

SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 10

SÉRIES ENTIÈRES

10.1 Rayon et expression

10.1 $R = 1$, règle de d'ALEMBERT appliquée aux séries numériques : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n+2)|x|^{2n+3}}{(3n+5)|x|^{2n+1}} = |x|^2$.

La fonction somme est notée S , elle est impaire et pour $x \in [0; 1[$, $\sqrt{x}S(x^{3/2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2} = g(x)$. On dérive et on obtient $\forall x \in]-1; 1[$, $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} = \frac{x}{1-x^3}$ qu'on primitive en décomposant en éléments simples : $g'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{x-1}{1+x+x^2} \right)$. On intègre en écrivant $g'(x) = \frac{1}{3(1-x)} + \frac{(2x+1)}{6(1+x+x^2)} - \frac{1}{2(1+x+x^2)}$ donc comme $g(0) = 0$, il vient $g(x) = -\frac{1}{3} \ln(1-x) + \frac{1}{6} \ln(1+x+x^2) - \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{Arctan} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) - \frac{\pi}{6} \right]$. Il suffit donc d'écrire que pour $x \in [0; 1[$, $S(x) = \frac{1}{x^{1/3}} g(x^{2/3})$ et c'est fait.

10.2 a. Le rayon de convergence est $R = 1$ par la règle de d'ALEMBERT, il y a convergence en 1 et en -1 par le critère de RIEMANN donc l'intervalle de convergence est $[-1; 1]$.

b. On a $\forall x \in]-1; 1[$, $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) x^n = x \ln(1+x) + (\ln(1+x) - x)$. On aurait aussi pu obtenir cette formule en prenant la dérivée de f et en intégrant ensuite.

c. Comme il y a convergence normale sur $[-1; 1]$ car $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n(n-1)}$ en posant $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$, on a $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \ln(2) - 1$ et $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$.

10.3 On pose l'équation caractéristique de cette récurrence linéaire : $z^2 - 2z - 1 = 0$ dont les solutions sont $\sqrt{2} + 1$ et $\sqrt{2} - 1$. Après des calculs classiques : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{2} \left((\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} - 1)^n \right) \sim \frac{1}{2} (\sqrt{2} + 1)^n$ donc le rayon est celui de $\sum_{n \geq 0} (\sqrt{2} + 1)^n x^n$ et donc $R = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$.

Ensuite, en notant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R; R[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n) x^{n+2} = 0$ ce qui donne $(f(x) - a_1 x - a_0) - 2x(f(x) - a_0) - x^2 f(x) = 0$ et donc $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 2x - 1}$.

10.4 Si $r > 0$, on a $(a_{2n} r^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ bornée si et seulement si $r \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$ et $(a_{2n+1} r^{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ bornée si et seulement si $r \leq \frac{1}{\sqrt{b}}$. Comme $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(a_{2n} r^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1} r^{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ le sont :

$$R = \frac{1}{\sqrt{b}}. \text{ Alors } \forall x \in]-R; R[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (ax^2)^n + x \sum_{n=0}^{+\infty} (bx^2)^n = \frac{1}{1-ax^2} + \frac{x}{1-bx^2}.$$

10.5 Le rayon est classiquement $R = 1$. Pour calculer la somme de la série, il suffit de décomposer en éléments simples : $\frac{n+3}{2n+1} = \frac{1}{2} \frac{2n+1+5}{2n+1} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} \frac{1}{2n+1}$. On distingue ensuite $x > 0$ ou $x < 0$.

Si $x > 0$, on pose $x = y^2$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{2n+1} y^{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} y^{2n} + \frac{5}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{2(1-y^2)} + \frac{5}{2y} \operatorname{Argh}(y)$.
 $\forall x \in [0; 1[, f(x) = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{5}{2\sqrt{x}} \operatorname{Argh}(\sqrt{x})$. De même : $\forall x \in]-1; 0]$, $f(x) = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{5}{2\sqrt{-x}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{-x})$.

10.6 Par croissance comparée, $\left(\frac{n^2+n^3}{2^n+3^n} x^{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée si et seulement si $|x| < \sqrt{3}$: $R = \sqrt{3}$.

10.7 a. $R = 1$. Comme $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, la somme de la série en tout point du cercle de centre 0 et de rayon 1 donc a fortiori aux bornes de l'intervalle $] -1; 1[$

b. On trouve classiquement : $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - e^x$.

c. On trouve $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{e}$ alors que f diverge en -1 ; et $f(x) \sim \frac{1}{1-x}^2$.

10.8 Les deux séries entières sont classiquement de rayon 1, divergence en ± 1 pour la première car le terme général ne tend pas vers 0 et convergence en ± 1 pour la seconde avec le critère de RIEMANN.

$\forall y \in]-1; 1[, F(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 y^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) y^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) y^n + \sum_{n=0}^{+\infty} y^n$ et en reconnaissant les dérivées de la série géométrique : $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 y^n = \left(\frac{1}{1-y}\right)'' - 3\left(\frac{1}{1-y}\right)' + \frac{1}{1-y} = \frac{2-3(1-y)+(1-y)^2}{(1-y)^3} = \frac{y^2+y}{(1-y)^3}$.

Ainsi : $\forall x \in]-1; 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 (-1)^n x^{2n+1} = x F(-x^2) = \frac{x^5-x^3}{(1+x^2)^3}$.

$\forall x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$, $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = -\frac{x}{2} \ln(1-x) + \frac{1}{2x} \left(\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} \right)$.

10.9 a. Le rayon de convergence de ces séries entières est $R_p = 1$ et il y a divergence en 1 et en -1 .

b. Les f_p sont de classe C^∞ (et dérivables terme à terme) sur l'intervalle ouvert de convergence donc : $\forall x \in]-1; 1[, x f_p'(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p+1} x^{n-1} = f_{p+1}(x)$.

c. On voit par récurrence sur p que f_p a, sur D , une expression du type : $f_p(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} + \sum_{j=1}^p \frac{a_j(p)}{(1-x)^j}$.
 C'est vrai pour $p = 0, 1$ et si ça l'est pour un entier p , $f_{p+1}(x) = x f_p'(x) = \frac{(p+1)!x}{(1-x)^{p+2}} + x \sum_{j=1}^p \frac{j a_j(p)}{(1-x)^{j+1}}$ qui se met sous la bonne forme en écrivant $x = x - 1 + 1$. on a donc $f_p(x) \sim \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$.

d. D'après la formule précédente, $f_p(x)$ admet une limite finie quand x tend vers -1^+ .

10.10 a. Par la règle de d'ALEMBERT par exemple, on trouve $R = 1$.

b. Il y a convergence en -1 d'après le CSSA, et divergence en 1 d'après le critère de RIEMANN.

c. Sur $[-1; 0]$, on a $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ qui tend vers 0 donc il y a convergence uniforme de la série sur $[-1; 0]$ donc continuité en -1 .

d. Pour $n \geq 1$, on a $\sqrt{n} \leq n$ donc pour $x \in [0; 1]$, $f(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

10.11 Le rayon vaut $R = \sqrt{3}$ avec d'ALEMBERT.

On reconnaît la série entière de la fonction Arctan et $f(x) = 3\sqrt{3} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$.

10.2 Théorie

10.12 Notons R le rayon de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et R' celui de $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{a_n} z^n$.

Si $R > 0$ et $0 < r < R$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n r^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n r^n} = +\infty$ et ainsi $(\frac{1}{a_n} r'^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 avec $r' = \frac{1}{r}$ donc $\frac{1}{r} \geq R'$. Ainsi $\frac{1}{r} > \frac{1}{R} \implies \frac{1}{r} \geq R'$; ceci étant vrai pour tout r vérifiant cette condition : $\frac{1}{R} \geq R'$ donc $RR' \leq 1$. C'est a fortiori vrai si $R = 0$. Dans tous les cas $RR' \leq 1$.

10.13 Notons R' le rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2 z^n$. Si $R = 0$ alors $(a_n(\sqrt{r})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ donc a fortiori $(a_n^2 r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et ainsi $R' = 0$. Réciproquement, si $R' = 0$ alors $(a_n^2 r^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ donc a fortiori $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et ainsi $R = 0$.

Si $R > 0$ et $0 < r < R \iff 0 < r^2 < R^2$, alors $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée donc a fortiori $(a_n^2 r^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ donc $r^2 \leq R'$. ceci implique $R^2 \leq R'$ (puisque c'est vrai pour tout $r^2 \in]0; R^2[$). Réciproquement, si $R' > 0$ et $0 < r' < R'$, on a $(a_n^2 r'^n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée donc $(|a_n(\sqrt{r'})^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ aussi ce qui implique $\sqrt{r'} \leq R \iff r' \leq R^2$ d'où $R' \leq R^2$.

Ainsi dans tous les cas, on a $R' = R^2$.

10.14 a. $\forall n \in \mathbb{N}, \|b_n\| \leq 1$ et $\sum_{n \geq 0} z^n$ est de rayon de convergence 1 donc $R' \geq 1$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}, \|b_n\| \leq |a_n|$ et $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est de rayon de convergence R donc $R' \geq R$. Ainsi $R' \geq \max(1, R)$.

b. Si $R' > 1$, on a $\sum_{n \geq 0} b_n$ qui converge donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ et comme $|b_n| = \frac{|a_n|}{1 + |a_n|} \iff |a_n| = \frac{|b_n|}{1 - |b_n|}$ dès que n est suffisamment grand donc $|a_n| \sim |b_n|$ donc $R = R'$.

c. Si $R' = 1$, on a $R \leq 1$ d'après a. donc $R' = \max(1, R)$. D'après b., dans tous les cas : $R' = \max(1, R)$.

10.15 On note R le rayon de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et R' celui de $\sum_{n \geq 0} S_n x^n$. Comme $a_n \leq S_n$, on a $R' \leq R$. Comme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ diverge en 1 donc $R \leq 1$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{S_{n+1}}{S_n} = 1 + \frac{a_n}{S_n}$ tend vers 1, donc $R' = 1$ d'après la règle de d'ALEMBERT. Ainsi : $R = R' = 1$.

$\forall x \in]-1; 1[$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n\right)$ par produit de CAUCHY de séries absolument convergentes donc en notant $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$, on a $(1-x)f(x) = g(x)$.

10.16 Soit $x \in [0; R[$, posons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n x^n$, on a f de rayon 1 et la relation : $\forall x \in [0; 1[, f(x) = S(Rx)$. Cela nous permet de nous ramener à $R = 1$.

On reprend donc $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $R = 1$ et on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ (convergence par hypothèse). En

posant $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ la somme de série, on a $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = R_{n-1} - R_n$ avec $R_{-1} = S$. On effectue une

transformation d'ABEL : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = S - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n (x^n - x^{n+1})$ après calculs. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$,

pour un $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |R_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Or $x \mapsto \sum_{n=0}^{n_0} R_n (x^n - x^{n+1})$ est continue en 1 et

vaut 0 en 1, il existe $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in [1 - \alpha; 1], \left| \sum_{n=0}^{n_0} R_n (x^n - x^{n+1}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, $\forall n \geq n_0, \forall x \in [1 - \alpha; 1] :$

$|S(x) - S(1)| = |S(x) - S| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x^n - x^{n+1}) \right| \leq \left| \sum_{n=0}^{n_0} R_n(x^n - x^{n+1}) \right| + \left| \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} R_n(x^n - x^{n+1}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$
car $\forall x \in [0; 1], 0 \leq x^n - x^{n+1} \leq 1$ donc $\left| \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} R_n(x^n - x^{n+1}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} (x^n - x^{n+1}) = \frac{\varepsilon}{2} x^{n_0+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On conclut bien que, puisque $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [1 - \alpha; 1], |S(x) - S(1)| \leq \varepsilon$, on a $\lim_{t \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

10.3 Relations avec l'intégrale

10.17 a. On a : $\forall t \in [0; 1], \frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$ donc $\frac{1}{2(n+1)} \leq a_n \leq \frac{1}{n+1}$ d'où $R = 1$. Comme $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est clairement décroissante, on a convergence en -1 mais pas en 1 .

b. Pour $|x| < 1$, la série de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $u_n(t) = \frac{x^n t^n}{1+t^2}$ converge normalement sur $[0; 1]$ car $\|u_n\|_\infty \leq |x|^n$ donc on peut intervertir série et intégrale pour avoir la relation souhaitée.

c. On trouve $a = \frac{x^2}{1+x^2}$, $b = \frac{x}{1+x^2}$ et $c = \frac{1}{1+x^2}$. On intègre alors pour avoir la relation suivante :

$$f(x) = \left[-\frac{x}{1+x^2} \ln(1-xt) + \frac{x}{2(1+x^2)} \ln(1+t^2) + \frac{1}{1+x^2} \operatorname{Arctan}(t) \right]_0^1 = \frac{-4x \ln(1-x) + 2x \ln(2) + \pi}{4(1+x^2)}.$$

Ainsi $f(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\pi}{8}$ par convergence uniforme sur $[-1; 0]$.

d. $a_{n+2} + a_n = \frac{1}{n+1}$ donc $a_{2n} = (-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right)$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

10.18 a. On va trouver un encadrement de a_n pour répondre à ces deux questions. Pour $t \in [0; 1]$, classiquement,

$0 \leq t \leq \frac{1+t^2}{2} \leq \frac{1+t}{2} \leq 1$ car $(t-1)^2 \geq 0$ et $t^2 \leq t$. En élevant ces inégalités à la puissance n et en les intégrant sur $[0; 1]$, $\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{1}{n+1} \left(2 - \frac{1}{2^n} \right) = \left[\frac{(1+t)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)} \right]_0^1 = \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2} \right)^n dt$ ce qui donne plus simplement l'encadrement $\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq \frac{2}{n+1}$.

• Ainsi $a_n \geq \frac{1}{n+1}$ et la série harmonique $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1}$ diverge donc $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge par comparaison.

• Comme $\forall t \in [0; 1], \frac{1+t^2}{2} \in [0; 1]$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^{n+1} \leq \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n$ ce qui montre par croissance de l'intégrale que $a_{n+1} \leq a_n$. Ainsi, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et elle tend vers 0 par encadrement car $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2n+1}$ donc $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge par le critère spécial des séries alternées.

b. La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge d'après a. donc $R \leq 1$. De plus, la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge d'après a. donc $R \geq 1$. Ainsi, $R = 1$ et l'intervalle de convergence est $[-1; 1[$ d'après la question a..

c. Pour $x \in]-1; 1[$, en posant $u_n(t) = x^n \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n$, comme la fonction $|u_n|$ est croissante sur $[0; 1]$, on a $\|u_n\|_{\infty, [0; 1]} = |u_n(1)| = |x|^n$ et la série géométrique $\sum_{n \geq 0} |x|^n$ converge puisque $|x| < 1$. Par conséquent, la série

$\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur le segment $[0; 1]$ donc, par un théorème du cours et car $\left| \frac{x(1+t^2)}{2} \right| < 1$ pour

$t \in [0; 1]$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left(\frac{x(1+t^2)}{2} \right)^n dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x(1+t^2)}{2} \right)^n \right) dt = \int_0^1 \frac{2dt}{2-x-xt^2}$. Pour $x \in]-1; 0[$,

on a donc $f(x) = \frac{2}{2-x} \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{-x}{2-x} t^2} dt = \frac{2}{2-x} \sqrt{\frac{2-x}{-x}} \int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{-x}{2-x}}}{1 + \frac{-x}{2-x} t^2} dt$ car $\frac{-x}{2-x} > 0$. Ainsi, on conclut

classiquement que $f(x) = \left[\frac{2}{\sqrt{-x(2-x)}} \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{-x}{2-x}} t \right) \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{-x(2-x)}} \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{-x}{2-x}} \right)$.

d. Avec les mêmes notations, si $x \in [-1; 0]$ (on a vu la convergence de $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ en question **a.**) la suite $(a_n(-x)^n)_{n \geq 0}$ est décroissante et tend vers 0 donc la série alternée $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n(-x)^n$ converge par le critère

spécial et on peut majorer $|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq a_{n+1} |x|^{n+1} \leq a_{n+1}$. Ainsi, $\|R_n\|_{\infty, [-1; 0]} \leq a_{n+1}$ or on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, [-1; 0]} = 0$ par encadrement et on a convergence uniforme de

$\sum_{n \geq 0} u_n$ sur $[-1; 0]$. Alors, f est continue sur $[-1; 0]$ car toutes les fonctions u_n sont continues sur $[-1; 0]$ et

$$f(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{\sqrt{-x(2-x)}} \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{-x}{2-x}} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \text{ car } \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

10.19 Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$ l'est aussi. Or, pour tout réel x ,

$f'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$ qu'on sait développer en série entière avec le développement de la série exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n x^{2n}}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2^{2n+1} - 1) x^{2n}}{n!}.$$

Comme le rayon de la série entière décrivant $f'(x)$ est $R + \infty$, celui de la série primitive est aussi $R = +\infty$ et on a donc en intégrant

$$\text{terme à terme : } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2^{2n+1} - 1) x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \text{ car } f(0) = 0.$$

10.20 $t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = (t-2)\left(t - \frac{1}{2}\right) = (1-2t)\left(1 - \frac{t}{2}\right)$ donc f est définie et C^∞ sur $] -\infty; \frac{1}{2}[$. On dérive :

$$\forall x \in] -\infty; \frac{1}{2}[, f'(x) = \frac{1}{x} \ln(1-2x) + \frac{1}{x} \ln\left(1 - \frac{t}{2}\right) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2^n}{n} - \frac{1}{2^n n} \right) x^{n-1}.$$

Le rayon de cette série est $R = \frac{1}{2}$, et le rayon de la série primitive est le même donc f est DSE sur $] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ où $f(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2^n}{n^2} - \frac{1}{2^n n^2} \right) x^n$.

10.21 $\forall t \in]0; 1[, \ln(1-t) \ln(t) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n \ln(t)}{n}$ en développant en série entière $\ln(1-t)$. Si $f_n(t) = \frac{t^n \ln(t)}{n}$,

on a bien les $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ continues et intégrables sur $]0; 1[$, $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0; 1[$ vers une

fonction continue et $\int_{]0; 1[} f_n = \left[\frac{t^n \ln(t)}{n(n+1)} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^n}{n(n+1)} dt = - \frac{1}{n(n+1)^2}$. Comme $\sum_{n \geq 1} \int_0^1 |f_n|$ converge,

par le TITT : $\int_0^1 \ln(t) \ln(1-t) dt = - \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n \ln(t)}{n} dt = - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^n \ln(t)}{n} dt = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$. Ainsi

$$\int_0^1 \ln(t) \ln(1-t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

10.22 On a $\forall x \in [0; 1]$, $\frac{\operatorname{Arctan} x}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$. On majore le reste de cette série par le CSSA, ce qui donne :

$$\forall x \in [0; 1], |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k+1} \right| \leq \frac{x^{2n+2}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3} \text{ donc la convergence est uniforme sur } [0; 1].$$

$$\text{On peut donc intervertir et } \int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} x}{x} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

10.23 La fonction f est prolongeable par continuité (faire un DL) en 0 en posant $f(0) = -2$, elle est continue et strictement négative sur $] -1; 1[$. On a $f(t) \sim_1 \ln(1-t)$ or \ln est intégrable sur $]0; 1]$ donc $t \mapsto \ln(1-t)$ l'est sur $]0; 1[$. De même $f(t) \sim_{-1} \ln(1+t)$ or \ln est intégrable sur $]0; 1]$ donc $t \mapsto \ln(1+t)$ l'est sur $] -1; 0]$. Ainsi

f est intégrable sur $] -1; 1[$. Ensuite, on constate que $f(t) = -2 \frac{\operatorname{Argth}(t)}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = -2$ donc f est

développable en série entière en $\forall t \in] -1; 1[, f(t) = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1}$. Soit F la primitive de f qui s'annule en

0, on a $\forall t \in]-1; 1[$, $F(t) = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2}$.

L'intégrale à calculer vaut $\lim_{t \rightarrow 1^-} F(t) - \lim_{t \rightarrow -1^+} F(t) = 2 \lim_{t \rightarrow 1^-} F(t) = -4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ (par imparité de F et convergence normale sur $[-1; 1]$ de la série associée). Alors $\int_{-1}^1 f(t) dt = -\frac{\pi^2}{2}$.

10.4 Équation différentielle

10.24 a. On sait que $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sont DSE avec un rayon 1 donc f est aussi DSE avec un

rayon au moins égal à 1 par produit de CAUCHY.

b. On dérive f et on trouve $\forall x \in]-1; 1[$, $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$ par calculs.

c. On note $\forall x \in]-1; 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ ce développement en série entière car f est impaire. Alors on

a : $\forall x \in]-1; 1[$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)a_{n-1} x^{2n-2}$ donc $x^2 f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)a_{n-1} x^{2n}$

et $xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{2n}$ d'où, en remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient :

$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((2n+1)a_n - (2n-1)a_{n-1} - a_{n-1})x^{2n} = 1$ donc $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{2n}{2n+1} a_{n-1}$. Par

réurrence, on trouve : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ et on vérifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ donc f est bien DSE

avec un rayon $R = 1$ et on a $\forall x \in]-1; 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2 x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

10.25 a. Par la méthode classique, on montre que si φ est DSE et solution de (E), alors elle est proportionnelle à

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$. D'après d'ALEMBERT, le rayon de cette série entière est $R = +\infty$. On a clairement, $\varphi(x) = \text{ch}(\sqrt{x})$

si $x > 0$, $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(x) = \cos(\sqrt{-x})$ si $x < 0$. En remontant les calculs sur les coefficients de la série entière, on constate que φ est bien solution DSE de (E) sur \mathbb{R} .

b. Par la méthode LAGRANGE, on pose $z = y \text{ch}(\sqrt{x})$ et on parvient à l'équation $z'' + \left(\frac{\text{th}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x}\right)z' = 0$.

On intègre en reconnaissant les primitives et on obtient $z' = \frac{K_1}{\sqrt{x}(\text{ch}(\sqrt{x}))^2}$ donc $z = 2K_1 \text{th}(\sqrt{x}) + K_2$ donc

$y = A_1 \text{ch}(\sqrt{x}) + A_2 \text{sh}(\sqrt{x})$. Du côté négatif et on obtient $y = B_1 \cos(\sqrt{-x}) + B_2 \sin(\sqrt{-x})$.

c. Pour un prolongement C^1 en 0 : $A_2 = B_2 = 0$ et $A_1 = B_1$ en utilisant les développements limités.

