.46 *Mines PSI 2015* Bastien Chevallier

- a. Résoudre (E) : $\ln(x)y' + \frac{y}{x} = 1$ sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
- b. On définit g par $\forall x \in]-1; +\infty[\setminus \{0\}$, $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.
- Montrer que g est de classe C^∞ sur $] -1; +\infty[$.
- c. Dédire que (E) possède une solution de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$.

10.47 *Petites Mines PSI 2015* Marie Trarieux

- On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{(2n+1)!} x^n$.
- a. Déterminer son rayon de convergence.
- b. Rappeler le développement en série entière de $\operatorname{sh}(y)$ et $\sin(y)$.
- c. Calculer $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$.
- d. Déterminer la somme de la série de départ.

10.48 *Centrale Maths1 PSI 2016* Charly Castes

- On note, pour $n \geq 1$ et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, l'entier $A_{n,p}$ égal au nombre de permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui possèdent exactement p points invariants.
- a. Trouver une relation entre $A_{n,p}$ et $A_{n-p,0}$.
- b. Montrer que le rayon de $\sum_{n \geq 0} \frac{A_{n,0} x^n}{n!}$ est supérieur ou égal à 1.
- c. Calculer $\sum_{p=0}^n A_{n,p}$ et en déduire la valeur de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_{n,0} x^n}{n!}$.
- d. En déduire une expression de $A_{n,p}$ pour tout $p \leq n$.

10.49 *Centrale Maths1 PSI 2016* Hugo Saint-Vignes

- Soit la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ définie par $a_0 = 1$ et $a_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1} (t-k) dt$ si $n \geq 1$.
- On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
- a. Montrer que son rayon de convergence R vérifie $R \geq 1$.
- b. Soit $x \in]-1; 1[$, calculer $S(x)$.
- c. Montrer que $R = 1$.

10.50 *Centrale Maths1 PSI 2016* Théo Taupiac

- Pour $\alpha \in]-1; 1[$, on pose $I(\alpha) = \int_0^\pi \frac{\ln(1 + \alpha \cos(x))}{\cos(x)} dx$.
- a. Montrer que I est de classe C^1 sur $] -1; 1[$ et calculer $I'(\alpha)$.
- Indication : on donne $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ si $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
- b. En déduire une expression simple $I(\alpha)$ pour $\alpha \in]-1; 1[$.
- c. Montrer que I est développable en série entière avec un rayon égal à 1.

10.51 *Mines PSI 2016* Antoine Badet II

- Soit $p \in \mathbb{N}$ et $f_p : x \mapsto \frac{1}{(1-x)^p}$.
- a. Donner le développement en série entière de f_p au voisinage de 0.
- b. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k}$.

10.52 *Mines PSI 2016* Owain Biddulph I

Nature et somme de $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{4n}}{4n+1}$.

10.53 *Mines PSI 2016* Adrien Boudy I

On appelle involution d'un ensemble E toute application $f : E \rightarrow E$ telle que $f \circ f = \text{id}_E$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'ensemble des involutions de l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$ et $I_n = \text{card}(A_n)$ avec la convention $I_0 = 1$.

- a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.
- b. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ vérifie $R \geq 1$.

On définit $\varphi :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$.

- c. Montrer que $\forall x \in]-1; 1[, \varphi'(x) = (1+x)\varphi(x)$.
- d. En déduire une expression simple de $\varphi(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
- e. En déduire une expression de I_n sous forme de somme.

10.54 *Mines PSI 2016* Samy Essabar II

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, le réel $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x) dx$.

- a. Donner la nature de $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$.
- b. Déterminer une relation entre u_{n+2} et u_n . En déduire le rayon R de convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n z^n$.
- c. Déterminer le rayon R' de convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n z^{n^2}$.
- d. Calculer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ pour $x \in]1; 1[$.
- e. Trouver une valeur exacte de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$.

10.55 *E3A PSI 2016* Antoine Badet II

On pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

- a. Rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} W_n x^n$?
- b. Cas $x = R$? Cas $x = -R$?
- c. Calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n$ pour $x \in]-R; R[$.

10.56 *Centrale Maths1 PSI 2017* Bastien Lamagnère

Soit $\theta \in]0; \pi[$.

- a. Montrer que la suite $(\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.
- b. Quel est le rayon R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \sin(n\theta) z^n$.
- c. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = R$. Y a-t-il convergence de $\sum_{n \geq 0} \sin(n\theta) z^n$?
- d. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta) z^n$.

10.57 Centrale Maths1 PSI 2017 Antoine Romero-Romero

On considère la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \geq 1, a_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{k!}$.

- Montrer que le rayon R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ vérifie $R \geq 1$. On note S la somme de cette série.
- Montrer que si $|z| < R$, on a $S(z) = \frac{2}{e^z + 1}$.
- Montrer que $\forall x \in \left] -\frac{R}{2}; \frac{R}{2} \right[$, $i \tan(x) = 1 - S(2ix)$.
- Montrer que $R = \pi$.