10.26 a. Par la méthode classique, on montre que si φ est DSE et solution de (E), alors elle est proportionnelle

à $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$. D'après d'ALEMBERT, le rayon de cette série entière est $R = +\infty$. On a clairement,

$\varphi(x) = \frac{\text{sh}(x)}{x}$ si $x \neq 0$, $\varphi(0) = 1$. En remontant les calculs sur les coefficients de la série entière, on constate

que φ est bien solution DSE de (E) sur \mathbb{R} .

b. Par la méthode LAGRANGE, on pose $z = y\varphi(x)$ et on parvient à l'équation $z'' + \coth(x)z' = 0$. On intègre en reconnaissant les primitives et on obtient $z' = \frac{K_1}{\text{sh}(x)^2}$ donc $z = -K_1 \coth(x) + K_2$ et alors cela donne

$y = A_1 \frac{\text{ch}(x)}{x} + A_2 \frac{\text{sh}(x)}{x}$ (sur \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^*).

c. Par un prolongement C^1 en 0 : $A_1 = B_1 = 0$ et $A_2 = B_2$ en utilisant les développements limités.

10.5 Produit de Cauchy et dénombrement

10.27 a. On a $b_1 = 1$, $b_3 = 2$, $a_4 = 5$ et $b_5 = 16$ en les écrivant toutes ces permutations zig-zag sous la forme de liste $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$. Par exemple $a_4 = 5$ car les seules permutations zig-zag pour $n = 4$ sont $(1, 3, 2, 4)$, $(1, 4, 2, 3)$, $(2, 3, 1, 4)$, $(2, 4, 1, 3)$, $(3, 4, 1, 2)$.

b. Comme $a_n \leq n!$ et $b_n \leq n!$, on a $0 \leq \frac{a_n}{n!} \leq 1$ et $0 \leq \frac{b_n}{n!} \leq 1$ donc les rayons vérifient $R_a \geq 1$ et $R_b \geq 1$.

c. Soit $n \geq 2$ pair, on compte le nombre de permutations up-down de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ pour lesquelles la position de $n+1$ (le plus grand élément) dans la liste est $2k$ (forcément une position paire $2 \leq 2k \leq n$ puisque ça monte et ça descend) :

- il faut d'abord choisir les $2k-1$ entiers parmi les n entiers de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui sont avant $n+1$ dans la liste : cela fait $\binom{n}{2k-1}$ choix.
- ensuite il faut choisir la permutation up-down qui contient ces $2k-1$ éléments : cela fait b_{2k-1} choix (ce nombre ne dépend que du nombre d'éléments et pas des éléments eux-mêmes).
- ensuite il faut choisir la permutation up-down qui contient les $n-2k+1$ entiers qui sont après $n+1$ (pas besoin de choisir ces entiers, ce sont ceux qui restent) : cela fait b_{n-2k+1} choix.

Comme on obtient une partition des permutations up-down quand on fait varier l'entier $2k$ entre 2 et n , on obtient : $b_{n+1} = \sum_{2 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k-1} b_{2k-1} b_{n-2k+1}$; mais avec les conventions : $b_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k b_{n-k}$.

Soit $n \geq 3$ impair, on compte le nombre de permutations up-down de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ pour lesquelles la position de $n+1$ dans la liste est $2k$:

- choisir les $2k-1$ entiers dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui sont avant $n+1$ dans la liste : cela fait $\binom{n}{2k-1}$ choix.
- ensuite il faut choisir la permutation up-down qui contient ces $2k-1$ éléments : cela fait b_{2k-1} choix.
- ensuite il faut choisir la permutation up-down qui contient les $n-2k+1$ entiers qui sont après $n+1$ (pas besoin de choisir ces entiers, ce sont ceux qui restent) : cela fait a_{n-2k+1} choix.

De nouveau, $a_{n+1} = \sum_{2 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k-1} b_{2k-1} a_{n-2k+1}$ qui se transforme avec les conventions et le changement

d'indices $k = n-j$ en la formule plus homogène $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k a_{n-k} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j b_{n-j}$.

d. $\forall x \in]-R_b; R_b[$, $b(x)^2 = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{b_i}{i!} x^i \right) \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{b_j}{j!} x^j \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i+j=n} \frac{b_i}{i!} \frac{b_j}{j!} \right) x^n$ ce qui nous donne aussi

$$b^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k b_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!}.$$

$$\forall x \in]-R_b; R_b[, \quad b(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k b_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{b_{n+1}}{n!} x^n = b'(x) - 1.$$

$\forall x \in]-R_b; R_b[, \quad \frac{b'(x)}{1+b(x)^2} = 1$ donc $x \mapsto \text{Arctan}(b(x)) - x$ est constante sur cet intervalle et comme on a la condition initiale $b(0) = 0$ il vient : $b(x) = \tan(x)$.

e. Comme \tan est DSE sur $] -1; 1[$ au moins, elle est égale à sa série de TAYLOR donc $b_{2n+1} = \frac{\tan^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}$.

Si $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, on a $\tan(x) = \sum_{k=0}^n b_{2k+1} x^{2k+1} + \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^x (x-t)^{2n+1} \tan^{(2n+2)}(t) dt$ mais comme on sait que $\tan' = 1 + \tan^2$, on montre par une récurrence facile que $\tan^{(k)}$ est positive sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ ainsi

$\sum_{k=0}^n b_{2k+1} x^{2k+1} \leq \tan(x)$ donc $\sum_{k \geq 0} b_{2k+1} x^{2k+1}$ est convergente et on a $R_b \geq \frac{\pi}{2}$. Comme la fonction \tan n'admet pas de limite finie en $\frac{\pi}{2}$, on a aussi $R_b \leq \frac{\pi}{2}$ ce qui donne au final : $R_b = \frac{\pi}{2}$.

On a donc par imparité de $\tan : \forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_{2n+1} x^{2n+1} = \tan(x)$.

f. Si $R = \text{Min}(R_a, R_b)$, $\forall x \in]-R; R[$, $a(x)b(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n = a'(x)$.

Alors $a'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} a(x)$ qui est une équation linéaire homogène du premier ordre ; comme $x \mapsto \ln(|\cos(x)|)$ est une primitive de $x \mapsto \tan(x)$ et que $a(0) = 1$ il vient : $a(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

Comme avant on montre par récurrence avec la formule $\left(\frac{1}{\cos}\right)' = \tan \times \left(\frac{1}{\cos}\right)$ que les dérivées successives de $\frac{1}{\cos}$ sont positives donc que $R_a = \frac{\pi}{2}$. Par parité de $\frac{1}{\cos} : \forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{2n}}{(2n)!} x^{2n} = \frac{1}{\cos(x)}$.

Une formule simple relie ces nombres tangents aux valeurs de la fonction zeta de RIEMANN en les nombres entiers : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{b_{2n-1}}{2(4^n - 1)(2n - 1)!} \pi^{2n}$ de sorte qu'on a les jolies relations :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{2}{2(16-1)3!} \pi^4 = \frac{\pi^4}{90}, \zeta(6) = \frac{16}{2(64-1)5!} \pi^6 = \frac{\pi^6}{945}, \zeta(8) = \frac{272}{2(256-1)7!} \pi^8 = \frac{\pi^8}{9450}.$$

Comme on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \zeta(2n) = 1$, on a l'équivalent : $b_{2n-1} \sim \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^n (2n - 1)!$.

10.28 a. On sépare les involutions de $[[1; n + 2]]$: celles qui fixent $n + 2$ au nombre de I_{n+1} (une involution de $[[1; n + 1]]$ induite) et celles qui ne fixent pas $n + 2$ (qui l'échange avec k ($n + 1$ choix) ce qui induit une involution de $[[1; n + 1]] \setminus \{k\}$). Comme $I_n \leq n!$, on a $R \geq 1$.

$$\text{c. } \forall x \in]-1; 1[, (1+x)S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n + nI_{n-1}}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n+1}}{n!} x^n = S'(x).$$

On en déduit, puisque $S(0) = 1$ et en intégrant l'équation différentielle, que $\forall x \in]-1; 1[, S(x) = e^{x + \frac{x^2}{2}}$.

$$\text{d. } \text{Alors } S(x) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k \right) \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j! 2^j} x^{2j} \right) \text{ et comme } R > 0 : I_n = \sum_{i+2j=n} \frac{n!}{i! j! 2^j}, I_{2n} = \sum_{j=0}^n \frac{(2n)!}{(2n-2j)! j! 2^j}.$$

10.29 Ces séries sont absolument convergentes : en effet, si $x \in]-1; 0[\cap]0; 1[$, en notant $u_k = \binom{k}{m} x^{k-m}$, on a

$$\forall k \geq m, \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \frac{k}{k-m+1} |x| \rightarrow |x| < 1 \text{ et on utilise la règle de D'ALEMBERT.}$$

Pour $m = 0$ et $x \in]-1; 1[$, il s'agit d'une simple série géométrique absolument convergente de raison x tel que $|x| < 1$ donc $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^{0+1}}$: c'est bon pour l'initialisation !

Soit $m \geq 0$, supposons que $\forall x \in]-1; 1[, \sum_{k=m}^{+\infty} \binom{k}{m} x^{k-m} = \frac{1}{(1-x)^{m+1}}$. Comme les séries $\sum_{n \geq 0} \binom{n+m}{m} x^n$ et $\sum_{k \geq 0} x^k$ convergent absolument, on peut utiliser le théorème sur le produit de CAUCHY de telles séries.

On obtient la convergence absolue (mais on le savait déjà) de $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{j=0}^n \binom{j+m}{m} \right) x^n$ avec la formule :

$$\forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^n \binom{j+m}{m} \right) x^n = \left(\sum_{n \geq 0} \binom{n+m}{m} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right).$$

Il suffit alors de se rappeler que, par récurrence, on montre $\sum_{j=0}^n \binom{j+m}{m} = \binom{n+m+1}{m+1}$ pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m+1}{m+1} x^n = \sum_{k=m+1}^{+\infty} \binom{k}{m+1} x^{k-m-1} = \frac{1}{(1-x)^{m+2}} \text{ et avoir l'hérédité.}$$

Par principe de récurrence, on a bien $\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1; 1[, \sum_{k=m}^{+\infty} \binom{k}{m} x^{k-m} = \frac{1}{(1-x)^{m+1}}$.

10.30 a. On choisit les p qui ne bougent pas et on dérangement le reste : $N(n, p) = \binom{n}{p} D(n-p)$.

b. $D(n) \leq n!$ donc $R \geq 1$ car $\frac{D(n)}{n!} \leq 1$. Comme $\sum_{p=0}^n N(n, p) = n!$, on a $\sum_{p=0}^n \frac{D(n-p)}{(n-p)!} \times \frac{1}{p!} = 1$. Ainsi, par produit de CAUCHY car le rayon de $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est infini : $e^x f(x) = \frac{1}{1-x}$ donc $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ et en développant le produit de CAUCHY : $\frac{D(n)}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \sim \frac{1}{e}$.

c. Il vient simplement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} N(n, p) = \frac{1}{e \cdot p!}$

10.31 a. Par construction, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq 1$ donc le rayon R' est supérieur à celui de la série $\sum_{n \geq 0} x^n$, ce qui prouve que $R' \geq 1$. De plus, la suite $(b_n)_{n \geq 0}$ ne tend pas vers 0 donc la série $\sum_{n \geq 0} b_n$ diverge donc $R' \leq 1$ car $\sum_{n \geq 1} b_n x^n$ diverge pour $x = 1$. Par conséquent, $R' = 1$.

Comme il existe une infinité de termes de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont supérieurs ou égaux à 1 (il y a une infinité de carrés parfaits), on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge, ce qui prouve que $R \leq 1$. Comme

$a_n = \text{card} \{k \in \llbracket 0; \lfloor \sqrt{n} \rfloor \mid n - k^2 \text{ est un carré parfait} \}$, on a $a_n \leq \sqrt{n} + 1 \leq n + 1$ et comme la série entière $\sum_{n \geq 0} (n+1)x^n$ est de rayon 1, on a $R \geq 1$. Par conséquent, $R = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{\substack{(u,v) \in \llbracket 0; \lfloor \sqrt{n} \rfloor \rfloor^2 \\ u^2 + v^2 = n}} 1 = \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 0; n \rfloor \\ i+j=n}} b_i b_j$ (en posant $i = u^2$ et $j = v^2$) par définition des b_n . Par

exemple, $a_5 = b_0 b_5 + b_1 b_4 + b_2 b_3 + b_3 b_2 + b_4 b_1 + b_5 b_0 = 2$ car $b_2 = b_3 = b_5 = 0$ et $b_0 = b_1 = b_4 = 1$ ce qui correspond aux deux écritures $5 = 1 + 4 (= 1^2 + 2^2 = 2^2 + 1^1) = 4 + 1$. Par produit de CAUCHY de deux séries entières, pour $x \in]-R'; R'[=]-1; 1[$, on a $g(x)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n b_k b_{n-k} = \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 0; n \rfloor \\ i+j=n}} b_i b_j = a_n$. Ainsi, $g(x)^2 = f(x)$ ce qui prouve que $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge pour $x \in]-1; 1[$ (on déduit de ce calcul, indépendamment de ce qui précède, que $R \geq 1$).

b. Si $x \in]0; 1[$, $h_x : t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln(x)}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et on a $h_x(t) = e^{t^2 \ln(x)} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car $\ln(x) < 0$ donc h_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ par comparaison aux intégrales de RIEMANN.

c. En posant $t = \frac{u}{\sqrt{-\ln(x)}} = \varphi(u)$, φ étant une bijection strictement croissante de classe C^1 de \mathbb{R}_+ dans

\mathbb{R}_+ , par changement de variable $\int_0^{+\infty} x^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2 \ln(x)} dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-\pi}{\ln(x)}}$.

Comme la fonction h_x est décroissante sur \mathbb{R}_+ , on a $\forall k \geq 1$, $\int_k^{k+1} h_x(t) dt \leq x^{k^2} = h_x(k) \leq \int_{k-1}^k h_x(t) dt$.

On somme pour k allant de 1 à $+\infty$ (tout converge) donc $\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt \leq g(x) \leq \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt + h_x(0)$. Ainsi :

$g(x) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-\pi}{\ln(x)}}$ d'où l'on déduit que $f(x) \sim \frac{-\pi}{4 \ln(x)}$ car $f(x) = g(x)^2$.

10.32 a. Il est clair que $C_2 = 1$ et on a déjà vu que dans l'énoncé que $C_3 = 2$, $C_4 = 5$. Pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, le nombre de parenthésages d'un mot à n éléments qui scindent les n éléments en k à gauche et $n-k$ à droite (pour la dernière évaluation) vaut $C_k C_{n-k}$ en prenant $C_1 = 1$ (pas le choix pour "arranger" un terme). Comme un parenthésage correct doit couper les n éléments en deux parties non vides, on obtient,

en effectuant une partition, la relation de récurrence : $C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k} = \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k}$ avec $C_0 = 0$.

b. Pour $x \in]-R; R[$, on $C(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} \right) x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} C_n x^n = C(x) - C_1 x - C_0 = C(x) - x$. Ainsi $C(x)$ est racine du polynôme $X^2 - X + x$ dont le discriminant vaut $\Delta = 1 - 4x \geq 0$ puisque $C(x)$ est réel. En posant $R' = \min \left(R, \frac{1}{4} \right) > 0$, on a donc $\forall x \in]-R'; R'[$, $C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$. En posant $f(x) = \frac{2C(x)-1}{\sqrt{1-4x}}$, la fonction f est continue sur $] -R'; R'[$ par opérations et on a $f(x)^2 = 1$ par calculs, ainsi f est constante valant 1 ou -1 sur cet intervalle. Comme $f(0) = -1$, on a $\forall x \in]-R'; R'[$, $f(x) = -1$ donc $C(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$.

c. Réciproquement, soit $D :]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $D(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$. D est développable en série entière sur $] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$ et $D(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n-1)} (-4)^n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2(n!)^2 (2n-1)} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n x^n$ d'après le cours. Mais comme $D(x)^2 - D(x) + x = 0$, par produit de CAUCHY, on a aussi (on en vient) $D_0 = 0$, $D_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $D_n = \sum_{k=0}^n D_k D_{n-k}$. Comme les suites $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient les mêmes conditions initiales

et la même relation de récurrence, elles sont égales : $\forall n \geq 1$, $C_n = D_n = \frac{(2n)!}{2(n!)^2 (2n-1)} = \frac{\binom{2n}{n}}{2(2n-1)}$.

10.6 Développement en série entière

10.33 **a.** On a $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ et $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$.

b. $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \int_0^x \frac{\left(1 - \frac{t}{x}\right)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt < \int_0^y \frac{\left(1 - \frac{t}{y}\right)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$ car $1 - \frac{t}{x} \leq 1 - \frac{t}{y}$ pour $t \in [0; x]$ et que $f^{(n+1)}(t) \geq 0$. On a donc $R_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{y^{n+1}} R_n(y)$ et on conclut par encadrement (x fixé).

c. Ce qui précède prouve que f est développable en série entière sur $[0; \alpha[$ mais comme f est paire ou impaire, elle l'est sur $] -\alpha; \alpha[$.

10.34 Posons $f : x \mapsto \text{sh}(\text{Arcsin } x)$, en dérivant sur $] -1; 1[$, on trouve que f vérifie l'équation différentielle (E) : $(1-x^2)y'' - xy' - y = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Si f est DSE sur $] -R; R[$ avec $0 < R \leq 1$, alors on aurait $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in]-R; R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. En remplaçant dans l'équation, on trouve que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \frac{n^2+1}{(n+2)(n+1)} a_n$

d'où, par récurrence : $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \frac{1}{(2p+1)!} \prod_{k=1}^p ((2k-1)^2 + 1)$.

Réciproquement, par d'ALEMBERT, le rayon de cette série est bien $R = 1$ car si $u_p = a_{2p+1} x^{2p+1}$, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{p+1}}{u_p} \right| = |x|^2$. En remontant les calculs précédents, la fonction : $g : x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1}$ est solution de l'équation différentielle (E) et elle vérifie bien $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$ donc $f = g$ par le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ et f est bien DSE sur $] -1; 1[$ avec le développement ci-dessus.

10.35 **a.** Les fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$ sont DSE sur $] -1; 1[$ avec $\forall x \in]-1; 1[$, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ or ici $\alpha = -\frac{1}{2}$

donc $\binom{\alpha}{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \cdots \times \left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = a_n$.

b. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{b_{n+1}x^{2n+2}}{b_nx^{2n}} = \frac{(2n+3)(2n+2)}{(n+1)^2}x^2 = \frac{2(2n+3)}{(n+1)}x^2 \rightarrow (4x^2)^+$.
D'après D'ALEMBERT, on a convergence si $|x| < \frac{1}{2}$ donc $R \geq \frac{1}{2}$ et divergence si $|x| > \frac{1}{2}$ donc $R \leq \frac{1}{2}$: $R = \frac{1}{2}$.

De plus, pour $x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$, on a $x(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n+1}$ qu'on peut dériver (on le peut à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence) pour avoir la relation $f(x) = \left(x(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

- Il y a divergence quand $x = \pm R$ car $(|b_n R^{2n}|)_{n \geq 0}$ croît (au moins à partir d'un certain rang) d'après **b.**
- Ou aussi par STIRLING : $\frac{b_n}{2^{2n}} = \frac{(2n+1)(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(2n)(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}e^{2n}}{e^{2n}2^{2n}n^{2n}(2\pi n)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$ qui ne tend même pas vers 0 donc $\sum_{n \geq 0} b_n R^{2n}$ et $\sum_{n \geq 0} (-1)^n b_n R^{2n}$ divergent grossièrement.

10.36 a. Le rayon vaut $R = 1$ par les méthodes habituelles. Par RIEMANN, la série converge quand $x = 1$ et quand $x = -1$ donc le domaine de définition D de φ est $[-1; 1]$.

b. En posant $u_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n^2-1}$, on a $\|u_n\|_{\infty, [-1; 1]} = \frac{1}{n^2-1}$ et $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2-1}$ converge donc $\sum_{n \geq 2} u_n$ CVN sur $[-1]$ et comme toutes les u_n sont continues, φ est continue sur $[-1; 1]$.

Si $x \in]-1; 1[$, comme $\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n+1)}$, on a $\varphi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2(n-1)} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2(n+1)}$ donc

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{2} \left(-x - \frac{x^2}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = -\frac{x^2}{2} \ln(1-x) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \ln(1-x).$$

On a donc $\forall x \in]-1; 1[$, $\varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{(1+x)(1-x)}{2} \ln(1-x)$ et par continuité de φ sur $[-1; 1]$, on obtient

$$\varphi(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \frac{3}{4} \text{ et } \varphi(-1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \varphi(x) = \frac{1}{4}.$$

10.37 a. Il s'agit d'une récurrence simple car $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{3}{2}$ et si $1 \leq u_n \leq 2$ pour un entier $n \geq 2$, alors on a simplement $1 \leq 1 + \frac{1}{n+1} \leq u_{n+1} \leq 1 + \frac{3}{n+1} \leq 2$. $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{3}{2}$ puis hérédité simple.

On en déduit successivement que :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ car $u_n = 1 + \frac{2u_{n-1}-1}{n}$ et $(2u_{n-1}-1)_{n \geq 1}$ est bornée.
- $u_n - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$ car $u_n - 1 = \frac{2u_{n-1}-1}{n}$ et $(2u_{n-1}-1)_{n \geq 1}$ tend vers 1.
- $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $u_n - 1 - \frac{1}{n} = 2\frac{u_{n-1}-1}{n}$ et que $u_{n-1} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n-1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

b. Le rayon R de cette série est entre ceux des séries $\sum_{n \geq 0} x^n$ et $\sum_{n \geq 0} 2x^n$ donc $R = 1$. Ou alors $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1$ direct.

Pour $x \in]-1; 1[$, on a $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)u_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. On reconnaît la série géométrique et sa dérivée donc $S'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + 2S(x) - \frac{1}{1-x} = 2S(x) + \frac{x}{(1-x)^2}$.

Classiquement avec variation de la constante : $S(x) = \frac{1}{2} + e^{2x} \int_0^x \frac{te^{-2t}}{(1-t)^2} dt$ et on peut aussi en déduire que S est DSE sur $] -1; 1[$ par produit de CAUCHY et intégration des fonctions DSE.

c. D'après **a.**, comme $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} a + \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$: $\exists A > 0$, $\forall n \geq 1$, $\left|u_n - 1 - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{A}{n^2}$. En sommant ces inégalités

après les avoir multipliées par x^n , on obtient : $\forall x \in]0; 1[$, $\left|S(x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{1-x} + 1 + \ln(1-x)\right| \leq A \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ or

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est bornée au voisinage de 1^- donc $S(x) - \frac{1}{1-x} + \ln(1-x) = O(1)$.