10.58 Mines PSI 2017 Vincent Bouget II

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

10.59 Mines PSI 2017 Joseph Dumoulin II

Soit $a_n = \ln \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right)$ pour $n \geq 2$.

- Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 2} a_n x^n$. On note S sa somme.
- Déterminer l'intervalle de convergence de S .

10.60 Mines PSI 2016 et 2017 Émilien Ouzeri II et Elliott Jean-François I

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$.

- Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
- Exprimer $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

10.61 Mines PSI 2017 Vincent Meslier III

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}$. Donner \mathcal{D}_f et exprimer $f(x)$ avec des fonctions usuelles.

10.62 Mines PSI 2017 Antoine Romero-Romero II

On considère la série entière suivante : $\sum_{n \geq 1} \ln(n) x^n$. On note S sa somme.

- Calculer le rayon de convergence R de cette série entière.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow R^-} S(x)$.
- Trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers R^- .

10.63 ENS Cachan PSI 2015 et Mines PSI 2017 Jean-Baptiste Biehler et Roland Tournade II

On pose $A_0(0) = 1$ par convention et, pour $n > 0$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on note $A_n(k)$ le nombre des permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ laissant exactement k éléments invariants.

a. Montrer que $A_n(k) = \binom{n}{k} A_{n-k}(0)$, et que $n! = \sum_{k=0}^n A_n(k)$.

b. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n(0)}{n!} z^n$, montrer que $f(z)$ existe si $|z| < 1$.

c. Montrer que $e^z f(z) = \frac{1}{1-z}$, en déduire le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{A_n(0)}{n!} z^n$ et la valeur de $A_n(0)$.

d. On a un sac de n boules numérotées de 1 à n . On tire les boules une par une, et on les range dans l'ordre de tirage dans une boîte compartimentée dont les compartiments sont numérotés de 1 à n (la première boule dans le compartiment 1, la deuxième dans le compartiment 2, etc...). On note p_n la probabilité qu'aucune boule ne se trouve dans le compartiment portant son numéro. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

10.64 CCP PSI 2017 Manon Bové I et Alexis Trubert I

On pose $g(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t} dt$.

- a. Montrer que $] -1; 1[$ est inclus dans le domaine de définition de g .
- b. Trouver un développement en série entière de $g(x)$ sur $] -1; 1[$.
- c. Montrer que g est de classe C^1 sur $]0; 1[$ et calculer $g'(x)$.
- d. Montrer que g est de classe C^1 sur $]0; 1[$ et calculer $g'(x)$ par une méthode différente.

10.65 CCP PSI 2017 Alexandre Chamley II et Elliott Jean-François II

- a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! x_n \in \mathbb{R}_+, e^{-x_n} + x_n = n$.
- b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \in [n-1; n]$.
- c. On pose $a_n = n - x_n$. Étudier la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$. On notera R son rayon.

10.66 E3A PSI 2017 Claire Raulin

On s'intéresse à la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{4n+1}$ et on note S sa somme.

- a. Déterminer son rayon de convergence R et son intervalle de convergence.
- b. Montrer que $S(-1) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} = I$.
- c. Décomposer le polynôme $1 + X^4$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis la fraction rationnelle $\frac{1}{1+X^4}$ dans $\mathbb{R}(X)$.
- d. En déduire la valeur exacte de $S(-1)$.

10.67 ENS Ulm/Cachan PSI 2018 Gauthier Crosio et Nicolas Ziegler I

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2}$.

L'objectif est de calculer $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{2^k}$. Pour cela, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- a. Montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.
- b. Montrer que L existe et est finie.
- c. Montrer que $\forall x \in]-1; 1[, f'(x) = f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ dont on précisera coefficients et rayon.
- d. Déterminer $\ln(f(x))$ pour $x \in]0; 1[$. En déduire la valeur de L .

10.68 Centrale Maths1 PSI 2018 Oihana Piquet

Soit une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_{2n} + x_{2n+1}$.

- a. Montrer que $\sum_{n \geq 0} x_n$ et $\sum_{n \geq 0} y_n$ sont de même nature.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $a_n = \frac{1}{2n(2n+1)}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

- b. Déterminer le domaine de définition D de f .
- c. Calculer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^* \cap D$.
- d. En déduire que $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

10.69 *Centrale Maths1 PSI 2018* Antoine Secher

Soit $a > 0$, $J =]-a; a[$ et $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction (im)paire de classe C^∞ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $h^{(n)}$ est positive sur $[0; a[$. On pose, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in J$, le reste $R_N(x) = h(x) - \sum_{n=0}^N \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

- Écrire $R_N(x)$ à l'aide d'une intégrale.
- En déduire que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $0 < x < y < a \implies 0 \leq R_N(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{N+1} R_N(y)$.
- Conclure que h est sur J égale à la somme de sa série de TAYLOR en 0.
- Que peut-on dire de \tan sur $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$?

Question de cours : quels sont les différents modes de convergence d'une série entière ?

10.70 *Mines PSI 2018* Jean Boudou I

Soit $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{\text{Arctan}(x)}{x}$.

- La fonction h est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
- Montrer que h est développable en série entière (on notera R le rayon de ce développement).
- Montrer que la décomposition de h en série entière est valable sur $[-R; R]$.

On pose, pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x h(t) dt$.

- f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
- La fonction f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R} ?
- f est-elle développable en série entière sur $[-R; R]$?

10.71 *Mines PSI 2018* Julien Langlais II

Soit $a \in]-1; 1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sin(a^n x)$.

En cas de convergence, on pose $F_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Montrer que F_a est définie et développable en série entière au voisinage de 0 et donner le rayon de convergence.

Indication : on pourra montrer d'abord que F_a est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

10.72 *CCP PSI 2018* Gauthier Crosio I

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série complexe absolument convergente.

- Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n x^n}{n!}$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$.
- Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

10.73 *CCP PSI 2018* Lucie Jandet I

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} n^{(-1)^n} x^n$.

10.74 *CCP PSI 2018* Raphaël Pobeda I

Soit $\theta \in]0; \pi[$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1 + 2x \cos(\theta) + x^2}$.

- Déterminer les deux racines z_1 et z_2 de $X^2 + 2 \cos(\theta)X + 1$.
- Trouver deux complexes a et b (dépendant de θ) tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{a}{x - z_1} + \frac{b}{x - z_2}$.
- En déduire que f est DSE. Vous déterminerez le rayon de cette série et l'expression de ses coefficients.

10.75 CCP PSI 2018 Titouan Sancier II

Montrer que $\sum_{n \geq 0} \frac{2n^2 + 3n + 1}{2^{n+1}}$ converge et calculer sa somme.

10.76 E3A PSI 2018 Martin Monsel

On pose, sous réserve de convergence, $F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt$.

- a. Justifier que F est bien définie sur \mathbb{R}^* . Que dire de sa parité ?
- b. Montrer que F admet une limite finie en 0 à l'aide d'un développement limité. Montrer que F ainsi prolongée est dérivable en 0.
- c. Déterminer les limites de F en $\pm\infty$.
- d. Donner le développement en série entière de F . Quel est le rayon de convergence de cette série ?

10.77 ENS Cachan PSI 2019 (OdT 2019/2020 X-ENS PSI planche 36II) Victor Margueritte II

Soit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n = 0$.

On définit, pour $x \in]-1; 1[$, le réel $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on suppose que f admet une limite finie en 1.

- a. Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, 1 - \frac{i}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i$.
- b. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\sum_{i=0}^n a_i \right) - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right) = 0$.
- c. En déduire l'existence et la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

10.78 Centrale Maths1 PSI 2019 Maël Classeau

On définit $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.

- a. Déterminer l'ensemble de définition D de F .
 - b. Montrer que F est de classe C^∞ sur D .
 - c. Montrer que F est développable en série entière et donner le rayon de convergence de ce développement.
- Question de cours : critère de D'ALEMBERT pour les séries numériques.

10.79 Mines PSI 2019 Thomas Crété I

- a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} n^{(-1)^n} x^n$.
- b. Pour $x \in]-R; R[$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$.

10.80 Mines PSI 2019 Pierre Fabre I

Soit $\lambda \in]-1; 1[$ et l'équation (E) : $f'(x) = f(x) + f(\lambda x)$.

- a. Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de (E) sur \mathbb{R} , alors f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . Justifier aussi qu'elle est développable en série entière avec un rayon $R = +\infty$.
- b. Résoudre entièrement (E).

10.81 Mines PSI 2019 Florian Guyomard II

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \operatorname{sh}(xt) e^{-t^2} dt$.

- Justifier l'existence de F .
- Montrer que F est développable en série entière sur \mathbb{R} et expliciter son développement.

10.82 CCP PSI 2019 Benoît Le Morvan II

Soit les trois suites réelles $(u_n)_{n \geq 1}$, $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 1}$ définies par les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}, v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n \text{ et } w_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}.$$

- Justifier que $(u_n)_{n \geq 1}$ est bien définie et qu'elle tend vers 0.
- Justifier que $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge.
- Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} w_n$?
- Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} w_n x^n$?

10.83 X PSI 2020 Matthieu Darius I

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite composée de 1 et de -1 . On définit la fonction f par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

- Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$.
- On suppose que $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leq 1$. Que peut-on dire de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$?

10.84 X PSI 2021 Julien Gombert II

Soit $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n \geq 0} |u_n| \text{ converge et } \forall k \geq 1, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n 2^{-kn} = 0\}$.

Chercher les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E .

10.85 Mines PSI 2021 Clotilde Cantini II

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{3n+1}$.