10.38 a. f est clairement continue donc f est de classe C^1 , etc.. : récurrence sur la classe de f .

b. Si f est DSE (avec rayon $R > 0$) et solution de l'équation différentielle, alors $\forall x \in]-R; R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On remplace dans l'équation et on trouve : $\forall x \in]-R; R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} - \alpha a_n - \lambda^n a_n)x^n = 0$ donc par unicité des coefficients dans une série entière de rayon strictement positif : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{\alpha + \lambda^n}{n+1} a_n$.

Réciproquement, si on définit f par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant cette récurrence et par exemple $a_0 = 1$, on a bien $R = +\infty$ avec d'ALEMBERT et f est solution de l'équation en remontant les calculs.

c. Soit $f \in E$ tel que $f(0) = 0$, alors $f'(0) = \alpha f(0) + f(0) = 0$ et, plus généralement, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n+1)}(0) = \alpha f^{(n)}(0) + \lambda^n f^{(n)}(0) = 0$. Soit $a > 0$, alors si on note $M_p = \sup_{x \in [a-; a]} |f^{(p)}(x)|$, on a avec

l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [-a; a]$, $\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{a^{n+1} M_{n+1}}{(n+1)!}$. Mais puisque

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [-a; a]$, $f^{(n+1)}(x) = \alpha f^{(n)}(x) + \lambda^n f^{(n)}(x)$ donc $M_{n+1} \leq (\alpha + 1)M_n$ et donc $M_n \leq (\alpha + 1)^n M_0$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [-a; a]$, $\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{a^{n+1} (\alpha + 1)^{n+1} M_0}{(n+1)!}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, f est DSE sur $[-a; a]$ et $f = 0$ sur $[-a; a]$ pour tout $a > 0$: $f = 0$ sur \mathbb{R} .

d. Si g est une solution quelconque de l'équation, alors posons $h = g - g(0)f$ où f est la solution DSE de la question b. valant 1 en 0. Comme h est de classe C^∞ et vaut 0 en 0 par construction, on a $h = 0$ d'après la question c. car h est solution de l'équation aussi. Ainsi $g = g(0)f$: $E = \text{Vect}(f)$.

10.39 a. Le critère spécial des séries alternées prouve l'existence de $f(x)$ si $x \in]-1; +\infty[$.

Pour $\beta > -1$ et $x \in]\beta; +\infty[$, on a $\left| \frac{p!(-1)^{n+p-1}}{(x+n)^{p+1}} \right| \leq \frac{p!}{(n+\beta)^{p+1}}$ qui est le terme général d'une série convergente d'après RIEMANN ; d'après le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions et par récurrence (comme il y a convergence simple pour f) : f est de classe C^∞ et on a les dérivées successives sous forme de séries de fonctions : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-1; +\infty[$, $f^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p!(-1)^{n+p-1}}{(x+n)^{p+1}}$.

b. Pour $x \in]-1; 1[$, comme $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{k+1}} = a_k = (-1)^k \frac{2^{k+1} - 2}{2^{k+1}} \zeta(k+1)$ (classique), alors

pour $p \in \mathbb{N}$: $\left| f(x) - \sum_{k=0}^p a_k x^k \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{x+n} - \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k x^k}{n^k} \right) \right|$ ce qui amène la majoration

$\left| f(x) - \sum_{k=0}^p a_k x^k \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{x+n} - (-1)^{n-1} \frac{1 - (-x/n)^{p+1}}{x+n} \right) \right| = |x|^{p+1} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(x+n)n^{p+1}} \right| \leq \frac{|x|^{p+1}}{x+1}$ d'où la convergence vers f vers sa série de TAYLOR. On peut aussi utiliser TAYLOR reste intégral.

c. On a facilement : $\forall x > -1$, $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$ donc, comme f continue en 0 et $f(0) = \ln(2)$, on

a $f(x) \sim_{-1+} \frac{1}{x+1}$. De plus, f est décroissante sur $] -1; +\infty[$ car $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2} < 0$ ce qui justifie l'inégalité $\forall x > 0$, $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1} \leq 2f(x) \leq \frac{1}{x} = f(x) + f(x-1)$ donc $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{2x}$.

10.40 Le rayon vaut $R = 1$ par d'ALEMBERT car $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$. Il y a convergence en -1 par le CSSA et

divergence en 1 car alors le terme général de la série est équivalent à $\frac{1}{n}$. Donc convergence sur $[-1; 1[$. Par le

CSSA, si $x \in [-1; 0]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|R_n(x)| = \left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right) x^p \right| \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) x^{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n}$

donc il y a convergence uniforme sur $[-1; 0]$ et donc continuité de la somme sur $[-1; 1]$.

En 1^- , on encadre $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+1}$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$; ainsi, si $x \in [0; 1[$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)x^n = f(x) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ donc $\frac{1}{x}(-\ln(1-x) - x) \leq f(x) \leq -\ln(1-x)$. En terme d'équivalent, cela donne : $f(x) \underset{1^-}{\sim} -\ln(1-x)$. De plus, déjà vu cette année en TD : $f(-1) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

10.41 D'abord la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge car $\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et on utilise RIEMANN ($2 > 1$).

De plus, pour $n \geq 1$, on a $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{(-1)^{2k-2}}{(2k-1)^2} + \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k)^2} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2}$ en séparant les termes d'indice pair et ceux d'indice impair. En notant $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ la somme partielle de la série de RIEMANN pour $\alpha = 2$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Alors $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} = S_{2n} - \frac{1}{2}S_n$ qui tend vers $\frac{\pi^2}{12}$ en $+\infty$. Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

Soit f définie sur $[0; 1]$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ si $x > 0$; f est DSE donc continue sur $[0; 1]$ car

$\forall x \in]0; 1[$, $f(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n-1}$ (valable pour $x = 0$ (clair) et $x = 1$ (classique)).

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0; 1]$, $|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^{k-1} \right| \leq \frac{x^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ donc $\|R_n\|_{\infty, [0; 1]} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ ce qui garantit la convergence uniforme de la série de fonctions sur $[0; 1]$ donc la continuité de f sur $[0; 1]$ (et la formule pour $x = 1$ aussi d'ailleurs). Par convergence uniforme sur un segment, on peut intégrer terme à terme : $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n-1} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n-1} dx \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

10.7 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

10.42 a. Pour $\rho \geq 0$, si P est de degré d , la suite $\left(\frac{P(n)\rho^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 par croissance comparée car

$P(n) = O(n^d)$ donc $P(n)\rho^n = o(\rho+1)^n = o(n!)$. Ainsi $\sum_{n \geq 0} \frac{P(n)}{n!} z^n$ est de rayon $R = +\infty$.

b. La famille $(1, X, X(X-1), \dots, X(X-1) \cdots (X-d+1))$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_d[X]$ de degrés échelonnés, elle est donc une base de $\mathbb{R}_d[X]$ grâce à la dimension.

Si $\deg(P) = 0$, alors $P = a_0 \in \mathbb{Z}$. Si $\deg(P) = 1$, alors $P = a_1 X + a_0$ avec a_0 et a_1 entiers.

Si on suppose que pour un entier d et $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré inférieur ou égal à d , on a $P = \sum_{k=0}^d a_k \prod_{i=0}^{k-1} (X-i)$ avec a_0, \dots, a_d entiers, alors soit $Q \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $d+1$. On écrit $Q = a_{d+1} X^{d+1} + \dots$ avec $a_{d+1} \in \mathbb{Z}$, alors $Q - a_{d+1} \prod_{i=0}^d (X-i)$ est un polynôme à coefficients entiers de degré inférieur à d qu'on peut écrire par

hypothèse de récurrence $\sum_{k=0}^d a_k \prod_{i=0}^{k-1} (X-i)$ avec des entiers a_0, \dots, a_d . Ainsi $Q = \sum_{k=0}^{d+1} a_k \prod_{i=0}^{k-1} (X-i)$ ce qui clôt la récurrence.

Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^d a_k \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) = \sum_{k=0}^d a_k \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) \right) = \sum_{k=0}^d a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!}$ (somme d'un nombre fini de séries numériques convergentes) donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} = \sum_{k=0}^d a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!} = \left(\sum_{k=0}^d a_k \right) e \in \mathbb{Z}e$.

10.43 a. $f_n : x \rightarrow a_n x^n$ est continue sur $[0; R]$ et $\|f_n\|_{\infty, [0; R]} = |a_n| R^n$. Par hypothèse, la série $\sum_{n \geq 0} |a_n| R^n$

converge donc $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[0; R]$ et f est donc continue sur $[0; R]$, donc en R .

b. f est continue sur $]0; 1[$. Si $x \in]0; 1[$, on a $f(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{1}{x} (\ln(1-x) - \ln(1+x))$ donc $f(x) \underset{1^-}{\sim} \ln(1-x) \underset{1^-}{\sim} o\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$ et f est intégrable sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right[$. $f(x) \underset{0}{=} \frac{1}{x} (-x + o(x) - x + o(x)) \underset{0}{\sim} -2$ et f continue sur $[0; 1[$ en posant $f(0) = -2$: f est intégrable sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Par conséquent : $\int_0^1 f(t) dt$ converge.

Pour $x \in]0; 1[$, $f(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = \frac{1}{x} (\ln(1-x) - \ln(1+x)) = -\frac{2}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$. On a donc : $\forall x \in [0; 1[$, $f(x) = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$. Posons alors $g_n : x \mapsto -\frac{2x^{2n}}{2n+1}$.

Les fonctions g_n sont continues sur $[0; 1[$ et $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge simplement vers f qui est continue sur $[0; 1[$.

De plus, $\int_0^1 |g_n| = \frac{2}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{2}{(2n+1)^2}$ converge. Par le théorème d'intégration terme à terme, on

en déduit que f est intégrable sur $[0; 1[$ (ce qu'on savait déjà) et que $\int_0^1 f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$.

c. Comme $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, en séparant les termes pairs et impairs, on montre que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Pour

$x > 1$, $f(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{x-1}{1+x} \right) = \frac{1}{x} (\ln(x-1) - \ln(1+x))$ donc $f(x) \underset{1^+}{\sim} \ln(x-1) \underset{1^+}{\sim} o\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$ donc f est intégrable

sur $]1; 2[$. $f(x) = \frac{1}{x} \left(\ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x^2}$ donc f est intégrable

sur $[2; +\infty[$. f est donc intégrable sur $]1; +\infty[$ d'où sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ ce qui permet d'écrire $\int_0^1 f(t) dt$.

Dans $\int_1^{+\infty} f(t) dt$, on effectue le changement de variable $t = \frac{1}{u} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection strictement décroissante de classe C^1 de $]0; 1[$ dans $]1; +\infty[$: $\int_1^{+\infty} f(t) dt = \int_1^0 f\left(\frac{1}{u}\right) \left(-\frac{1}{u^2}\right) du$.

Enfin : $\int_1^{+\infty} f(t) dt = \int_1^0 u \ln \left(\frac{\frac{1}{u}-1}{1+\frac{1}{u}} \right) \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int_0^1 f(u) du$. Ainsi : $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 2 \int_0^1 f(t) dt = -\frac{\pi^2}{2}$.

10.44 a. Comme la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \geq 0}$ est décroissante et tend vers 0, par le critère spécial des séries alternées,

la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ converge donc $a_n \underset{+\infty}{=} O(1)$. Ainsi, $\frac{a_n}{n!} \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n!}\right)$ et comme le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ vaut $+\infty$, on en déduit que le rayon R de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ vérifie $R \geq +\infty$ donc $R = +\infty$.

b. Avec l'énoncé, $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^k dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-t)^k \right) dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} dt$ par linéarité de l'intégrale. Comme $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$, par inégalité de la moyenne, on majore

$|a_n - \ln(2)| = \left| \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt \right| = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{n+1} dt = \frac{1}{n+2}$. Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ln(2)$.

c. Méthode 1 : pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $|g(x) - \ln(2)| = \left| e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n - e^{-x} \ln(2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right| = e^{-x} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_n - \ln(2)) x^n}{n!} \right|$ donc, comme $|a_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{n+1}$ d'après b., $|g(x) - \ln(2)| \leq e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n - \ln(2)| x^n}{n!} \leq e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$.

Ainsi, $|g(x) - \ln(2)| \leq \frac{e^{-x}}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1-e^{-x}}{x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ln(2)$ puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-e^{-x}}{x} = 0$.

Méthode 2 : (méthode générale dès que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est convergente) Écrivons $a_n = \ln(2) + r_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$. Comme $\frac{r_n}{n!} = o\left(\frac{1}{n!}\right)$, le rayon de $\sum_{n \geq 0} \frac{r_n}{n!} x^n$ vaut aussi $+\infty$. Comme tout converge, en

notant $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r_n x^n}{n!}$, puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(2)}{n!} x^n = \ln(2)e^x$, $g(x) = (\ln(2)e^x + h(x))e^{-x} = \ln(2) + e^{-x}h(x)$.

Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}h(x) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|r_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. De plus, comme

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{n_0} \frac{r_n x^n}{n!} = 0$ par croissances comparées car $x \mapsto \sum_{n=0}^{n_0} \frac{r_n x^n}{n!}$ est polynomiale, il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$

tel que $\forall x \geq x_0$, $\left| e^{-x} \sum_{n=0}^{n_0} \frac{r_n x^n}{n!} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Si $x \geq x_0$, $|e^{-x}h(x)| \leq \left| e^{-x} \sum_{n=0}^{n_0} \frac{r_n x^n}{n!} \right| + e^{-x} \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{|r_n| x^n}{n!} \leq \varepsilon$ car

$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{|r_n| x^n}{n!} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{\varepsilon}{2} e^x$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}h(x) = 0$. Par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ln(2)$.

10.45 Cette série converge par le CSSA. Il est clair que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1}$

est égal à $R = 1$. On pose donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4n+1}$ pour $x \in [-1; 1]$ (cil y a convergence aux bornes).

On sait que f est de classe C^∞ sur $] -1; 1[$. Pour $x \in] -1; 1[$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} = \frac{1}{1+x^4}$.

Comme $1+x^4 = (1+2x^2+x^4) - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$, on peut décomposer en éléments simples cette fraction rationnelle : $\frac{1}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{-x+\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{x+\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right)$.

Ainsi : $f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{-2x+\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\sqrt{2}x-1)^2+1} + \frac{1}{(\sqrt{2}x+1)^2+1} \right)$ et il vient alors

$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{8} \left[-\ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \right]' + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\text{Arctan}(\sqrt{2}x-1) + \text{Arctan}(\sqrt{2}x+1) \right]'$. Comme

$f(0) = 0$, on a donc en intégrant (sur un intervalle), pour un réel x dans $] -1; 1[$:

$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{8} \left[-\ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \right] + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\text{Arctan}(\sqrt{2}x-1) + \text{Arctan}(\sqrt{2}x+1) \right]$.

Comme f est continue en 1 : $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\text{Arctan}(\sqrt{2}-1) + \text{Arctan}(\sqrt{2}+1) \right]$

ce qui donne $f(1) = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln(3+2\sqrt{2}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} \right] = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln(3+2\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

10.46 a. L'équation homogène $(E_0) : \ln(x)y' + \frac{y}{x} = 0$ a pour solutions les fonctions $y_\lambda : x \mapsto \frac{\lambda}{\ln(x)}$ sur $]0; 1[$ et

sur $]1; +\infty[$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ car une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ est $x \mapsto \ln|\ln(x)|$. Par variation de la constante,

on a comme solutions de (E) les fonctions $y_\lambda : x \mapsto \frac{x+\lambda}{\ln(x)}$ sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

b. g se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$. De plus, g est de classe C^∞ sur $] -1; +\infty[$ car elle est développable en série entière sur $] -1; 1[$ avec $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$ (vrai même pour $x = 0$) et qu'elle est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* par opérations. On constate aussi que la fonction g ne s'annule pas sur $] -1; +\infty[$ car \ln ne s'annule qu'en 1 et que $g(0) = 1 \neq 0$.

c. Si y est une solution de (E) sur $]0; +\infty[$, d'après la question a., il existe deux constantes réelles λ_1 et λ_2 telles que $\forall x \in]0; 1[$, $y(x) = \frac{x+\lambda_1}{\ln(x)}$ et $\forall x \in]1; +\infty[$, $y(x) = \frac{x+\lambda_2}{\ln(x)}$. Or la continuité de y en 1 impose

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. On a alors $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$, $y(x) = \frac{x-1}{\ln(x)} = \frac{1}{g(x)-1}$. Mais comme $y(1) = 1$ et $g(0) = 1$,

on a donc $\forall x > 0$, $y(x) = \frac{1}{g(x-1)}$. Réciproquement, cette fonction $y : x \mapsto \frac{1}{g(x-1)}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* d'après la question **b.** et solution de (E) d'après la question **a.**

10.47 a. La suite $\left(\frac{n}{(2n+1)!}x^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour tout réel x par croissance comparée. Ou alors, si $x \neq 0$,

$$\left|\frac{n+1}{(2n+3)!}x^{n+1} \times \frac{(2n+1)!}{nx^n}\right| = \frac{(n+1)|x|}{n(2n+2)(2n+3)} \text{ tend vers } 0 : \text{ le rayon de convergence est } R = +\infty.$$

b. On sait que : $\forall y \in \mathbb{R}$, $\sin(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et $\text{sh}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

c. Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(2n+1)!}$ est $+\infty$. Pour $x > 0$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\text{sh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

d'après **b.** Par contre, si $x < 0$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{-x})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sin(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}$. Et $\Phi(0) = 1$.

d. Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!}x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$. Par dérivation d'une série entière sur le disque ouvert de

$$\text{convergence : } \forall x \in \mathbb{R}, x\Phi'(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{x^{n-1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{(2n+1)!} = f(x).$$

$$\text{Ainsi } f(0) = 0 \text{ et } \forall x > 0, f(x) = x \left(\frac{\text{sh}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{\sqrt{x} \text{ch}(\sqrt{x}) - \text{sh}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{De même, } \forall x < 0, f(x) = x \left(\frac{\sin(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} \right)' = \frac{\sqrt{-x} \cos(\sqrt{-x}) - \sin(\sqrt{-x})}{2\sqrt{-x}}.$$

10.48 a. Pour dénombrer les permutations qui ont k points fixes exactement, on choisit ces points fixes ce qui fait

$\binom{n}{k}$ choix et on doit ensuite choisir une permutation des $n-k$ éléments restants sans point fixe, au nombre

de $A_{n-k,0}$. On obtient donc $A_{n,k} = \binom{n}{k} A_{n-k,0}$.

b. Comme on a $0 \leq A_{n,0} \leq n!$ donc $0 \leq \frac{A_{n,0}}{n!} \leq 1$. Ainsi le rayon R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{A_{n,0}}{n!} z^n$ est

supérieur à celui de $\sum_{n \geq 0} z^n$. Par conséquent $R \geq 1$ donc $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_{n,0}}{n!} z^n$ converge si $|z| < 1$.

c. On partitionne σ_n selon le nombre de points fixes de la permutation et on obtient $n! = \sum_{k=0}^n A_{n,k}$ sachant que $A_{n,1} = 0$ clairement. Comme le rayon de la série exponentielle est égal à $+\infty$, pour tout complexe z tel que $|z| < 1$, par produit de CAUCHY de deux séries entières, on obtient la relation suivante :

$$e^z f(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_{n,0}}{n!} z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{A_{n-k,0}}{k!(n-k)!} \right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}. \text{ Donc } f(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}.$$

Si on avait $R > 1$, alors le rayon de convergence de la série produit de CAUCHY serait au moins égal à R d'après le cours or il vaut 1 (série géométrique). Par l'absurde, on a donc $R = 1$.

d. Encore un produit de CAUCHY et si $|z| < 1$: $f(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) z^n$ donc, par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n,0} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

10.49 a. Par inégalité de la moyenne $|a_n| = \frac{1}{n!} \int_0^1 t \prod_{k=1}^{n-1} (k-t) dt \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 \prod_{k=1}^{n-1} k dt \leq \frac{1}{n}$ dès que $n \geq 1$. Comme

le rayon de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ est égal à 1 (série logarithmique), alors $R \geq 1$.

b. Soit $x \in]-1; 1[$, si on pose $u_n(t) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} (t-k) \right) \frac{x^n}{n!}$, alors on a vu que si $n \geq 2$, on avait la majoration

$\forall t \in [0; 1], |u_n(t)| \leq \frac{|x|^n}{n(n-1)}$ donc la série $\sum_{n \geq 0}$ converge normalement sur $[0; 1]$ et on peut intervertir terme à terme de sorte que $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (t-k)x^n \right) dt = \int_0^1 (1+x)^t dt$ (série entière à connaître par cœur). Ainsi, $S(x) = \left[\frac{(1+x)^t}{\ln(1+x)} \right]_0^1 = \frac{x}{\ln(1+x)}$.

c. Comme à la question a., on a $|a_n| = \frac{1}{n!} \int_0^1 t \prod_{k=1}^{n-1} (k-t) dt \geq \frac{1}{n!} \int_0^1 t(1-t) \prod_{k=2}^{n-1} (k-1) dt = \frac{1}{4n(n-1)}$. Comme le rayon de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{4n(n-1)}$ vaut aussi 1, on a bien $R = 1$.

10.50 a. Soit $f :]-1; 1[\times [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(\alpha, x) = \frac{\ln(1 + \alpha \cos(x))}{\cos(x)}$ avec la valeur $f\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) = \alpha$ qui est un prolongement par continuité puisque $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos(x) = 0$ donc, si $\alpha \neq 1$, $\ln(1 + \alpha \cos(x)) \underset{\pi/2}{\sim} \alpha \cos(x)$.

• $\forall x \in [0; \pi], \alpha \mapsto f(\alpha, x)$ est de classe C^1 sur $] -1; 1[$ (même si $x = \frac{\pi}{2}$).

• $\forall \alpha \in]-1; 1[$, les fonctions $x \mapsto f(\alpha, x)$ et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x) = \frac{1}{1 + \alpha \cos(x)}$ sont continues donc intégrables sur $[0; \pi]$ car $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, \pi/2) = 1 = \frac{1}{1 + \alpha \cdot 0}$ donc $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x) = \frac{1}{1 + \alpha \cos(x)}$ est valable pour tout $x \in [0; \pi]$.

On en déduit que I est de classe C^1 sur $] -1; 1[$ et que $I'(\alpha) = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \alpha \cos(x)}$.

On pose $x = 2 \operatorname{Arctan}(t)$ dans cette intégrale et on obtient classiquement $I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{1 + \alpha + (1 - \alpha)t^2}$.