10.86 Mines PSI 2021 Robin De Truchis II

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1} + 1$. Pour $n \geq 1$, on pose $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{k!}{n!}$.

- Supposons que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge pour un réel a , montrer alors que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge pour tout valeur de a vers une limite à déterminer.
- Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge pour $a = 1$.
- Montrer que $(s_n)_{n \geq 1}$ converge.
- Déterminer le rayon et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 1} s_n x^n$.

10.87 Mines PSI 2021 Alexandre Marque I

On appelle involution d'un ensemble E toute application $f : E \rightarrow E$ telle que $f \circ f = \text{id}_E$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'ensemble des involutions de l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$ et $I_n = \text{card}(A_n)$ avec la convention $I_0 = 1$.

- a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.
- b. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ vérifie $R \geq 1$.

On définit $\varphi :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$.

- c. Montrer que $\forall x \in]-1; 1[, \varphi'(x) = (1+x)\varphi(x)$.
- d. En déduire une expression simple de $\varphi(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
- e. En déduire une expression de I_n sous forme de somme.

10.88 Mines PSI 2021 Raffi Sarkissian II

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t}$.

- a. Trouver $\alpha > 0$ maximal tel que f soit définie sur $] -\alpha; \alpha[$.
- b. Montrer que f est développable en série entière et en déduire une expression simplifiée de f .

10.89 Mines PSI 2021 Antonio Treilhou II

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 + x}}$.

- a. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.
- b. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx$.
- c. Donner le développement en série entière de $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+u^4}}$.
- d. Majorer le reste de la série entière de la question précédente.
- e. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (4n+1)}$.

10.90 CCINP PSI 2021 Clément Lérou I

Soit $F : x \mapsto - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ et $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. On rappelle que $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- a. Déterminer le domaine de définition D de F .
- b. Montrer que $\forall x \in [-1; 1], F(x) = S(x)$.
- c. Montrer que $\forall x \in]0; 1[, F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x) \ln(1-x)$.

10.91 X PSI 2022 Olivier Courmont III

Justifier la convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{2n^2 + 5n + 3}{2^n}$ et calculer sa somme.

10.92 Centrale Maths1 PSI 2022 Marius Desvalois et Thibault Sourdeval

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On note R le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a. Montrer que le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ vaut $+\infty$.

b. Trouver une suite réelle bornée $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

- $R = 2$ et $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge.
- $R = 1$ et $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge.
- $R = 1$ et $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge.

c. Montrer que $R \geq 1$.

d. Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ et calculer sa valeur.

e. Pour $t > 1$, montrer l'existence de $g(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(x) dx$ et trouver une relation entre $g(t)$ et $S\left(\frac{1}{t}\right)$.

10.93 Centrale Maths1 PSI 2022 Achille Domens

On pose $F(0) = 0$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, $F(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$.

a. Montrer que F est définie et développable en série entière sur \mathbb{R} . Donner son développement.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\operatorname{Re} \left(\int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt \right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1) \cdot (2k+1)!}$.

c. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt$ et en déduire l'existence et la valeur de la limite de F en $+\infty$.

10.94 Centrale Maths1 PSI 2022 Paul Lafon

a. Donner un exemple de série entière de rayon 1 et dont la fonction somme est majorée sur $[0; 1[$.

Soit une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 0$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

b. Montrer que f est définie sur $] - 1; 1[$.

c. Montrer que $f(x) = o(\ln(1-x))$.

d. Soit une suite réelle $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est définie sur $] - 1; 1[$ et $g(x) = o(\ln(1-x))$.

La suite $(nb_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend-elle vers 0 ? Indication : reprendre la question a..

10.95 Centrale Maths1 PSI 2022 Peio Lanot

Soit $A \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in] - A; A[$, $f^{(n)}(x) \geq 0$.

a. Montrer que f est développable en série entière sur I . Indication : on pourra utiliser la formule de TAYLOR reste intégral sur les intervalles $] - A; 0[$ et $]0; A[$.

b. Montrer que $g = e^f$ est aussi développable en série entière sur I .

c. Montrer que \tan est développable en série entière sur $] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

10.96 Mines PSI 2022 Olivier Baesen I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f_\alpha : x \mapsto \ln \left(\sqrt{x^2 - 2\alpha x + 1} \right)$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f_α .

b. Déterminer le développement en série entière de f_α au voisinage de 0.

10.97 Mines PSI 2022 Lola Belle Wangue I

Soit $a \in]0; 1[$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(ax)$.

- Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . Calculer $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
- Montrer que f est égale à sa série de TAYLOR sur \mathbb{R} .
- Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = g(ax)$.

10.98 Mines PSI 2022 Peio Lanot II

- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n$.
- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.
- Montrer que f est solution d'une équation différentielle (E).
- Résoudre (E) et en déduire une expression simple de $f(x)$.

10.99 Mines PSI 2022 Camille Pucheu II

Soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$.

- Montrer que la suite $\left(\frac{a_n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 - Qu'en déduire sur le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$?
- On pose dans la suite de l'exercice la fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.
- Trouver l'expression de $f''(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$ pour $x \in]-\infty; \infty[$.
 - En déduire une expression de a_n sous forme de somme.

10.100 Mines PSI 2022 Matis Viozelange I

Soit $\lambda \in]-1; 1[$, on s'intéresse à l'équation (E) : $f'(x) = f(x) + f(\lambda x)$ sur \mathbb{R} .

- Soit f une solution de (E) sur \mathbb{R} , montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
- Montrer que si f est solution de (E) sur \mathbb{R} , alors f est développable en série entière sur \mathbb{R} .
- Trouver toutes les solutions de (E) sur \mathbb{R} .

10.101 CCINP PSI 2022 Marius Desvalois II

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$ sous réserve de convergence.

- Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière.
- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$.
- Pour $x \in]-\infty; \infty[$, trouver a, b et c tels que : $\forall t \in [0; 1], \frac{1}{(1-xt)(1+t^2)} = \frac{a}{1-xt} + \frac{bt}{1+t^2} + \frac{c}{1+t^2}$.
- En déduire une expression compacte de $S(x)$ pour $x \in]-\infty; \infty[$.
- Montrer que S est continue sur $[-1; 0]$ et en déduire $S(-1)$.

10.102 CCINP PSI 2022 Léo Ducos-Tourenne I et Anatole Rousset I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$.

- Donner le domaine de définition I de f.
- Donner le domaine de dérivabilité de f.
- Trouver un équivalent de f en 1^- .
- (rajoutée, Centrale 2012) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le nombre de façons d'écrire n comme somme de 2 carrés (d'entiers naturels), ou encore $a_n = \text{card} \left(\left\{ (p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p^2 + q^2 = n \right\} \right)$. Déterminer, pour $x \in I$, une relation entre $f(x)$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. En déduire le rayon R' de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

10.103 CCINP PSI 2022 Colin Herviou-Laborde I

On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$.

- Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{u_n}{n!} \leq 4^{n+1}$.
- Montrer que f est définie sur $I = \left] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right[$.
- Prouver que f est solution de (E) : $y' = y^2$ sur I.
- En déduire la valeur de u_n pour tout entier naturel n.

10.104 CCINP PSI 2022 Paul Mayé I

Soit $F : x \mapsto - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$. On rappelle que $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- Déterminer le domaine de définition D de F.
- Montrer que $\forall x \in [0; 1]$, $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.
- Montrer que $\forall x \in]0; 1[$, $F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x) \ln(1-x)$.

10.105 Centrale Maths1 PSI 2023 Paul Bats

On définit la fonction $f : I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sin(x) + 1}{\cos(x)}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{N}[X]$ tel que $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$.
- Montrer que la série de TAYLOR de f converge sur I.
- Montrer que f est développable en série entière sur I.

Questions de cours :

- Donner le développement en série entière de Arctan.
- Donner la formule de TAYLOR reste intégral.
- Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g : t \mapsto f(\cos(t), \text{Arctan}(t), 2^t)$. Calculer $g'(t)$.
- Rappeler le théorème des valeurs intermédiaires.

10.106 Centrale Maths1 PSI 2023 Mathys Bureau et Pierre Dobeli

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2} dt$.

- a. Déterminer le domaine de définition D de f .
- b. Pour $x \in D$, on pose $g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^x}{1+t^2} dt$. Montrer que g est développable en série entière sur D .
- c. Montrer que f est développable en série entière sur D .

10.107 Centrale Maths1 PSI 2023 Fares Kerautret

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ ait un rayon de convergence $R = +\infty$.

On définit alors l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

- a. Montrer que $\forall r > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ip t} dt = 2\pi a_p r^p$.
- b. Si f est bornée sur \mathbb{C} , montrer que $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall r > 0, \forall p \in \mathbb{N}, |a_p| \leq \frac{M}{r^p}$. En déduire que f est constante.
- c. S'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq \alpha |z|^q + \beta$, montrer que f est polynomiale.
- d. Si $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq e^{\operatorname{Re}(z)}$, montrer qu'il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = ke^z$.

10.108 Mines PSI 2023 Raphaël Dénier I

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n(2n+1)}$.

- a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n(2n+1)}$.
- b. $S(R)$ et $S(-R)$ sont-ils définis ? Quel est donc le domaine I de définition de S ?
- c. D'après le cours, la fonction S est continue sur quel intervalle au moins ?
- d. S est-elle continue sur I ?
- e. Calculer $S(x)$ pour $x \in]-R; R[$ à l'aide de fonctions usuelles.
- f. Calculer $a = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$. Quel est le signe de a ? Était-ce prévisible ?