On calcule encore et on parvient à $I'(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \left[\operatorname{Arctan} \left(t \sqrt{\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$.

b. Comme $f(0) = 0$ et que $] -1; 1[$ est un intervalle : $\forall \alpha \in]-1; 1[, I(\alpha) = \pi \operatorname{Arcsin}(\alpha)$.

c. On connaît le DSE de $\alpha \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$ qu'on intègre pour trouver celui de Arcsin et on a (c'est presque du

cours) : $\forall \alpha \in]-1; 1[, I(\alpha) = \pi \operatorname{Arcsin}(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} \alpha^{2n+1}$. Le rayon de convergence de cette série entière vaut 1 soit parce qu'on le sait, soit en utilisant comme dans le cours la règle de D'ALEMBERT.

On aurait aussi pu faire cette question indépendamment des résultats précédents en écrivant, puisque $\alpha \cos(x) \in]-1; 1[$ pour $\alpha \in]-1; 1[$ et $x \in [0; \pi]$, la relation $\ln(1 + \alpha \cos(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos^n(x) \alpha^n}{n}$. On a

donc $I(\alpha) = \int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos^{n-1}(x) \alpha^n}{n} dx$. On pose $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cos^{n-1}(x) \alpha^n}{n}$ si $n \geq 1$. Comme il

est clair que $\|f_n\|_{\infty, [0; \pi]} = \frac{|\alpha|^n}{n} : \sum_{n \geq 1} \frac{|\alpha|^n}{n}$ converge. On a donc convergence normale de $\sum_{n \geq 1} f_n$ sur le segment $[0; \pi]$ donc $\forall \alpha \in]-1; 1[, I(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n \alpha^n$ en notant $I_n = \int_0^\pi \frac{(-1)^{n+1} \cos^{n-1}(x)}{n} dx$.

Ceci prouve que I est développable en série entière avec un rayon supérieur ou égal à 1. Comme $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, par le changement de variable $x = \pi - t$ dans l'intégrale, on a $I_{2n} = 0$ et $I_{2n+1} = \frac{2W_{2n}}{2n+1}$ où $W_{2n} = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$ est la classique intégrale de WALLIS. Ainsi, par STIRLING ou

directement WALLIS, $|I_{2n+1}| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}$ et le rayon de convergence vaut 1 par croissances comparées.

10.51 a. $\forall x \in]-1; 1[, f_1(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et on dérive $p-1$ fois (on le peut terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence), sachant que $f_1^{(p-1)}(x) = \frac{(p-1)!}{(1-x)^p}$ par une récurrence très classique :

$\forall x \in]-1; 1[, \frac{(p-1)!}{(1-x)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p-1)!}{n!} x^n$ et on divise par $(p-1)!$ pour avoir le développement attendu :

$$\forall x \in]-1; 1[, f_p(x) = \frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{p-1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p-1}{n} x^n = \sum_{n=p-1}^{+\infty} \binom{n}{p-1} x^{n-p+1}.$$

b. Pour $p \geq 0$, il suffit d'écrire que $\forall x \in]-1; 1[, f_{p+2}(x) = f_{p+1}(x) \times f_1(x)$ qui s'écrit aussi d'après la question précédente : $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p+1}{p+1} x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{n} x^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)$. Comme les séries intervenant dans cette formule sont absolument convergentes, on sait que $\forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p+1}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{k+p}{k} \right) x^n$ par produit de CAUCHY. On peut identifier car le rayon commun de ces séries vaut $1 > 0$ et on obtient donc $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{k+p}{k} = \binom{n+p+1}{p+1}$ (déjà vu par ailleurs par récurrence).

10.52 Pour $x \in \mathbb{R}$, par croissances comparées, on a $\left(\frac{x^{4n}}{4n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée si et seulement si $|x| \leq 1$. Ainsi, par

définition du rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{4n}}{4n+1}$, on a $R = 1$. Pour $x = \pm 1$, $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{4n}}{4n+1} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4n+1}$

diverge par comparaison à la série harmonique. Posons $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{4n+1}$, le domaine de définition de

g est donc $D_g =]-1; 1[$. Pour $x \in]-1; 1[, f(x) = xg(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ et on sait d'après le cours que f

est de classe C^∞ sur $] -1; 1[$ avec $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}$. Comme $1-x^4 = (1-x)(1+x)(1-x^2)$,

la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{1-x^4}$ est $\frac{1}{1-x^4} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} + \frac{cx+d}{1+x^2}$. En identifiant par

exemple, on trouve $a = b = \frac{1}{4}, c = 0$ et $d = \frac{1}{2}$. Ainsi, $\forall x \in]-1; 1[, \frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{2(1+x^2)}$.

Ainsi $f'(x) = \left[\frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{4} + \frac{\text{Arctan}(x)}{2} \right]'$, comme $f(0) = 0$, en intégrant, sur l'intervalle $] -1; 1[$,

on a $\forall x \in]-1; 1[, f(x) = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{4} + \frac{\text{Arctan}(x)}{2}$.

On en conclut que $g(0) = 1$ et que $\forall x \in]-1; 0[\cup]0; 1[, g(x) = \frac{1}{4x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \frac{\text{Arctan}(x)}{2x}$.

10.53 **a.** Pour $n \geq 1$, on partitionne les involutions σ de $\llbracket 1; n+2 \rrbracket$ en deux catégories :

- celles pour lesquelles $\sigma(n+2) = n+2$ sont au nombre de I_{n+1} car il n'y a pas de choix à faire pour $\sigma(n+2)$ qu'on impose égal à $n+2$, ensuite σ induit alors sur $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ une involution de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$.
- celles telles que $\sigma(n+2) = k \neq n+2$ sont au nombre de $(n+1)I_n$ car pour les choisir de manière bijective, il y a $n+1$ choix pour l'entier k qui est l'image de $n+2$ par σ et, une fois ce choix effectué, cela implique que $\sigma(k) = \sigma(\sigma(n+2)) = n+2$ car σ doit être une involution, et on a alors I_n choix pour finir de déterminer σ qui doit induire sur $\llbracket 1; n+1 \rrbracket \setminus \{k\}$ une involution de cet ensemble à n éléments.

Cette partition implique la relation $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$ pour $n \geq 1$ et, comme $I_2 = 2 = 1 + 1 \cdot 1 = I_1 + 1 \cdot I_0$ avec la convention choisie pour I_0 , on a bien : $\forall n \geq 0, I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

b. Comme les involutions sont des permutations et qu'il y a $n!$ permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$, on en déduit que $I_n \leq n!$ d'où $0 \leq \frac{I_n}{n!} \leq 1$. Comme la série entière $\sum_{n \geq 0} x^n$ a pour rayon 1, par comparaison, on a $R \geq 1$.

c. Les calculs qui suivent sont valides car le rayon de convergence R est supérieur à 1 : pour $x \in]-1; 1[, on a $(1+x)\varphi(x) = \varphi(x) + x\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n + nI_{n-1}}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n+1}}{n!} x^n = \varphi'(x)$.$

d. On en déduit en intégrant l'équation différentielle linéaire du premier ordre mise sous forme normalisée

sans second membre, comme une primitive de $x \mapsto 1+x$ est $x \mapsto x + \frac{x^2}{2}$ sur l'intervalle $] -1; 1[$, que l'on a $\forall x \in] -1; 1[$, $\varphi(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$ puisque $\varphi(0) = I_0 = 1$ par convention.

e. Alors $\forall x \in] -1; 1[$, $\varphi(x) = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} x^i \right) \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j! 2^j} x^{2j} \right)$. Ces deux séries ont pour rayon $+\infty$ donc on peut effectuer le produit de CAUCHY et obtenir $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i+2j=n} \frac{n!}{i! j! 2^j} \right) x^n$. En identifiant (par unicité) les coefficients entre les deux expressions de $S(x)$ sous forme de série entière, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{I_n}{n!} = \sum_{i+2j=n} \frac{1}{i! j! 2^j}$ donc $I_n = \sum_{i+2j=n} \frac{n!}{i! j! 2^j}$. Puisque $2j \leq n$ et $i = n - 2j$, on a la formule $I_n = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2j)! j! 2^j}$.

Pour expliquer cette relation de manière combinatoire, on peut constater qu'une involution σ de $\llbracket 1; n \rrbracket$ est une application telle que pour tout entier x entre 1 et n , on a deux choix :

- soit $\sigma(x) = x$ et x est appelé un point fixe de σ .
- soit $\sigma(x) = y \neq x$ et alors, comme $\sigma^2 = \text{id}_{\llbracket 1; n \rrbracket}$, on a forcément $\sigma(y) = x$.

Ainsi, si $\sigma \in A_n$, le nombre f de points fixes de σ a la même parité que n de sorte qu'il existe $2j$ entiers de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui ne sont pas fixes par σ avec $f = n - 2j$ avec $0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. On peut donc écrire $A_n = \bigcup_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n,j}$ où

$A_{n,j} = \{\sigma \in A_n \mid \sigma \text{ admet } f = n - 2j \text{ points fixes}\}$.

Pour construire une involution σ de $A_{n,j}$:

- on choisit les $n - 2j$ éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui sont fixes par σ : $\binom{n}{n-2j} = \binom{n}{2j}$ choix.
- on choisit l'image y du plus petit élément x qui reste : $(2j-1)$ choix (et alors $\sigma(x) = y$ et $\sigma(y) = x$).
- on choisit l'image t du plus petit élément z qui reste : $(2j-3)$ choix etc...

Ainsi $\text{card}(A_{n,j}) = \binom{n}{2j} \times (2j-1) \times (2j-3) \times \dots \times 3 \times 1 = \frac{n!}{(n-2j)!(2j)!} \times \frac{(2j)!}{2^j j!}$ en multipliant en haut et en bas

par les termes pairs qui manquent. On retrouve bien $I_n = \text{card}(A_n) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \text{card}(A_{n,j}) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2j)! 2^j j!}$.

10.54 a. Comme \tan est strictement positive sur $]0; \frac{\pi}{4}[$, $\forall n \geq 0$, $u_n > 0$. De plus, $\forall x \in]0; \frac{\pi}{4}[$, $0 < \tan(x) < 1$ donc $\tan^{n+1}(x) < \tan^n(x)$ et $u_{n+1} < u_n$ en intégrant. La suite de fonctions $(\tan^n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $]0; \frac{\pi}{4}[$ et on a la domination par la fonction constante égal à 1 sur l'intervalle. Par théorème de convergence dominée, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Ainsi, par le CSSA, $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ converge.

b. Comme $\tan' = 1 + \tan^2$, on a $u_{n+2} + u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x) \tan'(x) dx = \left[\frac{\tan^{n+1}(x)}{n+1} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}$. Comme $u_{n+2} \leq u_n$, on a $2u_n \geq u_n + u_{n+2} = \frac{1}{n+1}$. Comme la série harmonique diverge, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge donc $R \leq 1$. Mais $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ converge donc $R \geq 1$. Enfin : $R = 1$.

c. À nouveau, $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n^2} u_n$ converge d'après a. car n^2 a la même parité que n : $R' \geq 1$.

d. Si $x \in] -1; 1[$, posons $f_n : t \mapsto \tan^n(t) x^n$, alors $\|f_n\|_{\infty, [0; \pi/4]} = |x|^n$ et $\sum_{n \geq 0} |x|^n$ converge (série géométrique). Ainsi, par convergence normale sur un segment, on peut intervertir série et intégrale et

avoir : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/4} f_n = \int_0^{\pi/4} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1-x \tan(t)} dt$. On pose $u = \tan(t)$ et on a classiquement $f(x) = \int_0^1 \frac{du}{(1-xu)(1+u^2)} = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{1+x^2} \times \frac{1}{1-xu} + \frac{x}{1+x^2} \times \frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{1+x^2} \times \frac{1}{1+u^2} \right) du$ en décomposant en éléments simples.

$$\text{Ainsi } f(x) = \frac{1}{1+x^2} \left[\operatorname{Arctan}(u) + \frac{x}{2} \ln(1+u^2) - x \ln(1-xu) \right]_0^1 = \frac{\pi + 2x \ln(2) - 4x \ln(1-x)}{4(1+x^2)}.$$

e. En posant $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \tan^k(t)$, on a $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $0 \leq \tan(t) < 1$ donc $|R_n(t)| \leq \tan^{n+1}(t)$ par le CSSA. En intégrant cette inégalité : $\left| \int_0^{\pi/4} R_n(t) dt \right| = \left| \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{1+\tan(t)} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \tan^k(t) \right) dt \right| \leq u_{n+1}$.

Ainsi : $\left| \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k - \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1+\tan(t)} \right| \leq u_{n+1}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 0$, on en déduit, en posant à nouveau le changement de variable $u = \tan(t)$, que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{1+\tan(t)} = \frac{\pi + 2 \ln(2)}{8} \sim 0,57$.

10.55 a. Il est clair que $0 \leq W_n \leq \frac{\pi}{2}$ donc le rayon R est supérieur à celui de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{\pi x^n}{2}$ qui vaut

clairement 1 donc $R \geq 1$. Par le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - \theta$, on trouve $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(\theta) d\theta$ et on sait, par concavité de la fonction \sin sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, que $\forall \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(\theta) \geq \frac{2\theta}{\pi}$. En élevant à la puissance n et en intégrant, on trouve $W_n \geq \frac{\pi}{2(n+1)}$ donc R est inférieur au rayon de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{\pi x^n}{2(n+1)}$ qui vaut aussi classiquement 1. On a au final $R = 1$.

b. Par le TCD (avec domination par 1), comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n(t) = 0$ si $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$. Comme la suite $(W_n)_{n \geq 0}$ est aussi décroissante par croissance de l'intégrale, $\sum_{n \geq 0} (-1)^n W_n$ converge par le CSSA.

Comme $W_n \geq \frac{\pi}{2(n+1)}$ et que la série harmonique diverge, $\sum_{n \geq 0} W_n$ diverge.

c. Soit $x \in]-1; 1[$, posons $f_n : t \rightarrow \cos^n(t)x^n$, alors $\|f_n\|_{\infty, [0; \pi/2]} = |x|^n$ donc la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction $S : t \mapsto \frac{1}{1-x \cos(t)}$. De plus, toutes les fonctions f_n et même S sont continues sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on sait que ceci implique l'intégration terme à terme (la convergence uniforme suffirait) : $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t) dt = \int_0^{\pi/2} S(t) dt$.

On calcule cette intégrale par le changement de variable habituel issu des règles de BIOCHE (hors programme néanmoins) $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ et on trouve $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n = \int_0^1 \frac{2du}{1-x+(1+x)u^2}$ qui s'intègre avec les techniques usuelles en $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n = \left[\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} u\right) \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$.

10.56 a. Si on avait $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n\theta) = 0$, on aurait alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin((n+1)\theta) = 0$. Mais comme on sait que

$$\sin((n+1)\theta) = \sin(\theta) \cos(n\theta) + \cos(\theta) \sin(n\theta), \text{ on a } \sin(\theta) \cos(n\theta) = \sin((n+1)\theta) - \cos(\theta) \sin(n\theta) \text{ donc}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\theta) \cos(n\theta) = 0$. Mais comme $\sin(\theta) \neq 0$ puisque $\theta \in]0; \pi[$ par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n\theta) = 0$. On aurait alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin^2(n\theta) + \cos^2(n\theta)) = 0^2 + 0^2 = 0$ ce qui est impossible puisque $\sin^2(n\theta) + \cos^2(n\theta) = 1$.

On conclut ce raisonnement par l'absurde : la suite $(\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

b. D'après la question a., $\sum_{n \geq 0} \sin(n\theta) 1^n$ diverge grossièrement, comme $\sum_{n \geq 0} \sin(n\theta) z^n$ diverge pour $z = 1$,

on a donc $R \leq 1$. De plus, comme $|\sin(n\theta)| \leq 1$ et que le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} z^n$ vaut 1, on déduit du cours que $R \geq 1$. Au final, $R = 1$.

c. Si $|z| = 1$, on a $|\sin(n\theta)z^n| = |\sin(n\theta)|$ d'où $\sum_{n \geq 0} \sin(n\theta)z^n$ diverge grossièrement avec $\mathbf{a.}$

d. Si $|z| < 1$, $\sum_{n \geq 0} \sin(n\theta)z^n$ converge absolument car $R = 1$ et $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} z^n$ par la formule d'EULER classique puis $S(z) = \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (ze^{i\theta})^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (ze^{-i\theta})^n \right)$ avec DE MOIVRE donc on obtient $S(z) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 - ze^{i\theta}} - \frac{1}{1 - ze^{-i\theta}} \right) = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})z}{2i(1 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})z + z^2)} = \frac{z \sin(\theta)}{1 - 2z \cos(\theta) + z^2}$.

10.57 a. On calcule $a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{24}, a_4 = 0, a_5 = -\frac{1}{240}$. On constate que $\forall n \in \llbracket 0; 5 \rrbracket, |a_n| \leq 1$.

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, |a_k| \leq 1$, alors par inégalité triangulaire, on obtient la majoration $|a_{n+1}| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{|a_{n-k}|}{k!} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq \frac{e-1}{2} \leq 1$. Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq 1$.

Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, la suite $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour $|x| \leq 1$ donc $R \geq 1$.

b. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, les séries $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n!}$ convergent absolument (car le rayon de la série exponentielle vaut $+\infty$) et on a par produit de CAUCHY : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{k!} \right) z^n$ ce qui revient à $S(z)(e^z - 1) = -2(S(z) - 1)$ qui s'écrit aussi $S(z)(e^z + 1) = 2$. Ceci prouve que $e^z \neq -1$ et qu'on a la relation attendue $S(z) = \frac{2}{e^z + 1}$. Si on avait $R > \pi$, on aurait pu prendre $z = i\pi$ dans le calcul précédent et ceci contredirait la condition $e^z + 1 \neq 0$. Ainsi, $R \leq \pi$.

c. Si $x \in \left] -\frac{R}{2}; \frac{R}{2} \right[$, $|2ix| < R \leq \pi$ donc, d'après la question b., $S(2ix) = \frac{2}{e^{2ix} + 1}$ d'où, par les formules d'EULER, $1 - S(2ix) = \frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1} = i \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})} = i \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = i \tan(x)$.

d. On sait déjà que $R \leq \pi$. Pour $x \in \left] -\frac{R}{2}; \frac{R}{2} \right[$, $i \tan(x) = 1 - S(2ix) = - \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n i^n a_n x^n$ car $a_0 = 1$ et $|2ix| < R$ donc $\tan(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n i^{n-1} a_n x^n$. Ainsi, \tan est développable en série entière sur $\left] -\frac{R}{2}; \frac{R}{2} \right[$ et, par imparité de \tan , on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{2n} = 0$.

Par conséquent, $\tan(x) = - \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{2n+1} i^{2n} a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{2n+1} (-1)^{n+1} a_{2n+1} x^{2n+1}$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2n+1} (-1)^{n+1} a_{2n+1} = \frac{\tan^{2n+1}(0)}{(2n+1)!}$. Par exemple, si $n = 0$, $-2a_1 = \tan'(0) = 1$.

Soit $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\tan(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\tan^{2k+1}(0)x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1} \tan^{2n+2}(t)}{(2n+1)!} dt$ par la formule de TAYLOR reste intégral. Or, pour $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, $\tan(x) = P_0(\tan(x))$ et $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = P_1(\tan(x))$ avec $P_0 = X$ et $P_1 = X^2 + 1$. Si on suppose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, que $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x))$ avec P_n un polynôme de degré $n+1$ et de coefficients entiers naturels, alors $\tan^{(n+1)}(x) = \tan'(x)P'_n(\tan(x)) = P_{n+1}(\tan(x))$ avec $P_{n+1} = (1+X^2)P'_n(X)$ qui est bien de degré $n+2$ et de coefficients entiers naturels. On conclut que principe de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x))$ avec $P_n \in \mathbb{N}[X]$ et $\deg(P_n) = n+1$.

Ainsi, $\forall x \in [0; \pi/2[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1} \tan^{2n+2}(t)}{(2n+1)!} dt \geq 0$ donc $0 \leq \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\tan^{2k+1}(0)x^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq \tan(x)$. Les

sommes partielles de cette série numérique à termes positifs étant majorées, $\sum_{n \geq 0} \frac{\tan^{2n+1}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ converge.

Or $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2n+1}(-1)^{n+1}a_{2n+1} = \frac{\tan^{2n+1}(0)}{(2n+1)!}$ d'où la convergence de $\sum_{n \geq 0} ia_{2n+1}(2ix)^{2n+1}$. La série

$\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge donc en $2ix$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ce qui assure que $R \geq \pi$. Au final, $R = \pi$. La fonction

\tan est développable en série entière sur $]\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{2n+1}(-1)^{n+1}a_{2n+1}x^{2n+1}$.

10.58 $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n)!}$ converge car, par croissances comparées, $\frac{1}{(3n)!} = o\left(\frac{1}{n!}\right)$ et que la série exponentielle converge.

Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} = \cosh(1) = \frac{e^1 + e^{-1}}{2}$ et qu'on utilise $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$ pour le calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}$, on peut

penser à utiliser les racines troisièmes de l'unité pour le calcul de $S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$. Comme on sait que

$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, on a déjà $e^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!}$ donc $e^1 = S_0 + S_1 + S_2$ en

posant $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!}$ et $S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!}$.

Mais on a aussi $e^j = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{3n}}{(3n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{3n+1}}{(3n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{3n+2}}{(3n+2)!} = S_0 + jS_1 + j^2S_2$ car $j^3 = 1$. De

plus, $e^{j^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{6n}}{(3n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{6n+2}}{(3n+1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{6n+4}}{(3n+2)!} = S_0 + j^2S_1 + jS_2$ car $j^4 = j$.

Cela donne un système trois équations/trois inconnues mais, comme on sait que $1 + j + j^2 = 0$, il suffit de

sommer ces trois relations pour avoir $3S_0 = e + e^j + e^{j^2}$ donc $S_0 = \frac{e + e^j + e^{j^2}}{3} = \frac{e + e^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i\sqrt{3}}{2}} + e^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\sqrt{3}}{2}}}{3}$

car $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2$. Ainsi, $S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3} \left(e + \frac{2}{\sqrt{e}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right) \sim 1,168$.

De même, on aurait $3S_1 = e + j^2e^j + je^{j^2}$ et $3S_2 = e + je^j + j^2e^{j^2}$.

10.59 a. Notons R le rayon de convergence $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ où $a_n = \ln\left(\frac{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}\right) = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Or $a_n \underset{+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Comme $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$, pour $z \neq 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_{n+1}z^{n+1}| |a_n z^n| = |z|$.