10.109 Mines PSI 2023 Juan Dupierris I

On définit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, en cas de convergence, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

- a. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ vérifie $R \geq 1$.
- b. Décomposer t^2 en série entière.
- c. En déduire la valeur de f et des a_n pour tout entier naturel n .

10.110 *Mines PSI 2023* Arthur Melnitchenko II

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

On admet le résultat (C), pour une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \neq 0$, alors $\sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{+\infty}{\sim} n\ell$.

a. Déterminer un équivalent de u_n et en déduire le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$.

b. Calculer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

c. Montrer le résultat (C).

10.111 *Mines PSI 2023* Paul Picard II

Pour $n \geq 1$, on pose $a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\text{th}(t)}{t^2} dt$. On note $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ s'il y a convergence.

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$.

b. f est-elle continue en -1 ?

c. Montrer que $f(x) \underset{1^-}{\sim} -\ln(1-x)$.

10.112 *Mines PSI 2023* Elae Terrien I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note v_n le nombre de n -uplets (a_1, \dots, a_n) tels que :

- $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_k = \pm 1$.
- $\sum_{k=1}^n a_k = 0$.
- $\forall p \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{k=1}^p a_k \geq 0$.

a. Justifier que $v_{2n+1} = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Par convention, on pose $v_0 = u_0 = 1$. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_{2n}$.

b. Calculer u_1, u_2, u_3 .

c. Trouver, pour $n \in \mathbb{N}$, une relation liant $u_{n+1}, u_n, \dots, u_1, u_0$.

d. En s'intéressant à $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$, trouver une expression simple de u_n .

10.113 *CCINP PSI 2023* Rémi Darrieumerle I et Chloé Vagner I

En cas de convergence, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$. On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f .

b. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

c. Déterminer un équivalent de f en 1^- .

10.114 Centrale Maths1 PSI 2024 Émile Gauvrit

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par $a_n = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (\alpha + k)}$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{\alpha}{k} \right) \right) - \alpha \ln(n)$.

- a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
- b. Montrer que $\sum_{n \geq 2} (v_n - v_{n-1})$ converge.
- c. En déduire l'existence de $\lambda > 0$ tel que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$.
- d. Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ pour $x = \pm R$.

10.115 Centrale Maths1 PSI 2024 Lucie Girard

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$. On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

- a. Montrer la convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n$, c'est-à-dire l'existence du réel S .
- b. Quel est le domaine de définition D de la fonction $I : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+1}$?
- c. Donner une expression simple de $I(x)$ pour certains x et en déduire la valeur de S .
- d. Calcul de $\int_0^1 I(x) dx$ de deux manières différentes.

10.116 Centrale Maths1 PSI 2024 Mathias Pisch

- a. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ si $x \neq 0$ et $F(0) = 0$.

- b. Montrer que F est définie et développable en série entière sur \mathbb{R} . Donner son développement.
- c. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\operatorname{Re} \left(\int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt \right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1) \cdot (2k+1)!}$.
- d. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt$ et en déduire l'existence et la valeur de la limite de F en $+\infty$.

10.117 Mines PSI 2024 Yasmine Azzaoui I

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} x^n$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n}$.

10.118 Mines PSI 2024 Edward Bauduin II

- a. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ est développable en série entière au voisinage de 0.
- b. Que dire du rayon de convergence du développement de la question précédente ?

10.119 *Mines PSI 2024* Axel Corbière I

On appelle involution d'un ensemble E toute application $f : E \rightarrow E$ telle que $f \circ f = \text{id}_E$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'ensemble des involutions de l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$ et $I_n = \text{card}(A_n)$ avec la convention $I_0 = 1$.

- a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.
- b. Montrer que le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ vérifie $R \geq 1$.

On définit $\varphi :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$.

- c. Montrer que $\forall x \in]-1; 1[, \varphi'(x) = (1+x)\varphi(x)$.
- d. En déduire une expression simple de $\varphi(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
- e. En déduire une expression de I_n sous forme de somme.

10.120 *Mines PSI 2024* Valentine Girard I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un carré quadrillé avec $(n+1)^2$ points numérotés $(x, y) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$. On cherche à aller de $(0, 0)$ à (n, n) avec pour seuls déplacements autorisés les mouvements $(0, 1)$ et $(1, 0)$ (vers la droite ou vers en haut).

- a. Déterminer le nombre c_n de chemins possibles (avec ces contraintes) pour aller de $(0, 0)$ à (n, n) .

On note d_n le nombre de chemins qui vont de $(0, 0)$ à (n, n) (avec ces contraintes) mais en restant toujours au-dessus (au sens large) de la diagonale $x = y$. Par convention, on pose $d_0 = 1$. En cas de convergence,

pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n$.