Si $|z| < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ converge d'après D'ALEMBERT donc $R \geq 1$.

Mais, toujours avec D'ALEMBERT, si $|z| > 1$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge donc $R \leq 1$. Ainsi, $R = 1$.

b. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le CSSA, si $u_n \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge par RIEMANN et enfin $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge toujours d'après RIEMANN. Par somme $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge.

De plus $(-1)^n a_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. À nouveau, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge et si

$u_n \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$. Par somme $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ diverge. L'intervalle de convergence de S est $] -1; 1[$.

10.60 Soit $a_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$ et $x \neq 0$, alors $\left| \frac{a_{n+1}x^{2n+2}}{a_n x^{2n}} \right| = \frac{(2n+3)(2n+2)}{(n+1)^2} |x|^2$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{2n+2}}{a_n x^{2n}} \right| = 4x^2$.

Si $|x| > \frac{1}{2}$, alors $\sum_{n \geq 0} a_n x^{2n}$ diverge grossièrement par la règle de D'ALEMBERT donc $R \leq \frac{1}{2}$.

Si $|x| < \frac{1}{2}$, alors $\sum_{n \geq 0} a_n x^{2n}$ converge absolument par la règle de D'ALEMBERT donc $R \geq \frac{1}{2}$. Ainsi $R = \frac{1}{2}$.

Méthode 1 : pour $n \geq 0$, on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(2n+3)}{n+1}$ donc $(n+1)a_{n+1} = 2(2n+3)a_n$. On essaie de faire intervenir des termes du type $a_n x^{2n}$ (qui vont donner $S(x)$) ou des termes du type $2(n+1)a_{n+1}x^{2n+1}$ ou $2na_n x^{2n-1}$ (qui vont donner $S'(x)$). On écrit donc $2(n+1)a_{n+1} = 8na_n + 12a_n$.

Pour $x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$, comme tout converge : $\sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^{2n+1} = 8 \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{2n+1} + 12 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$ qui s'écrit encore $\sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^{2n+1} = 4x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (2n)a_n x^{2(n-1)} + 12x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$. On reconnaît enfin $S'(x) = 4x^2 S'(x) + 12x S(x)$. S est donc solution de l'équation (E) : $(1-4x^2)y' = 12xy$ sur $]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ avec la condition $S(0) = 1$. Comme une primitive de $x \mapsto \frac{12x}{1-4x^2}$ est la fonction $x \mapsto -\frac{3}{2} \ln(1-4x^2)$, on en déduit avec la condition initiale $S(0) = 1$ que $\forall x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$, $S(x) = (1-4x^2)^{-3/2}$.

Méthode 2 : en notant T la primitive de S sur $]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ qui s'annule en 0, par intégration terme à terme, on a $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$ et on reconnaît presque un développement classique en série entière : $\forall t \in]-1; 1[$, $\frac{1}{\sqrt{1+t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} t^n$. Pour $x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$, en posant $t = -4x^2 \in]-1; 0[\subset]-1; 1[$, $\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} (-4)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^{2n}$, ce qui montre que $T(x) = \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} = x(1-4x^2)^{-1/2}$. Il suffit de dériver pour avoir, comme par la méthode précédente, $S(x) = T'(x) = (1-4x^2)^{-1/2} + 4x^2 x (1-4x^2)^{-3/2} = (1-4x^2 + 4x^2)(1-4x^2)^{-3/2} = (1-4x^2)^{-3/2}$.

10.61 Comme $\frac{x^n}{n(n+1)(2n+1)} \sim_{+\infty} \frac{x^n}{2n^3}$ si $x \neq 0$, par croissances comparées, la suite $\left(\frac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}\right)_{n \geq 1}$ est bornée si et seulement si $x \in [-1; 1]$ donc le rayon de convergence de cette série entière vaut $R = 1$. Si $x = \pm 1$, $\frac{x^n}{n(n+1)(2n+1)} = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ donc $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}$ converge absolument par RIEMANN. Ainsi, l'ensemble de définition de f est $I = [-1; 1]$.

La fraction $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ se décompose en éléments simples $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$.

En réduisant au même dénominateur, $a(n+1)(2n+1) + bn(2n+1) + cn(n+1) = 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ ce qui donne, par identification, $2a + 2b + c = 3a + b + c = a - 1 = 0$ donc $a = 1$, $b = 1$ et $c = -4$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$. Pour tout $x \in]-1; 1[$, comme $|x| < R$ et que les trois

séries convergent, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.

On reconnaît des développements en série entière classiques du cours : $\forall x \in]-1; 1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ et

$\forall x \in]0; 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\ln(1+\sqrt{x}) - \ln(1-\sqrt{x}) - 2\sqrt{x} \right) = \frac{\text{Argh}(\sqrt{x}) - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ et

$\forall x \in]-1; 0[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{-x})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\text{Arctan}(\sqrt{-x}) - \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$. Ainsi, $f(0) = 0$ et :

- Si $x \in]0; 1[$, $f(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{x} \left(-\ln(1-x) - x \right) - \frac{2}{\sqrt{x}} \left(\ln \left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) - 2\sqrt{x} \right)$.

- Si $x \in]-1; 0[$, $f(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{x} \left(-\ln(1-x) - x \right) - \frac{4}{\sqrt{-x}} \left(\operatorname{Arctan}(\sqrt{-x}) - \sqrt{-x} \right)$.

De plus, en notant $u_n(x) = \frac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}$, $\|u_n\|_{\infty, [-1;1]} = \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^3}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge par RIEMANN donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur $[-1; 1]$ d'où la continuité de f sur le segment $[-1; 1]$.

Pour $x \in]0; 1[$, en écrivant $1-x = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$ et avec les propriétés de \ln , on trouve la nouvelle expression $f(x) = 3 - \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x} \ln(1+\sqrt{x}) - \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x} \ln(1-\sqrt{x})$. Puisque $\lim_{y \rightarrow 0^+} y^2 \ln(y) = 0$, et comme on sait que $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, on trouve $f(1) = 3 - 4 \ln(2) \sim 0,23$. Pour obtenir cette valeur, en notant

$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, on aurait pu transformer $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1}$ ce qui donne en rajoutant et en enlevant les termes pairs, $S_n = H_n + H_{n+1} - 1 - 4 \left(\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - 1 \right) + 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$ et $S_n = 3 + 4H_n - 4H_{2n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$ et on termine en sachant que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

De même, $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1 - \pi + 4 = 3 - \pi \sim -0,14$ avec la relation ci-dessus.

10.62 a. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty$, la série $\sum_{n \geq 1} \ln(n)$ diverge donc $R \leq 1$ car $\sum_{n \geq 1} \ln(n)x^n$ diverge pour $x = 1$. Si $|x| < a < 1$, par croissances comparées, on a $\ln(n)x^n \underset{+\infty}{=} o(a^n)$ et la série géométrique $\sum_{n \geq 1} a^n$ converge donc $\sum_{n \geq 1} \ln(n)x^n$ converge par comparaison et $R \geq 1$. Ainsi $R = 1$.

b. Comme $\forall n \geq 2$, $\ln(n) \geq \ln(2)$, pour $x \in [0; 1[$, $\ln(n)x^n \geq \ln(2)x^n$ donc $S(x) \geq \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(2)x^n = \frac{\ln(2)x^2}{1-x}$ en sommant. Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(2)x^2}{1-x} = +\infty$, on a par minoration la limite $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = +\infty$.

Une preuve plus générale en se servant seulement du fait que $\forall n \geq 1$, $\ln(n) \geq 0$ et que $\sum_{n \geq 1} \ln(n)$ diverge : toutes les $x \mapsto \ln(n)x^n$ sont croissantes sur $[0; 1[$ donc S est aussi croissante sur $[0; 1[$. Par le théorème de la limite monotone, la fonction S admet donc une limite ℓ en 1^- qui est finie ou qui vaut $+\infty$.

Posons $S_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n \ln(k)x^k$ les sommes partielles qui sont polynomiales donc continues. Comme $S_n \leq S$ sur $[0; 1[$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} S_n(x) = S_n(1) \leq \ell$ (même si cette limite est infinie). Or $S_n(1) = \sum_{k=1}^n \ln(k)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1) = +\infty$. Ainsi l'inégalité $S_n(1) \leq \ell$ montre que ℓ ne peut pas être finie. Au final : $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = +\infty$.

c. Comme $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante et continue sur \mathbb{R}_+^* , on a les inégalités $\forall k \geq 1$, $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$ (1) et $\forall k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$ (2). En sommant (1) pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et (2) pour $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, on obtient l'encadrement $\ln(n+1) \leq H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$ par CHASLES. En multipliant par x^n pour $x \in [0; 1[$ et en sommant ces inégalités, on trouve $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n+1)x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$. Or, par produit de CAUCHY, $\forall x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x} = \frac{\ln(1-x)}{x-1}$. Ce qui donne, puisque $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n+1)x^n = \frac{S(x)}{x}$, l'encadrement $\frac{\ln(1-x)}{x-1} - \frac{1}{1-x} \leq S(x) \leq \frac{x \ln(1-x)}{x-1}$. Par théorème d'encadrement, puisque $\frac{\ln(1-x)}{x-1} - \frac{1}{1-x} \underset{1^-}{\sim} \frac{x \ln(1-x)}{x-1} \underset{1^-}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{x-1}$, nous avons établi que $S(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{\ln(1-x)}{x-1}$.

10.63 a. On note S_n l'ensemble de toutes les permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$. On sait que $\text{card}(S_n) = n!$. On partitionne (ou plutôt on partage) S_n selon le nombre de points fixes des permutations. Notons donc $S_{n,k}$ l'ensemble des permutations de S_n qui ont exactement k points fixes. Alors $S_n = \bigcup_{k=0}^n S_{n,k}$ (réunion disjointe) avec $S_{n,n-1} = \emptyset$ car si une permutation a au moins $n-1$ points fixes, c'est forcément l'identité donc elle a en fait n points fixes. On a donc $\forall n \geq 1, \text{card}(S_n) = n! = \sum_{k=0}^n A_n(k) = \sum_{k=0}^n \text{card}(S_{n,k})$.

Pour dénombrer $S_{n,k}$, on choisit les k points fixes parmi les éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ ce qui fait $\binom{n}{k}$ choix ; ensuite on choisit une permutation des $n-k$ éléments restants sans point fixe, elles sont au nombre de $A_{n-k}(0)$ par définition (le nombre de dérangements, c'est le nom des permutations de $S_{n,0}$, ne dépend que du nombre d'éléments de l'ensemble qu'on "dérange"). On obtient donc $\text{card}(S_{n,k}) = A_n(k) = \binom{n}{k} A_{n-k}(0)$.

Pour $n=0$, on a $0! = A_0(0) = \sum_{k=0}^0 A_0(k) = 1$ par convention et $A_0(0) = \binom{0}{0} A_{0-0}(0) = 1$ donc les formules sont valables aussi pour $n=0$.

b. Comme $S_{n,0} \subset S_n$, on a $0 \leq A_n(0) \leq n!$ donc $0 \leq \frac{A_n(0)}{n!} \leq 1$. On sait d'après le cours que le rayon R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{A_n(0)}{n!} z^n$ est alors supérieur à celui de $\sum_{n \geq 0} z^n$. Comme $\sum_{n \geq 0} z^n$ est de rayon de convergence 1, on a $R \geq 1$ donc $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n(0)}{n!} z^n$ converge si $|z| < 1$.

c. Comme le rayon de convergence de la série exponentielle est égal à $+\infty$, si $|z| < 1$, par produit de CAUCHY de deux séries absolument convergentes, $e^z f(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n(0)}{n!} z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{A_{n-k}(0)}{k!(n-k)!} \right) z^n$. Or $\sum_{k=0}^n \frac{A_{n-k}(0)}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_{n-k}(0) = 1$ d'après a.. Ainsi, $e^z f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. À nouveau, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} z^n$ vaut 1 et d'après le cours sur le rayon de convergence d'un produit de CAUCHY de deux séries entières, $1 \geq \text{Min}(R, +\infty)$ ce qui donne $R \leq 1$ et, au final, $R = 1$.

De plus, si $|z| < 1$, on a $f(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}$. On effectue encore un produit de CAUCHY et si $|z| < 1$, il vient à nouveau par produit de CAUCHY, $f(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) z^n$ donc, par unicité des coefficients d'une série entière de rayon non nul, on a $\forall n \in \mathbb{N}, A_n(0) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

d. Avec ces notations de l'énoncé, $p_n = \frac{A_n(0)}{n!}$ donc $p_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ qui est la somme partielle de la série exponentielle associée à e^{-1} . Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{e} \sim 0,36$.

10.64 a. Soit $x \in]-1; 1[$, alors $g_x : t \mapsto \frac{\ln(1+xt)}{t}$ est continue sur $]0; 1]$ car $\forall t \in [0; 1], 0 < 1-|x| \leq 1+xt \leq 1+|x|$. Si $x=0$, g_x est nulle sur $]0; 1]$ et si $x \neq 0$, comme $\ln(1+xt) \sim xt$, g_x se prolonge par continuité en 0 en posant $g_x(0) = x$. Ainsi g_x est intégrable sur $]0; 1]$ donc $g(x)$ est bien défini. Ainsi $] -1; 1[\subset \mathcal{D}_g$.

b. Si $|x| < 1$, on a $|xt| < 1$ pour $t \in [0; 1]$ donc $\ln(1+xt) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n t^n}{n}$. Ainsi $g(x) = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t) \right) dt$ avec $g_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = (-1)^{n-1} \frac{x^n t^{n-1}}{n}$ car $\forall t \in [0; 1], g_x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)$. Comme

$\|g_n\|_{\infty, [0;1]} = \frac{|x|^n}{n}$ et que $\sum_{n \geq 1} \frac{|x|^n}{n}$ converge car $|x| < 1$, la série $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge normalement vers g_x sur le segment $[0; 1]$ donc on peut intervertir et avoir $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 g_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

c. En tant que somme d'une série entière de rayon $R = 1$ (car $\left(\frac{x^n}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ est bornée si et seulement si $|x| \leq 1$ par croissances comparées), la fonction g est C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence $] - 1; 1[$ et $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} \frac{1}{n}$. On reconnaît, pour $x \in] - 1; 0[\cup] 0; 1[$, $g'(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

d. Posons $f :] 0; 1[\times] 0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{\ln(1+xt)}{t}$ de sorte que $g(x) = \int_0^1 f(x, t) dt$.

• Pour $x \in] 0; 1[$, $t \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur $] 0; 1[$.

• Pour $t \in] 0; 1[$, $t \mapsto f(x, t) = g_x(t)$ est continue et intégrable sur $] 0; 1[$ (on vient de le voir). De plus, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{1+xt}$ est continue sur $] 0; 1[$.

• Pour $(x, t) \in] 0; 1[\times] 0; 1[$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 1 = \varphi(t)$ et φ est continue et intégrable sur $] 0; 1[$.

Par dérivation sous le signe somme, g est C^1 sur $] 0; 1[$ et $g'(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+xt} = \left[\frac{\ln(1+xt)}{x} \right]_0^1 = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Pourtant, la meilleure méthode est, pour $x \neq 0$, d'effectuer le changement de variable $t = \frac{u}{x}$ dans l'intégrale

$g(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t} dt$ pour avoir $g(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+u)}{u} du$ et tout est limpide par le théorème fondamental de l'intégration car $u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ est continue sur $] - 1; 1[$.

10.65 a. La fonction $f : x \mapsto x + e^{-x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+ et $f'(x) = 1 - e^{-x} \geq 0$ (f' ne s'annule qu'en 0). Or $f(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi, f réalise une bijection strictement croissante de \mathbb{R}_+ dans $[1; +\infty[$. Par conséquent, pour tout entier $n \geq 1$, $\exists! x_n \geq 0$, $f(x_n) = e^{x_n} - x_n = n$. Par exemple $x_1 = 0$.

b. Pour $n \geq 1$, comme $e^{-n} > 0$, $f_n(x_n) = n \leq f_n(n)$ d'où $x_n < n$ par stricte croissance de f . De plus, $f(n-1) = n-1 + e^{-(n-1)} \leq n$ car $e^{-(n-1)} \leq 1$. À nouveau, $n-1 \leq x_n$. Au final, $\forall n \geq 1$, $x_n \in [n-1; n[$.

c. D'après la question précédente, $\forall n \geq 1$, $0 < a_n = n - x_n \leq 1$. Comme le rayon de $\sum_{n \geq 1} x^n$ vaut $1 : R \geq 1$.

Mieux, comme $a_n = n - x_n = e^{-x_n}$, on a d'après **b.** l'encadrement $e^{-n} \leq a_n \leq e \times e^{-n}$. Comme les rayons des deux séries $\sum_{n \geq 1} e^{-n} x^n$ et $\sum_{n \geq 1} e \cdot e^{-n} x^n$ valent clairement $R' = e$, on a d'après le cours $R = e$.

$a_n e^n = (n - x_n) e^n = e^{-x_n} e^n = e^{n-x_n} = e^{a_n}$. Comme $a_n \geq 0$, on a $e^{a_n} \geq 1$ donc $\sum_{n \geq 1} a_n e^n$ et $\sum_{n \geq 1} a_n (-e)^n$ divergent grossièrement. L'intervalle de convergence de cette série est $] - e; e[$.

10.66 a. Par croissances comparées, la suite $\left(\frac{x^n}{4n+1}\right)_{n \geq 0}$ est bornée si et seulement si $|x| \leq 1$. Ainsi, $R = 1$.

De plus, $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{4n+1}$ diverge d'après RIEMANN car $\frac{1}{4n+1} \sim \frac{1}{4n}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4n+1}$ converge par le CSSA car la suite $\left(\frac{1}{4n+1}\right)_{n \geq 0}$ est décroissante et tend vers 0. L'intervalle de convergence de cette série vaut $[-1; 1[$.

b. Posons $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{4k+1}$. Comme $\frac{1}{4k+1} = \int_0^1 t^{4k} dt$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a par linéarité de l'intégrale :
 $|S_n - I| = \left| \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n t^{4k} - \frac{1}{1+t^4} \right) dt \right| = \left| \int_0^1 \left(\frac{1 - (-t^4)^{n+1}}{1+t^4} - \frac{1}{1+t^4} \right) dt \right| = \int_0^1 \frac{t^{4n+4}}{1+t^4} dt \leq \int_0^1 t^{4n+4} dt$
donc $|S_n - I| \leq \frac{1}{4n+5}$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = I = S(-1) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^4}$.

c. $1 + X^4 = X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2 = (X^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}X)^2 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$.

On sait qu'alors, il existe quatre constantes a, b, c, d telles que $\frac{1}{X^4+1} = \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1}$.
On procède par identification et on trouve $a = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $d = \frac{1}{2}$.

d. Ainsi, $\frac{1}{1+t^4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{2t+2\sqrt{2}}{t^2+2\sqrt{2}t+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1}$. On en déduit classiquement que $S(-1) = \left[\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left(\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}t+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}(\sqrt{2}t-1) \right]_0^1$.

Il vient donc $S(-1) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1) + \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \sim 0,867$.

10.67 a. On calcule les premiers termes : $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{7}{24}$. Soit $A(n) = \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, 0 < a_k \leq 1$.

Initialisation : $0 < a_0 = 1 \leq 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A(n)$ soit vraie, alors $0 < a_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+2}$ par hypothèse, donc $0 < a_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1 = \frac{n+1}{n+1} = 1$. Par principe de récurrence que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, 0 < a_k \leq 1$.

Ainsi, le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est supérieur à celui de $\sum_{n \geq 0} x^n$, d'où $R \geq 1$.

b. Comme $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge donc L existe et $L = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

c. f est de classe C^∞ sur $] -1; 1[$. Pour $x \in] -1; 1[$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} (n+1) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2} x^n$. Or $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+2} x^n$ est de rayon 1. Par produit de CAUCHY, $\forall x \in] -1; 1[$, $f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} x^n \right)$.

d. Pour $x \in]0; 1[$, posons $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} x^n = \frac{1}{x^2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} x^{n+2} \right) = -\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$. f est solution sur $]0; 1[$ de l'équation différentielle $y' = g(x)y$ dont les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{G(x)}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et G est une primitive sur $]0; 1[$ de g . On trouve par intégration par parties que $G : x \mapsto -\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)+x}{x}$ convient. De plus, comme les a_n sont strictement positifs, f est strictement positive sur $]0; 1[$ donc $\lambda > 0$ et $\ln(f(x)) = \ln(\lambda) - \ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)+x}{x}$. En faisant tendre x vers 0^+ , on trouve que $\ln(\lambda) = 0$ donc on a la relation $\forall x \in]0; 1[, \ln(f(x)) = -\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)+x}{x}$.

Ainsi, $\ln \left(f\left(\frac{1}{2}\right) \right) = \ln(2) + 2 \left(-\ln(2) + \frac{1}{2} \right) = 1 - \ln(2)$ d'où $L = e^{1-\ln(2)} = \frac{e}{2} \sim 1,36$.

10.68 a. Posons les deux sommes partielles associées : $S_n = \sum_{k=0}^n x_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^n y_k$.

- Si $\sum_{n \geq 0} x_n$ converge, alors la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (vers S). Or $S'_n = S_{2n+1}$ donc $(S'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers S en tant que suite extraite d'une suite convergente donc $\sum_{n \geq 0} y_n$ converge.
- Si $\sum_{n \geq 0} y_n$ converge, alors la suite $(S'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (vers S'). Or $S_{2n+1} = S'_n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = S'$ et $S_{2n} = S_{2n+1} - x_{2n+1} = S'_n - x_{2n+1}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = S'$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n+1} = 0$ par hypothèse. Par conséquent, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers S' et $\sum_{n \geq 0} x_n$ converge.