- b. Calculer d_1, d_2, d_3 .
- c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} = \sum_{k=0}^n d_k d_{n-k}$.
- d. Justifier que $0 \leq d_n \leq \binom{2n}{n}$. Minorer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} d_n x^n$.
- e. Donner une relation entre $xf(x)^2$ et $f(x)$ pour $x \in]-R; R[$.
- f. En déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles. Que vaut R ?
- g. Donner une expression de d_n en fonction de n .
- h. Si tous les chemins allant de $(0, 0)$ à (n, n) sont équiprobables, quelle est la probabilité p_n qu'un chemin reste au-dessus de la diagonale ?

10.121 *CCINP PSI 2024* Clément Lacoste I

Soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1, a_1 = 3$ et $\forall n \geq 2, a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$.

- a. Trouver une expression de a_n en fonction de n .
- b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq 4^n$.
- c. En déduire une inégalité concernant le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.
- d. Montrer que pour des x convenables, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{2x^2 - 3x + 1}$.
- e. Donner une autre expression de a_n et la valeur de R .

10.122 *Mines-Télécom PSI 2024* Émile Gauvrit II

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$.

Sur quel domaine peut-on prolonger f ? f est-elle continue, dérivable, de classe C^1 ? De classe C^∞ ?

10.123 *Mines-Télécom PSI 2024* Eva Rojo I

Soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $a_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$. On note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et

R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

a. Montrer que $\forall x \in]-R; R[$, $S(x) = x + S(x)^2$.

b. En déduire $S(x)$ pour $x \in]-R; R[$ et la valeur de R .

c. Montrer que $\forall n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$.

10.8 Officiel de la Taupe

10.124 *OdIT 2012/2013 Centrale PSI planche 130*

Ensemble de définition D de $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$?

Montrer que S est bijective de $D \cap \mathbb{R}_+$ dans $[0; A]$ où A est un réel qu'on ne cherchera pas à calculer.

Montrer que l'équation $(E_n) : \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k^2} = a$ ($a > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$) admet une unique solution notée x_n dans \mathbb{R} .

Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, et déterminer sa limite.

10.125 *OdIT 2012/2013 ENTPE/EIVP PSI planche 247III*

Déterminer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{1}{2^n n(2n-1)}$.

En plus : on pourra en profiter pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}$.

10.126 *OdIT 2012/2013 ENTPE/EIVP PSI planche 248II*

On donne une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et on note f sa fonction somme.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $p \geq 1$. On s'intéresse à la série $\sum_{n \geq 0} P(n) a_n x^n$ dont on note R' le rayon de convergence

et g la fonction somme. Montrer que, pour n assez grand, on a $|P(n)| \geq 1$. Qu'en déduit-on pour R' ?

Montrer que $(1, X, X(X-1), \dots, X(X-1) \cdots (X-p+1))$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

En déduire que $R = R'$ et exprimer $g(x)$ en fonction des dérivées de f .

Donner le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 2^n + 2^n}{n!} x^n$.

10.127 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 158II*

Convergence et somme de $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - 1}{n + 2} x^n$.

10.128 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 166II*

- a. Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de (E) : $f'(x) = f(x) + f(\lambda x)$ avec $\lambda \in]-1; 1[$, alors f est de classe C^∞ et développable en série entière sur \mathbb{R} .
- b. Donner toutes les solutions de (E).
- c. Montrer que $\left(\prod_{k=0}^n (1 + \lambda^k) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite non nulle $K(\lambda)$.
- d. Montrer qu'une solution f non nulle de (E) vérifie $f(x) \underset{+\infty}{\sim} K(\lambda)f(0)e^{\lambda x}$.

10.129 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 169I*

- a. Ensemble de définition de $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(|1-y|)}{y} dy$.
- b. f admet-elle un développement en série entière au voisinage de 0 ? Calculer $f(1)$.

10.130 *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 228II*

- a. Montrer que Arcsin est développable en série entière sur un intervalle $] -a; a[$ et donner cette série.
- b. Montrer que $f : t \mapsto (\text{Arcsin}(t))^2$ est développable en série entière sur $] -a; a[$.
- c. Trouver une équation différentielle vérifiée par f' et en déduire ce développement.

10.131 *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 236I*

- a. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = 1$ admet une unique solution x_n sur \mathbb{R}_+ .
- b. Montrer que $(x_n)_{n \geq 1}$ converge et trouver sa limite.

10.132 *OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 279II*

Montrer que f définie par $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$ est continue sur \mathbb{R} .

Montrer qu'elle est de classe C^∞ et calculer $f^{(n)}(0)$ en fonction de n .

10.133 *OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 285I*

- a. Développement en série entière de $\ln(1-x)$.
- b. Étudier $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right)$.

10.134 *OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 290II*

- a. Trouver une série entière f non nulle solution de (E) : $xy''(x) + (1+x)y' - py = 0$ avec $p \in \mathbb{R}$. Quel est son rayon de convergence ?
- b. Si $p \in \mathbb{N}$, montrer qu'un polynôme, dont on précisera le degré, est solution de (E).

10.135 *OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 131II*

Rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$ et calcul de la limite en 1 de sa somme.