Ainsi, $\sum_{n \geq 0} x_n$ et $\sum_{n \geq 0} y_n$ sont de même nature et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ en cas de convergence.

b. Comme $a_n \sim \frac{1}{4n^2}$, la suite $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée si et seulement si $\left(\frac{x^n}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée, c'est-à-dire

si et seulement si $|x| \leq 1$ par croissances comparées. Ainsi, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est $R = 1$. De plus, $\sum_{n \geq 1} a_n$ est absolument convergente par RIEMANN donc f est définie aussi en ± 1 . Le domaine de définition D de f vaut donc $D = [-1; 1]$.

c. Si $x \in]0; 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{2n} - \frac{x^n}{2n+1} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ (les deux séries convergent) donc $f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = -\frac{1}{2} \ln(1-x) - \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) - \sqrt{x} \right)$.

d. Les $u_n : x \mapsto \frac{x^n}{2n(2n+1)}$ sont continues sur $[-1; 1]$ et $\|u_n\|_{\infty, [-1; 1]} = \frac{1}{2n(2n+1)}$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[-1; 1]$ par RIEMANN. Ainsi, f est continue sur $[-1; 1]$ donc $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Comme $f(x) = 1 - \frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \ln(1+\sqrt{x}) + \frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \ln(1-\sqrt{x})$ car $1-x = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$, on trouve $f(1) = 1 - \ln(2)$ par croissances comparées. Or $f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} \right) = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ d'après a. en posant $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ car on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$. En identifiant, on a bien $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

10.69 a. Comme h est de classe C^∞ sur J , par la formule de TAYLOR reste intégral, on a, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$

et tout réel $x \in J$, la relation $R_N(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} h^{(N+1)}(t) dt$.

b. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $0 < x < y < a$, $\frac{R_N(x)}{x^{N+1}} = \frac{1}{N!} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^N h^{(N+1)}(t) dt \leq \frac{1}{N!} \int_0^y \left(1 - \frac{t}{y}\right)^N h^{(N+1)}(t) dt$ car $1 - \frac{t}{x} \leq 1 - \frac{t}{y}$ pour $t \in [0; x]$ et que $h^{(N+1)}(t) \geq 0$. On a donc $R_N(x) \leq \frac{x^{N+1}}{y^{N+1}} R_N(y) = \left(\frac{x}{y}\right)^{N+1} R_N(y)$.

c. Soit $y \in]0; a[$ et $x \in]0; y[$, alors comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^{N+1} = 0$, on a par encadrement $\lim_{N \rightarrow +\infty} R_N(x) = 0$ d'après b.. Ainsi, h est développable en série entière sur $[0; a[$ donc sur $] - a; a[$ par parité ou imparité de h .

d. La fonction \tan est de classe C^∞ sur $] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. \tan et $\tan' = 1 + \tan^2$ sont positives sur $[0; \frac{\pi}{2}[$. Soit $n \geq 1$ tel que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\tan^{(k)}$ est positive sur $[0; \frac{\pi}{2}[$. Alors, d'après la formule de LEIBNIZ en dérivant n fois la relation $\tan' = 1 + \tan^2$, on obtient $\tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$ donc $\tan^{(n+1)}$ est positive sur $[0; \frac{\pi}{2}[$. Par principe de récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\tan^{(n)}$ est positive sur $[0; \frac{\pi}{2}[$. Par conséquent, d'après la question précédente, \tan est développable en série entière sur $] - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Question de cours : la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon R converge normalement sur tout segment inclus dans son intervalle ouvert $] - R; R[$ de convergence (si $R > 0$ bien sûr). Si $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ converge, $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge normalement sur $[-R; R]$ car si $u_n : x \mapsto a_n x^n$, on a $\|u_n\|_{\infty, [R; R]} = |a_n|$ et que $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge absolument.

10.70 a. On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x)}{x} = \text{Arctan}'(0) = 1$ donc h se prolonge par continuité en 0 en posant $h(0) = 1$.

Comme h est continue par opérations sur \mathbb{R}^* car Arctan l'est, la fonction h est maintenant continue sur \mathbb{R} .

b. On sait que, si $x \in] - 1; 1[$, $\text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ donc, pour $x \in] - 1; 0[\cup]0; 1[$, on a la relation $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$. Cette relation est aussi vraie pour $x = 0$ car $\frac{(-1)^0}{2 \cdot 0 + 1} = 1 = h(0)$. Ainsi, h est bien DSE sur $] - 1; 1[$ et la rayon de cette série entière est classiquement $R = 1$ car $\left(\frac{x^{2n}}{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et

seulement si $|x| \leq 1$ par croissances comparées.

c. Comme h est paire, il suffit de vérifier que la décomposition de h en série entière est valable sur $[0; 1]$, c'est-à-dire en 1 puisque on vient de le voir sur $[0; 1[$ à la question précédente.

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge par le CSSA car $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0.

Posons $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$, alors pour $x \in [0; 1]$, $|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2n+3}$ par le CSSA donc $\|R_n\|_{\infty, [0; 1]} \leq \frac{1}{2n+3}$ ce qui prouve la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} u_n$ vers h sur $[0; 1]$. Comme toutes

les u_n sont continues sur $[0; 1]$, on a $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Or h est continue sur \mathbb{R} donc

$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1) = \frac{\pi}{4}$. Puisque $\forall x \in [0; 1[$, $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$, on trouve en identifiant $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Ainsi, $\forall x \in [0; 1]$, $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$. Par parité, cette relation est valable sur $[-1; 1]$.

d. La fonction $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $H(x) = \int_0^x h(t)dt$ est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction h qui est continue sur \mathbb{R} . Ainsi, $H'(0) = h(0) = 1$. Ceci se traduit par $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{H(x) - H(0)}{x - 0} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ce qui nous permet de prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

e. Puisque H est de classe C^1 sur \mathbb{R} en tant que primitive de h , la fonction f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* par

opérations avec $f'(x) = \frac{h(x)}{x} - \frac{1}{x^2} \int_0^x h(t)dt = \frac{xh(x) - \int_0^x h(t)dt}{x^2} = \frac{1}{x^2} \int_0^x (h(x) - h(t))dt$ si $x \neq 0$. Comme

h est C^1 , $h(x) - h(t) = (x - t)h'(c)$ par le théorème des accroissements finis et $|h'(c)| \leq \|h'\|_{\infty, [0; x]} = m_x$.

Par l'inégalité de la moyenne, $|f'(x)| \leq \frac{1}{x^2} \left| \int_0^x |x - t| m_x dt \right| = \frac{m_x}{2}$. Or h' étant continue en 0 et $h'(0) = 0$, il

vient $\lim_{x \rightarrow 0} m_x = 0$. Ainsi, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ donc, par le théorème de prolongement C^1 , f est dérivable en 0, $f'(0) = 0$ et f' est continue en 0. Par conséquent, la fonction f est bien de classe C^1 sur \mathbb{R} .

f. Comme h est DSE sur $] -1; 1[$, $\forall x \in] -1; 1[$, $\int_0^x h(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n t^{2n}}{2n+1} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$

(intégration terme à terme). Ainsi, $\forall x \in] -1; 1[$, si $x \neq 0$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)^2}$. Or, comme $f(0) = 1$, cette relation marche aussi si $x = 0$ donc f est DSE sur $] -1; 1[$.

10.71 Puisque la fonction \sin est 1-lipschitzienne car $|\sin'| = |\cos| \leq 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq |a|^n |x|$.

Comme $|a| < 1$, la série $\sum_{n \geq 0} |a|^n |x|$ converge donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge absolument et la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} . Ainsi F_a est définie sur \mathbb{R} .

(H₁) La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} vers F_a .

(H₂) Toutes les fonctions f_n sont de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

(H₃) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n^{(p)}(x) = a^{np} \sin\left(a^n x + p \frac{\pi}{2}\right)$ donc $f_n^{(p)}$ est bornée sur \mathbb{R} et $\|f_n^{(p)}\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq |a|^{np}$

(on a même égalité). Or la série géométrique $\sum_{n \geq 0} |a|^{np}$ converge car $|a| < 1$, donc la série $\sum_{n \geq 0} f_n^{(p)}$ converge normalement sur \mathbb{R} .

Par un théorème du cours, F_a est de classe C^∞ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_a^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{np} \sin\left(a^n x + p \frac{\pi}{2}\right)$.

On en déduit que $F_a^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{np} \sin\left(p \frac{\pi}{2}\right)$ donc $F_a^{(p)}(0) = 0$ si p est pair et, si $p = 2k + 1$, on trouve

$$F_a^{(2k+1)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n(2k+1)} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k a^{n(2k+1)} = \frac{(-1)^k}{1-a^{2k+1}}.$$

D'après le cours, F_a est développable en série entière sur \mathbb{R} si et seulement si le reste intégral d'ordre k , à savoir $\frac{1}{k!} \int_0^x (x-t)^k F_a^{(k+1)}(t) dt$, tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$ pour tout réel x . Or, par inégalité de la moyenne, $\left| \frac{1}{k!} \int_0^x (x-t)^k F_a^{(k+1)}(t) dt \right| \leq \frac{1}{k!} \left| \int_0^x |x-t|^k |F_a^{(k+1)}(t)| dt \right|$. Avec l'expression de $F_a^{(k+1)}(t)$ vue avant, et $|F_a^{(k+1)}(t)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n(k+1)} \sin\left(a^n t + (k+1)\frac{\pi}{2}\right) \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^{n(k+1)} = \frac{1}{1-|a|^{k+1}}$. On arrive donc à la majoration $\left| \frac{1}{k!} \int_0^x (x-t)^k F_a^{(k+1)}(t) dt \right| \leq \frac{1}{k!(1-|a|^{k+1})} \left| \int_0^x |x-t|^k dt \right| = \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!(1-|a|^{k+1})}$ car, $x-t$ étant de signe constant sur $[\widetilde{0}; x]$, on a $\left| \int_0^x |x-t|^k dt \right| = \left| \int_0^x (x-t)^k dt \right| = \left| \left[-\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1} \right]_0^x \right| = \frac{|x|^{k+1}}{k+1}$. Par croissances comparées, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!(1-|a|^{k+1})} = 0$, donc F_a est bien développable en série entière sur \mathbb{R} et, étant égale à sa série de FOURIER, on a $\forall x \in \mathbb{R}, F_a(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!(1-a^{2p+1})}$ grâce à ce qui précède.

Comme la fonction \sin est développable en série entière sur \mathbb{R} , $F_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k a^{n(2k+1)} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)$.

Or la famille $\left(\frac{(-1)^k a^{n(2k+1)} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable car, par sommation par paquets, on a le calcul

$$\begin{aligned} \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} \frac{|a|^{n(2k+1)} |x|^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|a|^{n(2k+1)} |x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!(1-|a|^{2k+1})} < +\infty \text{ car si } x \neq 0, \\ \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!(1-|a|^{2k+1})} &\sim_{+\infty} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} \text{ et que } \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} = \operatorname{sh}(|x|) < +\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, on peut développer en série entière $F_a(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^{n(2k+1)} \right) \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!(1-a^{2k+1})}$.

10.72 a. Soit $x \in \mathbb{R}$, comme $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 donc $\frac{a_n x^n}{n!} = o\left(\frac{x^n}{n!}\right)$. Or, par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{n!} = 0$ et le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n x^n}{n!}$ est donc $R = +\infty$.

b. La fonction $g : t \mapsto f(t)e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+ car f l'est en tant que somme de série entière de rayon infini. De plus, $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n e^{-t}}{n!}$. On pose $u_n : t \mapsto \frac{a_n t^n e^{-t}}{n!}$ de sorte que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement vers g sur \mathbb{R}_+ . Les u_n sont continues sur \mathbb{R}_+ comme la fonction g . De plus, u_n est intégrable sur \mathbb{R}_+ car $t^n e^{-t} = o(e^{-t/2})$. Enfin, $\int_0^{+\infty} |u_n| = \int_0^{+\infty} \frac{|a_n| t^n e^{-t}}{n!} dt = \frac{|a_n|}{n!} \Gamma(n+1) = |a_n|$ et la série $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ converge par hypothèse. Ainsi, par le TITT, on a $\int_0^{+\infty} g = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

10.73 Posons $a_n = n^{(-1)^n}$, alors $0 \leq \frac{1}{n} \leq a_n \leq n$ (considérer n pair et n impair) et les séries entières $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ et $\sum_{n \geq 0} nx^n$ ont classiquement pour rayon 1 car $(nx^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| < 1$ et $\left(\frac{x^n}{n}\right)_{n \geq 1}$ est bornée si et seulement si $|x| \leq 1$. Ainsi, le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} n^{(-1)^n} x^n$ vérifie $1 \geq R \geq 1$ d'après le cours : $R = 1$. De plus, comme $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas bornée, l'intervalle de convergence est $] -1; 1[$.

En séparant termes pairs et impairs, on a $\forall x \in] -1; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2nx^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Comme $\forall x \in] -1; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, en dérivant et en multipliant par x : $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ donc

$\sum_{n=0}^{+\infty} 2nx^{2n} = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}$. On sait que $\forall x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$ et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x)$.

En sommant : $\forall x \in]-1; 1[$, $2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) (= \operatorname{Argth}(x))$.

On pouvait aussi écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} x^{2n}$ en séparant termes d'indices pairs et impairs et on reconnaît $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1-x^2) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(1+x)^2}{1-x^2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) (= \operatorname{Argth}(x))$.

On pouvait aussi, pour $x \in]-1; 1[$, intégrer terme à terme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \right) dt$ (car $[0; x]$ est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence) : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{ddt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.

Ainsi, $\forall x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.

10.74 a. Il est archi-classique que $X^2 + 2\cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$ avec la formule d'EULER.

b. Comme les racines de $X^2 + 2\cos(\theta)X + 1$ sont complexes non réelles, la fonction f est bien définie sur \mathbb{R} .

Identifions : $\frac{1}{1+2x\cos(\theta)+x^2} = \frac{a}{x-e^{i\theta}} + \frac{b}{x-e^{-i\theta}} = \frac{(a+b)x - (ae^{-i\theta} + be^{i\theta})}{1+2x\cos(\theta)+x^2}$ d'après la question a..

On résout le système $a+b = ae^{-i\theta} + be^{i\theta} + 1 = 0$ pour avoir $a = -b = \frac{1}{2i\sin(\theta)}$. On peut donc conclure

que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2i\sin(\theta)(x-e^{i\theta})} - \frac{1}{2i\sin(\theta)(x-e^{-i\theta})}$.

c. Si $|x| < 1$, en écrivant $f(x) = \frac{1}{2i\sin(\theta)} \left(\frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}} - \frac{e^{-i\theta}}{1-xe^{-i\theta}} \right)$, comme $|xe^{i\theta}| < 1$ et $|xe^{-i\theta}| < 1$, on

trouve $f(x) = \frac{1}{2i\sin(\theta)} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta})$ en utilisant les séries géométriques ce qui donne le

développement $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} x^n$ en série entière. Si le rayon R de cette série était strictement

supérieur à 1, la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} z^n$ de la variable complexe aurait le même rayon donc la

fonction $g : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} z^n$ serait continue sur $B(0, R)$ donc en particulier en $z = e^{i\theta}$ ce qui est

impossible puisqu'en remontant les calculs, on a $g(z) = \frac{1}{2i\sin(\theta)(z-e^{i\theta})} - \frac{1}{2i\sin(\theta)(z-e^{-i\theta})}$ et g ne peut

pas être continue en $e^{i\theta}$. Ainsi, le rayon de $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} x^n$ vaut exactement $R = 1$.

10.75 Posons $u_n = \frac{2n^2+3n+1}{2^{n+1}}$, par croissances comparées, $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2^n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge par

comparaison aux séries de RIEMANN. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, comme $(2n^2+3n+1)x^n \underset{+\infty}{\sim} 2n^2x^n$, toujours par croissances

comparées, la suite $((2n^2+3n+1)x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| < 1$ donc le rayon de convergence

de $\sum_{n \geq 0} (2n^2+3n+1)x^n$ vaut $R = 1$. Posons donc $\forall x \in]-1; 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n^2+3n+1)x^n$.

On écrit $2n^2+3n+1 = 2(n+2)(n+1) - 3(n+1)$ pour avoir $f(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$

(les deux séries convergent) donc $f(x) = 2\left(\frac{1}{1-x}\right)'' - 3\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{4}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} = \frac{1+3x}{(1-x)^3}$. Enfin,

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (2n^2+3n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1+(3/2)}{(1/8)} = 10$.

10.76 a. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction $f : t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ est continue sur le segment $[\widetilde{x}; 3x]$ donc F est bien définie sur

\mathbb{R}^* . Comme f est impaire sur \mathbb{R}^* , $F(-x) = \int_{-x}^{-3x} \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_x^{3x} \frac{\cos(-u)}{-u} (-du) = F(x)$ par le changement de variable $t = -u$ facile à justifier. Ainsi, F est paire.

b. Comme $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, on a $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{t}{2} + o(t)$ ce qui signifie que $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{t}{2} + t\varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha < 0$ tel que $\forall t \in]-\alpha; \alpha[\setminus \{0\}$, $|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon$. Alors, si $x \neq 0$ mais $|x| < \frac{\alpha}{3}$, on a $\left| \int_x^{3x} (f(t) - \frac{1}{t} - \frac{t}{2}) dt \right| \leq \left| \int_x^{3x} \varepsilon t dt \right| = 4\varepsilon x^2$. On en déduit donc que $F(x) = \ln(3) - 2x^2 + o(x^2)$.

On pouvait invoquer la primitivation des DL en calculant $F'(x) = 3 \frac{\cos(3x)}{3x} - \frac{\cos(x)}{x}$ et son DL d'ordre 1. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \ln(3)$ et on peut donc prolonger F par continuité en 0 en posant $F(0) = \ln(3)$. De plus, le DL précédent montre que F ainsi prolongée est dérivable en 0 avec $F'(0) = 0$.

c. Soit $x > 0$, par une intégration par parties facile, on obtient $F(x) = \left[\frac{\sin(t)}{t} \right]_x^{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ et $\left| \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \right| \leq \int_x^{3x} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x} = \frac{2}{3x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sin(t)}{t} \right]_x^{3x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt = 0$ par la majoration précédente, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$. Par parité de F , $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

d. Soit $x \neq 0$, alors $F(x) = \int_x^{3x} \frac{1}{t} dt + \int_x^{3x} \frac{\cos(t) - 1}{t} dt = \ln(3) + \int_x^{3x} \frac{\cos(t) - 1}{t} dt$. Or $t \mapsto \frac{\cos(t) - 1}{t}$ est développable en série entière avec un rayon infini et $\frac{\cos(t) - 1}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n)!}$ donc, en intégrant terme à terme, on a $\forall x \neq 0$, $F(x) = \ln(3) + \int_x^{3x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n)!} dt = \ln(3) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n ((3x)^{2n} - x^{2n})}{(2n)(2n)!}$. C'est aussi vrai si $x = 0$ donc F est développable en série entière sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \ln(3) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (3^{2n} - 1)}{(2n)(2n)!} x^{2n}$.

10.77 L'hypothèse de l'énoncé montre que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc que $a_n = o(1)$. Comme le rayon de $\sum_{n \geq 1} x^n$ vaut 1, le rayon R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vérifie $R \geq 1$ ce qui justifie l'existence de la fonction f sur $] -1; 1[$.

a. On constate d'abord, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \mathbb{N}$, que :

- si $i \geq n$, alors $1 - \frac{i}{n} \leq 0 \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i$ donc $1 - \frac{i}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i$ est vérifié.

- si $i = 0$, $1 - \frac{i}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i = 1$ donc $1 - \frac{i}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i$ est à nouveau vrai.

- si $i = 1$, $1 - \frac{i}{n} = 1 - \frac{1}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^1$ donc $1 - \frac{i}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i$ est encore valide.

Ceci nous conduit à effectuer une récurrence sur $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. L'initialisation vient d'être faite.

Soit $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ tel que $1 - \frac{i}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i$. Alors $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{i+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ donc, puisque $1 - \frac{1}{n} \geq 0$, l'hypothèse de récurrence montre que $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{i+1} \geq \left(1 - \frac{i}{n}\right) \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{i+1}{n} + \frac{i}{n^2} \geq 1 - \frac{i+1}{n}$ et l'hérédité est établie. Par principe de récurrence, on a donc $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{i}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i$.

b. Pour $n \geq 1$, en décomposant la somme et par inégalité triangulaire, comme la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i$ est absolue puisque $\left|1 - \frac{1}{n}\right| < R$ et comme $f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i = \sum_{i=0}^n a_i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i +$

$\sum_{i=n+1}^{+\infty} a_i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i$, d'après la question précédente

$$\begin{aligned} \left| \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| &= \left| \sum_{i=0}^n a_i \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i\right) + \sum_{i=n+1}^{+\infty} a_i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n |a_i| i + \sum_{i=n+1}^{+\infty} |a_i| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i \end{aligned}$$

Comme la suite $(i|a_i|)_{i \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 par hypothèse, le théorème de CESARO (hors programme mais à savoir re-démontrer) permet d'affirmer que la suite des moyennes arithmétiques $\left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n |a_i| i\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend aussi vers 0. Or comme $n+1 \sim n$, on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n |a_i| i = 0$. De plus, cette même suite étant bornée, on peut majorer $\forall i \geq n+1, i|a_i| \leq \sup_{j \geq n+1} j|a_j| = M_n$ ce qui donne

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty} |a_i| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{M_n}{i} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i \leq \frac{M_n}{n+1} \sum_{i=n+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i = \frac{M_n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} \times \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

et on conclut enfin que $\sum_{i=n+1}^{+\infty} |a_i| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i \leq \frac{nM_n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq M_n$. Mais puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 0$, on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0$ ce qui montre qu'on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=n+1}^{+\infty} |a_i| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i = 0$.

Grâce à la majoration précédente, on peut conclure par encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\sum_{i=0}^n a_i \right) - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right) = 0$.

c. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$ et que f admet une limite finie, disons ℓ , quand x tend vers 1, en composant on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \ell$. En notant $S_n = \sum_{i=0}^n a_i$ la somme partielle de $\sum_{n \geq 0} a_n$, ce qui précède montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0 + \ell = \ell$ car $S_n = \left(S_n - f\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) + f\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Ainsi, $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.

10.78 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, $g_x : t \mapsto \frac{t^x}{1+t}$ est continue et positive sur $]0; 1]$ car $g_x(t) = \frac{e^{x \ln(t)}}{1+t}$. De plus, $g_x(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{-x}}$

donc, par RIEMANN, g_x est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $-x < 1 \iff x > -1$. Ainsi, comme g_x est positive, $F(x)$ est défini si et seulement si $x > -1$, d'où $D =]-1; +\infty[$.

b. Posons $f :]-1; +\infty[\times]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{t^x}{1+t}$.

- Pour $t \in]0; 1]$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^∞ sur $] -1; +\infty[$.
- Pour $x \in]-1; +\infty[$, $t \mapsto f(x, t) = g_x(t)$ est continue et intégrable sur $]0; 1]$ (on vient de le voir).
- Pour $x \in]-1; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \frac{\partial^{k_f}}{\partial x^k}(x, t) = \frac{(\ln t)^k t^x}{1+t}$ est continue sur $]0; 1]$ et, si $a \in]-1; +\infty[$, on a la majoration $\forall x \in [a; +\infty[$, $\forall t \in]0; 1]$, $\left| \frac{\partial^{k_f}}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \frac{|\ln t|^k t^a}{1+t} = \varphi_a(t)$ avec φ_a continue et intégrable sur $]0; 1]$ d'après RIEMANN car, par croissances comparées, on a $\varphi_a(t) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{1-a}{2}}}\right)$ et $\frac{1-a}{2} < 1$.

D'après un théorème du cours, F est de classe C^∞ sur $] -1; +\infty[$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x > -1$, $F^{(k)}(x) = \int_0^1 \frac{(\ln t)^k t^x}{1+t} dt$.

c. Pour $x \in]-1; 1[$, $F(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \ln(t)^n}{n!} \right) dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \ln(t)^n}{n!(1+t)} \right) dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \frac{x^n \ln(t)^n}{n!(1+t)}$.

- La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement vers g_x sur $]0; 1]$ (on en vient).

- Les fonctions f_n et g_x sont continues sur $]0; 1]$. f_n est intégrable sur $]0; 1]$ car $f_0(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_n(t) = 0$ pour $n \geq 1$ par croissances comparées.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |f_n(t)| dt \leq \frac{|x|^n}{n!} \int_0^1 |\ln(t)|^n dt$. Posons $J_n = \int_0^1 (\ln(t))^n dt$. On effectue une intégration par parties avec $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto (\ln(t))^n$, u et v sont C^1 sur $]0; 1]$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc $J_n = [t \ln^n t]_0^1 - \int_0^1 t \cdot \frac{n \ln^{n-1} t}{t} dt = -n J_{n-1}$. Par une récurrence, simple, comme $J_0 = 1$ et $J_1 = [t \ln(t) - t]_0^1 = -1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = (-1)^n n!$. On aurait aussi pu poser le changement de variable $t = \varphi(x) = e^{-x}$ avec φ bijection strictement décroissante et de classe C^1 de \mathbb{R}_+^* sur $]0; 1]$ pour avoir, après calculs, $J_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = (-1)^n \Gamma(n+1) = (-1)^n n!$ (classique). Ainsi, $\int_0^1 |f_n(t)| dt \leq |x|^n$ et $\sum_{n \geq 0} |x|^n$ car $|x| < 1$ (série géométrique).

Alors, $F(x) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \ln(t)^n}{n!(1+t)} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^n \ln(t)^n}{n!(1+t)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ par le théorème d'intégration terme à terme en posant $a_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)^n}{n!(1+t)} dt$. Ainsi, F est développable en série entière sur $] -1; 1[$.

Méthode 1 : Comme $\forall t \in]0; 1]$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$, on a $\int_0^1 \frac{|\ln(t)|^n}{2 \cdot n!} dt \leq |a_n| \leq \int_0^1 \frac{|\ln(t)|^n}{n!} dt$ et, puisque $\int_0^1 |\ln(t)|^n dt = n!$ d'après les calculs précédents, $\frac{1}{2} \leq |a_n| \leq 1$. Comme les rayons de convergence des séries $\sum_{n \geq 0} x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{2}$ valent 1, le rayon R de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vaut aussi $R = 1$.

Méthode 2 : D'abord $a_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$ et, si $n \geq 1$, on peut calculer effectivement a_n en écrivant que $\forall t \in]0; 1]$, $\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k$ donc $a_n = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^k \ln(t)^n}{n!} \right) dt$. Soit $g_k : t \mapsto (-1)^k \frac{t^k \ln(t)^n}{n!}$.

- La série $\sum_{k \geq 0} g_k$ converge simplement vers $h : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^k \ln(t)^n}{n!}$ sur $]0; 1]$ (on en vient).

- Les fonctions g_k et h sont continues sur $]0; 1]$. g_k est intégrable sur $]0; 1]$ car g_k se prolonge en une fonction continue sur $[0; 1]$ si $k \geq 1$ et $g_0(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

- Pour $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 |g_k(t)| dt = \frac{1}{n!} \int_0^1 t^k |\ln(t)|^n dt$. Posons $t = e^{-x}$ dans $I_k = \int_0^1 t^k \ln^n(t) dt$ et on a $I_k = (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-(k+1)x} dx$ puis $x = \frac{u}{k+1}$ et $I_k = \frac{(-1)^n}{(k+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \frac{(-1)^n n!}{(k+1)^{n+1}}$ comme ci-dessus. On aurait pu poser $K_{p,n} = \int_0^1 t^p \ln^n(t) dt$, faire des intégrations par parties. Ainsi,

$\int_0^1 |g_k(t)| dt = \frac{1}{(k+1)^{n+1}}$ et $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)^{n+1}}$ converge (série de RIEMANN car $n+1 > 1$).

Alors, $a_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{n+1}} = (-1)^n \theta(n+1)$ par le théorème d'intégration terme à terme où θ est la seconde fonction de RIEMANN : $\theta(\alpha) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^\alpha}$ pour $\alpha > 0$.

On sait que $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \theta(\alpha) = 1$ (classique par double limite) donc, pour $x \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = 1$ et la règle de D'ALEMBERT permet de conclure que $R = 1$.

Question de cours : si $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est une suite de complexes ne s'annulant pas et si on suppose l'existence

de $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \in \overline{\mathbb{R}_+}$, alors on a deux implications qui constituent le critère de D'ALEMBERT :

- si $\ell < 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument.
- si $\ell > 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement.
- si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure comme le prouvent les séries de RIEMANN.

10.79 a. Posons $u_n = n^{(-1)^n}$, alors $\frac{1}{n} \leq u_n \leq n$ et les séries entières $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ et $\sum_{n \geq 0} nx^n$ ont classiquement pour rayon 1 donc le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} n^{(-1)^n} x^n$ est $R = 1$ par encadrement.

De plus, comme $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas bornée, les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ divergent grossièrement et l'intervalle de convergence de $\sum_{n \geq 1} n^{(-1)^n} x^n$ est $] -1; 1[$.

b. En séparant termes pairs et impairs, on a $\forall x \in] -1; 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2nx^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Comme $\forall x \in] -1; 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, en dérivant et en multipliant par x , $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} 2nx^{2n} = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}$ car $x^2 \in] -1; 1[$. On sait que $\forall x \in] -1; 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$ et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$. En sommant, on obtient $\forall x \in] -1; 1[$, $2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) (= \text{Argth}(x))$. Ainsi, $\forall x \in] -1; 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.

10.80 a. Si f est solution de (E) sur \mathbb{R} , alors f est au moins dérivable sur \mathbb{R} . Mais $x \mapsto f(x) + f(\lambda x)$ est alors dérivable par opérations donc f' est aussi dérivable donc f est deux fois dérivable. Par une récurrence classique, on montre comme ceci que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . En dérivant n fois la relation (E), on a $f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x) + \lambda^n f^{(n)}(x)$ (E_n). Soit $a > 0$, la fonction $f^{(n)}$ est continue sur le segment $[-a; a]$ donc elle y est bornée et on peut définir $M_n = \sup_{x \in [-a; a]} |f^{(n)}(x)| = \|f^{(n)}\|_{\infty, [-a; a]}$. D'après (E_n), comme $\lambda x \in [-a; a]$ si $x \in [-a; a]$ car $|\lambda| < 1$, on a $\forall x \in [-a; a]$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq |f^{(n)}(x)| + |\lambda|^n |f^{(n)}(\lambda x)| \leq M_n + |\lambda|^n M_n$ donc $M_{n+1} \leq (1 + |\lambda|^n) M_n \leq 2M_n$. Par une récurrence simple, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_n \leq 2^n M_0$.

Par TAYLOR reste intégral, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [-a; a]$, $f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$ donc $\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n!} 2^n M_0 \leq \frac{2^n a^{n+1}}{n!} M_0$. Par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n a^n}{n!} = 0$ quel que soit $a > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ ce qui prouve que f est développable en série entière sur \mathbb{R} , donc avec un rayon $R = +\infty$.

b. Soit f solution de (E) sur \mathbb{R} , d'après la question a., on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda^n x^n$. En remplaçant dans (E), on obtient $\forall x \in] -R; R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} - a_n - \lambda^n a_n) x^n = 0$ donc, par unicité des coefficients dans une série entière

de rayon strictement positif : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1+\lambda^n}{n+1} a_n$. Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{a_0}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (1+\lambda^k)$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a_0 g(x)$ avec $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} (1+\lambda^k) \right) \frac{x^n}{n!}$. L'ensemble des solutions de (E) sur \mathbb{R} est

donc la droite vectorielle engendrée par g .

10.81 a. Pour tout réel x , la fonction $h_x : t \mapsto e^{-t^2} \operatorname{sh}(xt)$ est continue sur \mathbb{R}_+ et $\operatorname{sh}(xt) = \frac{e^{xt} - e^{-xt}}{2} = O(e^{|x|t})$

donc $e^{-t^2} \operatorname{sh}(xt) = O(e^{-t^2+|x|t}) = O(e^{-t})$ car $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t^2+|x|t+t} = 0$ donc, par comparaison, la fonction h_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ . Par conséquent, la fonction F est bien définie sur \mathbb{R} .

b. $\forall t \geq 0$, $\operatorname{sh}(xt) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!}$, donc $F(x) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt$ avec $f_n : t \mapsto \frac{x^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-t^2}$.

- La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement vers h_x sur \mathbb{R}_+ (on en vient).

- Les fonctions f_n et la fonction h_x sont continues sur \mathbb{R}_+ .

- Les fonctions f_n sont intégrables sur \mathbb{R}_+ car $f_n(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.

- Posons $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n+1} e^{-t^2} dt$, en posant $u : t \mapsto t^{2n}$ et $v : t \mapsto -\frac{e^{-t^2}}{2}$, u et v sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ , $u(0)v(0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, pour tout $n \geq 1$, $I_n = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt = n \int_0^{+\infty} t^{2n-1} e^{-t^2} dt = n I_{n-1}$. Comme $I_0 = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{n!}{2}$. On aurait aussi pu poser $t = \sqrt{u} = \varphi(u)$ avec φ bijection de classe

C^1 strictement croissante de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* ce qui donne $I_n = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u^2} du = \frac{\Gamma(n+1)}{2} = \frac{n!}{2}$.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} |f_n| = \frac{|x|^{2n+1} n!}{2(2n+1)!} = \frac{|x|^{2n+1}}{2(2n+1) \times \dots \times (n+1)}$ donc $\int_0^{+\infty} |f_n| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(n+1)!}$ et la série $\sum_{n \geq 0} \frac{|x|^{2n+1}}{(n+1)!}$ converge (série exponentielle).

Par le théorème d'intégration terme à terme, on a donc l'intégrabilité de h_x sur \mathbb{R}_+ (on le savait déjà) et surtout le développement en série entière de $F : \forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1} n!}{2(2n+1)!}$.

On pouvait aussi dériver sous le signe somme, soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = e^{-t^2} \operatorname{sh}(xt)$, alors :

- $\forall t \geq 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ (on vient de le faire).

- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = te^{-t^2} \operatorname{ch}(xt)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .

- Soit $a > 0$, on a la majoration $\forall x \in [-a, a]$, $\forall t \geq 0$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq te^{-t^2} \operatorname{ch}(at) = \varphi_a(t)$ et $\varphi_a(t) = o(e^{-t})$ comme avant donc la fonction φ_a est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

On en déduit que F est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \operatorname{ch}(xt) dt$. On pose $u(t) = \operatorname{ch}(xt)$ et $v(t) = -\frac{e^{-t^2}}{2}$, alors u et v sont C^1 sur \mathbb{R}_+ , $u(0)v(0) = -\frac{1}{2}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées

donc, par intégration par parties, on a $F'(x) = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{sh}(xt) dt = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} F(x)$.

Ainsi, F est la solution sur \mathbb{R} de (E) : $y' = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}y$ qui vérifie la condition de CAUCHY $F(0) = 0$. Comme

$x \mapsto \frac{x^2}{4}$ est une primitive de $x \mapsto \frac{x}{2}$ sur \mathbb{R}_+ , on sait d'après le cours que $y_0 : x \mapsto e^{\frac{x^2}{4}}$ est un vecteur directeur de la droite des solutions de l'équation homogène (E₀) : $y' = \frac{x}{2}y$. Par méthode de variation de la constante,

on trouve par exemple comme solution particulière de (E) la fonction $y_p : x \mapsto \frac{1}{2} e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}} dt$. Ainsi, il

existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = y_p + \lambda y_0$. Comme $F(0) = 0 = \lambda$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = x \mapsto \frac{1}{2} e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}} dt$.

On peut à partir de là retrouver un développement en série entière de F par produit de CAUCHY car

$$e^{\frac{x^2}{4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n!} \quad \text{et} \quad \int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n t^{2n}}{4^n n!} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{4^n n!} dt \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4^n n! (2n+1)}$$

en intégrant terme à terme sur $[0; x]$ inclus dans l'intervalle ouvert de convergence \mathbb{R} . Comme les séries précédentes convergent absolument pour $x \in \mathbb{R}$, en notant $a_n = \frac{x^{2n}}{4^n n!}$ et $b_n = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4^n n! (2n+1)}$, par produit de

$$\text{CAUCHY, } 2F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \text{ si } c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2n-2k}}{4^{n-k} (n-k)!} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{4^k k! (2k+1)} = \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} \right) \frac{x^{2n+1}}{4^n n!}.$$

Par unicité du développement en série entière dès lors que le rayon est strictement positif (et c'est le cas ici),

$$\text{on a donc } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{n!}{2(2n+1)!} = \frac{1}{2 \cdot 4^n n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} \text{ ou } \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{2 \cdot 4^n (n!)^2}{2(2n+1)!} = \frac{2^{2n-2}}{(2n+1) \binom{2n}{n}}.$$

10.82 a. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ converge clairement par le critère spécial des séries alternées donc son reste

d'ordre n noté ici $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ existe bien pour tout entier $n \geq 1$: la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bien définie.

Comme toute suite de restes, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b. Le critère spécial nous apprend aussi que u_n est du signe de son premier terme donc de $(-1)^n$ ainsi v_n est un terme positif. Enfin, on déduit encre du critère spécial des séries alternées que $|u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ donc

$$|v_n| \leq \frac{1}{n\sqrt{n+1}} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \text{ donc } \sum_{n \geq 1} v_n \text{ converge d'après RIEMANN.}$$

c. En notant $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ pour $n \geq 1$, on a donc $S_n = S - u_n$ ce qui donne

$$w_n = \frac{(-1)^n S}{n} - \frac{(-1)^n}{n} u_n = \frac{(-1)^n S}{n} - v_n. \text{ Comme la série } \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n S}{n} \text{ converge par le critère spécial des}$$

séries alternées et que $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge d'après la question précédente, par somme, la série $\sum_{n \geq 1} w_n$ converge.

d. Comme $\sum_{n \geq 1} w_n$ converge, le rayon R de la série entière $\sum_{n \geq 1} w_n x^n$ vérifie déjà $R \geq 1$. Mais si on regarde

ce qui se passe quand $x = -1$, on a $w_n (-1)^n = \frac{S}{n} - (-1)^n v_n$. Comme la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n v_n$ converge

puisque $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge absolument d'après b. et que la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{S}{n}$ diverge, par somme, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n w_n$ diverge. Ainsi, on a $R \leq 1$. Au final, $R = 1$.

10.83 a. Pour $n \in \mathbb{N}$, comme $|a_n| = 1$, on a $\left| \frac{a_n}{n!} \right| = \frac{1}{n!}$ et on sait que le rayon de convergence de la série

entière (exponentielle) $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ vaut $+\infty$. Ainsi, par comparaison, le rayon de convergence de la série entière

$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ vaut $R = +\infty$. Ainsi, la fonction f est définie sur \mathbb{R} .

b. Supposons que $a_0 = 1$ (le cas $a_0 = -1$ s'obtient en considérant $-f$ à la place de f avec les mêmes hypothèses sur f en remplaçant la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la suite $(-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

Comme f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , elle admet des développements limités à n'importe quel ordre qui sont

donnés d'après le théorème de TAYLOR-YOUNG par $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$. Or, d'après le

cours, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_n}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ donc $a_n = f^{(n)}(0)$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} x^k + o(x^n)$ (ce qui est une troncature de la série entière). De même, on sait qu'on peut dériver une série entière terme à terme : $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{a_n}{(n-m)!} x^{n-m} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{k+m}}{k!} x^k$. Par exemple $f^{(m)}(x) = a_m + a_{m+1}x + o(x)$.

- Initialisation : comme $f(0) = a_0 = 1$, f est positive localement au voisinage de 0. Avec le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0, on a $f(x) = a_0 + a_1x + o(x) = 1 + a_1x + o(x)$ donc, comme $a_1 \neq 0$, il vient $f(x) - 1 \sim a_1x$. Si on avait $a_1 = 1$, alors $f(x) - 1 \sim x$ donc $f(x) - 1$ serait strictement positif au voisinage de 0^+ ce qui est contraire à l'hypothèse $|f(x)| = f(x) \leq 1$ si $x > 0$. On conclut ce raisonnement : $a_1 = -1$.

- Hérité : soit $m \geq 1$ et supposons que $\forall n \in \llbracket 1; m \rrbracket$, $a_n = (-1)^n$. Alors $f^{(m)}(x) = a_m + a_{m+1}x + o(x)$ donc, par continuité de $f^{(m)}$ en 0, $f^{(m)}$ est du signe de $(-1)^m$ au voisinage de 0 donc $|f^{(m)}(x)| = (-1)^m f^{(m)}(x)$ au voisinage de 0. Or on a vu que $f^{(m)}(x) = a_m + a_{m+1}x + o(x)$ donc $|f^{(m)}(x)| = 1 + (-1)^m a_{m+1}x + o(x)$. Si on avait $a_{m+1} = (-1)^m$, on aurait alors $|f^{(m)}(x)| = 1 + x + o(x)$ donc $|f^{(m)}(x)| - 1 \sim x$ ce qui contredit encore une fois le fait que $\forall x > 0$, $|f^{(m)}(x)| \leq 1$. Par l'absurde, on a donc prouvé que $a_{m+1} = (-1)^{m+1}$.

- Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = e^{-x}$.

En regroupant les deux cas selon a_0 , si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ et qu'on suppose que $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ donc $f : x \mapsto e^{-x}$ ou $f : x \mapsto -e^{-x}$.

10.84 L'ensemble E contient la suite nulle et, si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites de E , comme $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$, la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n) 2^{-kn}$ converge absolument par comparaison et, par linéarité

de la somme de séries convergentes, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) 2^{-kn} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n 2^{-kn} + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n 2^{-kn} = 0 + 0$ donc $u + v \in E$. Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (et même de $\ell^1(\mathbb{C})$) donc E est un \mathbb{C} -espace vectoriel.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , comme la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument, la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n z^n$ est de rayon $R \geq 1$ car il y a convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n z^n$ au moins sur le disque $B_f(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ par comparaison. Posons

$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$ quand il y a convergence. Par hypothèse, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0$. Comme f est continue sur $] -1; 1[$ car elle y est développable en série entière, on a $f(0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0$ donc $f(0) = u_0 = 0$.

Soit un entier $p \in \mathbb{N}$, supposons qu'on ait déjà montré que $u_0 = \dots = u_p = 0$. Alors, on obtient

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n 2^{-kn} = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n 2^{-kn} = \frac{1}{2^{k(p+1)}} \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n 2^{-kn+k(p+1)} = 0$ donc, en changeant d'indice, $\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n 2^{-kn+k(p+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+p+1} 2^{-kn} = 0$. Par conséquent, en posant $f_p(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+p+1} z^n$, le rayon

de convergence de cette série entière est à nouveau supérieur ou égal à 1 car $\forall z \in B_f(0, 1)$, $f(z) = z^p f_p(z)$.

Ce qui précède montre que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f_p\left(\frac{1}{2^k}\right) = 0$ et, avec les mêmes arguments que précédemment, le terme constant de f_p est nul ce qui montre que $u_{p+1} = 0$ et l'hérédité est établie.

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$. Ainsi, E est réduit à la suite nulle !

10.85 Comme $\left(\frac{(-1)^n x^n}{3n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leq 1$ par croissances comparées, le rayon de

$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{3n+1}$ vaut $R = 1$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3n+1}$ pour $x \in]-1; 1[$. En effet, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{3n+1}$ converge si $x \in]-1; 1[$ d'après le cours et $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ converge aussi par le critère spécial des séries alternées car $\left(\frac{1}{3n+1}\right)_{n \geq 0}$ est décroissante et tend vers 0. Par contre, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3n+1}$ diverge car $\frac{1}{3n+1} \sim \frac{1}{3n}$ et que la série harmonique diverge. Posons $g(x) = xf(x^3)$, alors $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3n+1}$. Le rayon de cette série entière est aussi 1, on sait donc que g est dérivable sur $] - 1; 1[$ et que $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3}$. Ainsi, puisque $g(0) = 0$, par le théorème fondamental de l'intégration, $\forall x \in] - 1; 1[$, $g(x) = \int_0^x g'(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$.

Or, comme $(1+x^3) = (1+x)(1-x+x^2)$, on peut décomposer $\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{(1+x)} + \frac{bX+c}{1-x+x^2}$ avec a, b, c des réels. En réduisant au même dénominateur, en identifiant et en résolvant le système, on trouve sans peine $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3(1+x)} + \frac{2-x}{3(1-x+x^2)}$. Ainsi, pour $x \in] - 1; 1[$, en faisant apparaître des dérivées usuelles,

$g(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{3(1+t)} + \frac{2-t}{3(1-t+t^2)} \right) dt = \frac{1}{3} \int_0^x \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{6} \int_0^x \frac{(2t-1)dt}{1-t+t^2} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{1-t+t^2}$. En mettant sous forme canonique, $\frac{1}{1-t+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{(2/\sqrt{3})}{1 + \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$, on a l'expression de $g(x)$ à l'aide des fonctions usuelles

$g(x) = \left[\frac{\ln(1+t)}{3} - \frac{\ln(1-t+t^2)}{6} + \frac{\text{Arctan}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} \right]_0^x = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \text{Arctan} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$ car $\text{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{6}$. On peut maintenant revenir à l'expression de $f(x)$.

Si $x = 0$, $f(x) = 1$. Si $x \neq 0$, soit $\sqrt[3]{x}$ l'antécédent de x par la bijection $y \mapsto y^3$ de $] - 1; 1[$ dans $] - 1; 1[$, alors $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} g(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{6\sqrt[3]{x}} \ln \left(\frac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{1-\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt[3]{x}} \text{Arctan} \left(\frac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\sqrt{3}\pi}{18\sqrt[3]{x}}$.