Soit une suite réelle (b_n) telle que $\sum_{n \geq 0} b_n$ converge ; que dire du rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$?

On le suppose égal à 1 ; montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ est continue en 1.

10.136 *OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 132I* Nature et somme de $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{3n+2}$.

10.137 *OdIT 2015/2016 Centrale PSI planche 177*

On donne une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ réelle telle que $(na_n)_{n \geq 0}$ tende vers 0.

Montrer que $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Montrer que $f(x) = o(\ln(1-x))$. Réciproquement, si $f(x) = o(\ln(1-x))$, $(na_n)_{n \geq 0}$ tend-elle vers 0 ?

10.138 *OdIT 2015/2016 Centrale PSI planche 190*

On suppose $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence R non nul, et telle que $\sum_{n \geq 0} |a_n| R^n$ converge.

Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue en R .

Soit $f(t) = \frac{1}{t} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right|$; justifier l'existence de $\int_0^1 f(t) dt$ et l'exprimer à l'aide d'une série.

Justifier que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge et la calculer sachant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

10.139 *OdIT 2015/2016 ENSEA planche 281I*

Montrer que si $u_n(t) = \frac{(-1)^n t^n}{\sqrt{1+n^2}}$, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur tout segment de $[0; 1[$. Que peut-on en déduire pour sa somme f ? Quelle est la nature de la suite de terme général $v_n = \int_0^1 u_n(t) dt$? Montrer que $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge.

10.140 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 104II*

Si R est le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, quel est le mode de convergence de f sur $] -R; R[$?

On note p_n le nombre de partitions de $\llbracket 1; n \rrbracket$ (rappel : $\{U_1, \dots, U_p\}$ est une partition de $\llbracket 1; n \rrbracket$ si et seulement si les U_k sont deux à deux disjointes, non vides, et si leur réunion vaut $\llbracket 1; n \rrbracket$). On pose $p_0 = 1$. Montrer que $p_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_n}{n!} x^n$; montrer que f a un rayon $R \geq 1$ puis calculer $f(x)$.

10.141 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 110I*

On note D_n le nombre de permutations sans point fixe de $\{1, \dots, n\}$ avec $D_0 = 1$ par convention.

Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k = n!$. Montrer que $\sum_{n \geq 0} \frac{D_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.

On note S sa somme sur $] -1; 1[$; calculer $T(x) = e^x S(x)$ et en déduire une expression de D_n .

10.142 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 204I*

Déterminer la limite de la suite de terme général $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n dt$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq \frac{1}{1+n}$. Rayon de convergence R et domaine de définition de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

10.143 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 210I*

Montrer que $\sum_{n \geq 0} \frac{2n^2 + 3n + 1}{2^{n+1}}$ converge et calculer sa somme.

10.144 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 211I*

Nature et somme de la série $\sum_{n \geq 0} n^{(-1)^n} x^n$.

10.145 *OdIT 2016/2017 EIVP PSI planche 245I*

Développement en série entière de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$; en déduire celui de $\frac{1}{(1-x)^{3/2}}$.

Montrer que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n} \binom{2n}{n}$ à l'aide d'un produit de CAUCHY.

10.146 *OdIT 2017/2018 Mines PSI planche 112I*

Domaine de définition de $f : x \mapsto \int_0^x \frac{\ln|1-t|}{t} dt$. f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

Quel est alors son rayon de convergence ? Calculer $f(1)$.

10.147 *OdIT 2017/2018 Mines PSI planche 115II*

On note p_n le nombre de partitions de $\{1, \dots, n\}$ (rappel : $\{u_1, \dots, u_p\}$ est une partition de $\llbracket 1; n \rrbracket$ si et seulement si les u_k sont deux à deux disjointes, non vides, et si leur réunion vaut $\llbracket 1; n \rrbracket$).

Montrer que $p_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k$ et calculer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_n}{n!} x^n$.

10.148 *OdIT 2017/2018 Mines PSI planche 117I*

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{3n+2}$.

10.149 *OdIT 2017/2018 Centrale PSI planche 175*

On donne $u_0 = 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$ où a et b sont deux réels strictement positifs, et on pose $v_n = \ln(n^{b-a} u_n)$.

Montrer la convergence de $\sum_{n \geq 0} (v_{n+1} - v_n)$ et en déduire une condition sur a et b pour que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Cette condition étant vérifiée, on note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, donner le domaine de définition de f et calculer $f(1)$.

10.150 *OdIT 2017/2018 CCP PSI planche 216I*

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n \geq 0} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) x^n$.

10.151 *Compléments OdIT 2017/2018 CCP PSI planche 443I*

a. Montrer que la suite de terme général $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$ est convergente et calculer sa limite.

b. Montrer que $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ est convergente.

c. Montrer que $a_n \geq \frac{1}{n+1}$ et en déduire le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

d. Déterminer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en fonction des fonctions usuelles.

e. En déduire la valeur exacte de $f(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$.