Pour aller plus loin, en posant $u_n : x \mapsto \frac{(-1)^n x^n}{3n+1}$ et $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ pour $x \in [0; 1]$, d'après le critère spécial des séries alternées car $(|u_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0, $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3n+1}$ d'où $\|R_n\|_{\infty, [0; 1]} \leq \frac{1}{3n+1}$ ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, [0; 1]} = 0$ par encadrement et la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$. Comme toutes les u_n sont continue sur $[0; 1]$, f est elle aussi continue sur $[0; 1]$ donc $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{6\sqrt[3]{x}} \ln \left(\frac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{1-\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt[3]{x}} \text{Arctan} \left(\frac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\sqrt{3}\pi}{18\sqrt[3]{x}} \right] = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

10.86 a. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1} + 1$ (R). On suppose que

cette suite converge vers un réel ℓ . En passant à la limite dans (R), on trouve $\ell = 0 + 1 = 1$. Soit $b \in \mathbb{R}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $v_1 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{n+1} + 1$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{n+1}$, on montre par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - v_n = \frac{u_1 - v_1}{n!} = \frac{a-b}{n!}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$. Ainsi, comme $v_n = u_n - (u_n - v_n)$, par somme, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1 - 0 = 1$.

Si la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge pour un réel a , alors la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge pour toute valeur de a vers 1.

b. On a $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{3}{2} = 1,5$ mais aussi $u_3 = \frac{3}{2}$, $u_4 = \frac{11}{8} = 1,375$. Soit $n \geq 1$ tel que $1 \leq u_n \leq 2$, alors $1 \leq u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1} + 1 \leq \frac{2}{n+1} + 1 \leq 2$. Par principe de récurrence, $\forall n \geq 1$, $u_n \in [1; 2]$ donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée. Ainsi, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n+1} = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 1$ ce qui équivaut au fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

c. Soit $n \geq 1$, alors $s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k!}{(n+1)!} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{k!}{(n+1)!} \right) + \frac{(n+1)!}{(n+1)!}$ donc, comme $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$, on a $s_{n+1} = \frac{s_n}{n+1} + 1$ avec $s_1 = 1$. La question précédente montre que $(s_n)_{n \geq 1}$ tend vers 1.

d. Comme $s_n \underset{+\infty}{\sim} 1$, le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 1} s_n x^n$ est, d'après le cours, le même que celui de $\sum_{n \geq 1} x^n$, donc $R = 1$. Pour $x \in]-1; 1[$, posons $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n x^n$. La fonction f est alors dérivable sur $] -1; 1[$

et $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)s_{n+1}x^n$. Or $\forall n \geq 1$, $(n+1)s_{n+1} = s_n + (n+1)$ donc, en reportant dans l'expression

de $f'(x)$, on a $f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)s_{n+1}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (s_n + (n+1))x^n = 1 + f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)x^n$. Comme

on sait que $\forall x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1$, en dérivant, on a $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$ donc

$f'(x) = f(x) + \frac{1}{(1-x)^2}$ (E). Les solutions réelles sur $] -1; 1[$ de l'équation homogène $(E_0) : y' = y$ sont les

fonctions $y : x \mapsto \lambda e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par la méthode de variation de la constante, on trouve $\lambda'(x) = \frac{e^{-x}}{(1-x)^2}$

et on peut prendre par exemple $\lambda(x) = \int_0^x \frac{e^{-t} dt}{(1-t)^2}$. Les solutions de (E) sur $] -1; 1[$ sont donc toutes les

fonctions $y : x \mapsto \left(\lambda + \int_0^x \frac{e^{-t} dt}{(1-t)^2} \right) e^x$. Comme f est solution de (E) sur $] -1; 1[$ et que $f(0) = 0$, on a $\lambda = 0$

donc, pour tout réel $x \in]-1; 1[$, il vient $f(x) = e^x \int_0^x \frac{e^{-t} dt}{(1-t)^2}$.

10.87 a. Pour $n \geq 1$, on partitionne les involutions σ de $\llbracket 1; n+2 \rrbracket$ en deux catégories :

- celles pour lesquelles $\sigma(n+2) = n+2$ sont au nombre de I_{n+1} car il n'y a pas de choix à faire pour $\sigma(n+2)$ qu'on impose égal à $n+2$, ensuite σ induit alors sur $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ une involution de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$.
- celles telles que $\sigma(n+2) = k \neq n+2$ sont au nombre de $(n+1)I_n$ car pour les choisir de manière bijective, il y a $n+1$ choix pour l'entier k qui est l'image de $n+2$ par σ et, une fois ce choix effectué, cela implique que $\sigma(k) = \sigma(\sigma(n+2)) = n+2$ car σ doit être une involution, et on a alors I_n choix pour finir de déterminer σ qui doit induire sur $\llbracket 1; n+1 \rrbracket \setminus \{k\}$ une involution de cet ensemble à n éléments.

Cette partition implique la relation $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$ pour $n \geq 1$ et, comme $I_2 = 2 = 1 + 1 \cdot 1 = I_1 + 1 \cdot I_0$ avec la convention choisie pour I_0 , on a bien : $\forall n \geq 0$, $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

b. Comme les involutions sont des permutations et qu'il y a $n!$ permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$, on en déduit que $I_n \leq n!$ d'où $0 \leq \frac{I_n}{n!} \leq 1$. Comme la série entière $\sum_{n \geq 0} x^n$ a pour rayon 1, par comparaison, on a $R \geq 1$.

c. Les calculs qui suivent sont valides car le rayon de convergence R est supérieur à 1 : pour $x \in]-1; 1[$, on a $(1+x)\varphi(x) = \varphi(x) + x\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n + nI_{n-1}}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n+1}}{n!} x^n = \varphi'(x)$.

d. On en déduit en intégrant l'équation différentielle linéaire du premier ordre mise sous forme normalisée sans second membre, comme une primitive de $x \mapsto 1+x$ est $x \mapsto x + \frac{x^2}{2}$ sur l'intervalle $] -1; 1[$, que l'on a

$\forall x \in]-1; 1[, \varphi(x) = e^{x + \frac{x^2}{2}}$ puisque $\varphi(0) = I_0 = 1$ par convention.

e. Alors $\forall x \in]-1; 1[, \varphi(x) = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} x^i \right) \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j! 2^j} x^{2j} \right)$. Ces deux séries ont pour rayon $+\infty$ donc on peut effectuer le produit de CAUCHY et obtenir $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i+2j=n} \frac{n!}{i! j! 2^j} \right) x^n$. En identifiant (par unicité) les coefficients entre les deux expressions de $S(x)$ sous forme de série entière, $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{I_n}{n!} = \sum_{i+2j=n} \frac{1}{i! j! 2^j}$ donc $I_n = \sum_{i+2j=n} \frac{n!}{i! j! 2^j}$. Puisque $2j \leq n$ et $i = n - 2j$, on a la formule $I_n = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2j)! j! 2^j}$.

Pour expliquer cette relation de manière combinatoire, on peut constater qu'une involution σ de $\llbracket 1; n \rrbracket$ est une application telle que pour tout entier x entre 1 et n , on a deux choix :

- soit $\sigma(x) = x$ et x est appelé un point fixe de σ .
- soit $\sigma(x) = y \neq x$ et alors, comme $\sigma^2 = \text{id}_{\llbracket 1; n \rrbracket}$, on a forcément $\sigma(y) = x$.

Ainsi, si $\sigma \in A_n$, le nombre f de points fixes de σ a la même parité que n de sorte qu'il existe $2j$ entiers de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui ne sont pas fixes par σ avec $f = n - 2j$ avec $0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. On peut donc écrire $A_n = \bigcup_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n,j}$ où

$$A_{n,j} = \{ \sigma \in A_n \mid \sigma \text{ admet } f = n - 2j \text{ points fixes} \}.$$

Pour construire une involution σ de $A_{n,j}$:

- on choisit les $n - 2j$ éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui sont fixes par σ : $\binom{n}{n-2j} = \binom{n}{2j}$ choix.
- on choisit l'image y du plus petit élément x qui reste : $(2j-1)$ choix (et alors $\sigma(x) = y$ et $\sigma(y) = x$).
- on choisit l'image t du plus petit élément z qui reste : $(2j-3)$ choix etc...

Ainsi $\text{card}(A_{n,j}) = \binom{n}{2j} \times (2j-1) \times (2j-3) \times \cdots \times 3 \times 1 = \frac{n!}{(n-2j)!(2j)!} \times \frac{(2j)!}{2^j j!}$ en multipliant en haut et en bas

par les termes pairs qui manquent. On retrouve bien $I_n = \text{card}(A_n) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \text{card}(A_{n,j}) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2j)! 2^j j!}$.

10.88 a. Pour $x \in \mathbb{R}, f_x : t \mapsto \frac{1}{x + e^t}$ est définie et continue sur \mathbb{R}_+ si $x > -1$ et sur $[0; \ln(-x)[\cup] \ln(-x); +\infty[$ si $x \leq -1$. Comme $f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} e^{-t}$, la fonction f_x est intégrable sur \mathbb{R}_+ si $x > -1$. De plus, f_{-1} est continue et positive sur \mathbb{R}_+^* et $f_{-1}(t) = \frac{1}{e^t - 1} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t}$ donc $f(-1)$ n'existe pas par comparaison à une intégrale de RIEMANN. Comme f est définie sur $] -1; 1[$ et pas sur $[-1; 1]$, on en déduit que le réel $\alpha > 0$ maximal tel que f soit définie sur $] -\alpha; \alpha[$ est le réel $\alpha = 1$.

b. Si $x \in]-1; 1[, \forall t \geq 0, f_x(t) = e^{-t} \times \frac{1}{1 + x e^{-t}} = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n e^{-nt} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ si on définit $u_n(t) = (-1)^n x^n e^{-(n+1)t}$. La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ d'après ce qui précède. Les u_n sont continues et intégrables sur \mathbb{R}_+ car $n+1 > 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur \mathbb{R}_+ . De plus, pour $n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} |u_n| = \frac{|x|^n}{n+1}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{|x|^n}{n+1}$ converge car $\frac{|x|^n}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} o(|x|^n)$ et que la série géométrique $\sum_{n \geq 0} |x|^n$ converge car $|x| < 1$. Ainsi, si $x \neq 0, f(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \frac{\ln(1+x)}{x}$ car on reconnaît le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $] -1; 1[$. Bien sûr, $f(0) = 1$.

10.89 a. La fonction f est continue sur \mathbb{R}_+^* . On a $f(x) \sim_0 \frac{1}{x^{1/2}}$ donc f est intégrable sur $]0; 1]$ par RIEMANN ($\frac{1}{2} < 1$).

De plus, $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}$ donc f est intégrable sur $[1; +\infty[$ par RIEMANN ($\frac{3}{2} > 1$). Ainsi, f est intégrable sur \mathbb{R}_+^* donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

b. Dans l'intégrale convergente $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, on pose $x = \frac{1}{t} = \varphi(t)$ avec φ strictement décroissante, de classe C^1 et bijective de $]0; 1]$ dans $[1; +\infty[$, et $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^0 f\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^3+t}} = \int_0^1 f(t)dt$. Par CHASLES, on a donc $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx = 2 \int_0^1 f(x)dx$.

c. D'après le cours que $\forall x \in]-1; 1[, \forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ avec $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Si $u \in]-1; 1[, u^4 \in [0; 1[\subset]-1; 1[$ donc $\forall u \in [0; 1[, \frac{1}{\sqrt{1+u^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-3/2)\cdots(-n+(1/2))}{n!} u^{4n}$ avec $\alpha = -\frac{1}{2}$. Classiquement, on factorise les 2, on multiplie au numérateur et au dénominateur par les termes

$2.4.\cdots(2n)$, ce qui donne $\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ et, enfin, $\frac{1}{\sqrt{1+u^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!u^{4n}}{2^{2n}(n!)^2}$.

d. Pour $u \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n(u) = \frac{(2n)!u^{4n}}{2^{2n}(n!)^2}$. La suite $(v_k(u))_{k \geq 0}$ est décroissante car si $u \in]0; 1]$, on a $\frac{v_{k+1}(u)}{v_k(u)} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}u^4 = \frac{2n+1}{2n+2}u^4 < 1$ et $v_n(0) = \delta_{n,0}$. La suite $(v_k(u))_{k \geq 0}$ tend aussi vers 0 si $u \in [0; 1[$ puisque la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k v_k(u)$ converge d'après c.. De plus, si $u = 1$, par STIRLING, on

a $v_n(1) \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{2n}}{2^{2n}(2\pi n)e^{2n}n^{2n}} \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(1) = 0$. Ainsi, $\sum_{n \geq 0} (-1)^n v_n(1)$ converge par le critère spécial des séries alternées. La série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n v_n$ converge donc simplement sur $[0; 1]$.

Posons maintenant $R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k(u)$ pour $u \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après le critère spécial des séries alternées, $|R_n(u)| \leq v_{n+1}(u) \leq v_{n+1}(1)$. Ainsi, R_n est bornée sur $[0; 1]$ et $\|R_n\|_{\infty, [0; 1]} \leq v_{n+1}(1)$.

e. On effectue le changement de variable $x = u^2 = \varphi(u)$ avec φ strictement croissante, de classe C^1 et bijective de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$, et on a $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^6+u^2}}(2u)du = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^4}}du$.

Comme $\|R_n\|_{\infty, [0; 1]} \leq v_{n+1}(1)$ et d'après d., par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, [0; 1]} = 0$ donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} (-1)^n v_n$ converge uniformément sur le segment $[0; 1]$ donc, comme toutes les v_n sont continues

sur $[0; 1]$, la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n v_n$ est continue sur $[0; 1]$ (on n'en a pas besoin ici). D'après le cours,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^4}}du = \int_0^1 S(u)du = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 (-1)^n v_n(u)du \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(4n+1)} \text{ car } \int_0^1 u^{4n}du = \frac{1}{4n+1}.$$

D'après b., on en déduit que $\int_0^{+\infty} f(x)dx = 2 \int_0^1 f(x)dx = 4 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^4}}du = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(4n+1)}$.

On aurait pu montrer cette relation par le théorème d'intégration terme à terme !

10.90 a. $f : t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$ est continue sur $] -\infty; 1[$ en la prolongeant par continuité en 0 avec $f(0) = -1$ puisque

$\ln(1-t) \sim_0 -t$. F est donc la primitive de $-f$ qui s'annule en 0 donc F est au moins définie sur $] -\infty; 1[$.

Comme f n'est pas définie sur $[1; +\infty[$, le domaine de définition D de F est inclus dans $] -\infty; 1[$.

Si $x = 1$, $f(t) \underset{1^-}{\sim} \ln(1-t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ donc f est intégrable sur $[0; 1[$ et $F(1)$ existe par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Par conséquent, le domaine définition de F est $D =]-\infty; 1]$.

b. D'après le cours, $\forall t \in]-1; 1[, \ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$ donc $-f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$ (marche aussi si $t = 0$). Pour $x \in]-1; 1[$, en intégrant terme à terme sur le segment $[0; x]$ inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, il vient $F(x) = \int_0^x (-f(t))dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{n} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = S(x)$. Par définition de la convergence d'une intégrale, $F(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$. Par continuité de F en -1 , on a aussi $F(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} F(x)$.

En posant $u_n : x \mapsto \frac{x^n}{n^2}$, on a $\|u_n\|_{\infty, [-1; 1]} = \frac{1}{n^2}$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[-1; 1]$ et, puisque toutes les u_n sont continues sur $[-1; 1]$, S est continue sur $[-1; 1]$ donc $F(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = S(1) = \frac{\pi^2}{6}$ et

$F(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} S(x) = S(-1) = -\frac{\pi^2}{12}$ (classique en séparant les termes d'indices pairs et impairs).

On a bien $\forall x \in [-1; 1], F(x) = S(x)$.

c. Soit $G : [0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x) \ln(1-x)$ si $x \neq 0$ et $G(0) = 0$. Alors, par opérations et comme $\ln(x) \ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x \ln(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ par croissances comparées, la fonction G est continue sur $[0; 1[$ et dérivable sur $]0; 1[$. De plus, F est dérivable sur $]0; 1[$ avec $F'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$ donc, pour $x \in]0; 1[$, $(F(x) + F(1-x) - G(x))' = F'(x) - F'(1-x) - G'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1-(1-x))}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = 0$ avec l'abus de notation usuel. Ainsi, la fonction $x \mapsto F(x) + F(1-x) - G(x)$ est constante sur l'intervalle $]0; 1[$, et en utilisant sa continuité en 0 , elle vaut donc $F(0) + F(1) - G(0) = F(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

On a donc la relation $\forall x \in]0; 1[, F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x) \ln(1-x)$.

10.91 Pour tout entier naturel n , posons $u_n = \frac{2n^2 + 5n + 3}{2^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2^{n-1}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées donc, par comparaison à une série de RIEMANN, comme $2 > 1$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Pour calculer la somme de cette série numérique, posons $a_n = 2n^2 + 5n + 3$ et considérons la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Toujours par croissances comparées, $(a_n x^n)_{n \geq 0}$ est bornée si et seulement si $|x| < 1$ donc, par définition, le rayon de cette série entière vaut $R = 1$. Pour $x \in]-1; 1[$, comme $a_n = 2(n+1)(n+2) - (n+1)$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$ (les deux séries convergent puisque les deux rayons valent encore 1). On reconnaît les dérivées de la série géométrique, $\forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$ de sorte que $f(x) = \frac{4}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{3+x}{(1-x)^3}$. Ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2 + 5n + 3}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3 + (1/2)}{(1 - (1/2))^3} = 28$.

10.92 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée, $\frac{a_n}{n!} x^n = O\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = 0$ par croissances comparées.

Ainsi, $\left(\frac{a_n}{n!} x^n\right)_{n \geq 0}$ est bornée quel que soit x donc le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ vaut $+\infty$.

b. Les trois suites suivantes sont bien bornées :

- Si $a_n = \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{2^n}$ converge si et seulement si $|x| < 2$ donc $R = 2$ et la série géométrique $\sum_{n \geq 0} a_n$

converge car elle est de raison $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$.

- Si $a_n = 1$, $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$ donc $R = 1$ et $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge grossièrement.
- Si $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n+1)^2}$ converge si et seulement si $|x| \leq 1$ donc $R = 1$ et la série de RIEMANN $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge.

c. Pour $x \in [-1; 1]$, la suite $(a_n x^n)_{n \geq 0}$ est bornée car $|a_n x^n| = |a_n| |x|^n \leq |a_n|$ et que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est elle-même bornée. Par définition du rayon de convergence, $R \geq 1$.

d. Soit $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f_k : x \mapsto x^k e^{-x}$ est continue sur \mathbb{R}_+ et $f_k(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées donc f_k est intégrable sur \mathbb{R}_+ par comparaison aux intégrales de RIEMANN donc $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ converge.

On pose $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ pour $k \in \mathbb{N}$. Pour $k \geq 1$, les fonctions $u : x \mapsto x^k$ et $v : x \mapsto -e^{-x}$ sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = 0 = u(0)v(0)$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, on a $I_k = \int_0^{+\infty} kx^{k-1} e^{-x} dx = kI_{k-1}$. Par une récurrence simple, comme $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $I_k = k!$. On pouvait aussi dire que $I_k = \int_0^{+\infty} x^{k+1-1} e^{-x} dx = \Gamma(k+1) = (k+1-1)! = k!$ d'après le cours mais le calcul est attendu.

e. Soit $t > 1$, d'après a., f est définie sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $e^{-xt} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n e^{-xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ en notant $u_n(x) = \frac{a_n}{n!} x^n e^{-xt}$.

(H₁) La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement vers $x \mapsto e^{-xt} f(x)$ sur \mathbb{R}_+ (on en vient).

(H₂) Les u_n sont continues et intégrables sur \mathbb{R}_+ car $u_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées.

(H₃) $x \mapsto e^{-xt} f(x)$ est continue sur \mathbb{R}_+ puisque f l'est en tant que somme d'une série entière de rayon $+\infty$.

(H₄) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} |u_n(x)| dx = \int_0^{+\infty} \frac{|a_n|}{n!} x^n e^{-xt} dx$ et on pose $u = xt$ (facile car $t > 0$) pour avoir

$$\int_0^{+\infty} |u_n(x)| dx = \frac{|a_n|}{n! t^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \frac{|a_n|}{t^{n+1}} \text{ d'après d. et } \sum_{n \geq 0} \frac{|a_n|}{t^{n+1}} \text{ converge d'après c. car le rayon de convergence de } \sum_{n \geq 0} a_n x^n \text{ vérifie } R \geq 1 \text{ et que } \frac{1}{t} \in]0; 1[.$$

Par le théorème d'intégration terme à terme, $g(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(x) dx$ or, avec le même

calcul que ci-dessus, on a $\int_0^{+\infty} u_n(x) dx = \frac{a_n}{t^{n+1}}$ donc $\forall t > 1$, $g(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{t^{n+1}} = \frac{1}{t} S\left(\frac{1}{t}\right)$.

10.93 a. La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur \mathbb{R}^* par opérations et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ car $\sin(t) \sim t$. Ainsi, f est continue sur \mathbb{R} ce qui montre, par le théorème fondamental

de l'intégration, que F est bien définie sur \mathbb{R} en tant que primitive de f qui s'annule en 0. De plus, on sait que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $f(t) = \frac{\sin(t)}{t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$ et cette formule

marche aussi pour $t = 0$ car $1 = \frac{(-1)^0 t^{2 \cdot 0}}{(2 \cdot 0 + 1)!}$. Comme le rayon de convergence de $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$ vaut $R = +\infty$,

on peut intégrer terme à terme sur $[0; x]$ qui est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence pour avoir

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!} \right) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1) \cdot (2k+1)!}.$$

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto \exp(-xe^{-it})$ est continue sur le segment $J = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc l'intégrale

$I(x) = \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt$ existe. On sait que $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ donc, en prenant $z = -xe^{-it}$, on

obtient $\forall t \in J, \exp(-xe^{-it}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $h_n : t \mapsto \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!}$.

Comme $\forall t \in J, |h_n(t)| = \frac{|x|^n}{n!}$, on a $\|h_n\|_{\infty, J} = \frac{|x|^n}{n!}$ et la série exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{|x|^n}{n!}$ converge donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} h_n$ converge normalement vers h sur le segment J . Comme toutes les h_n et h sont continues

sur J , le théorème d'intégration terme à terme sur segment montre que $I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!} dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons l'intégrale $L_n = \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!} dt$. On a le cas particulier $L_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}$

et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient $L_n = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \int_0^{\pi/2} e^{-int} dt = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \left[\frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^{\pi/2} = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \times \frac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}$.

Comme on sait que $\operatorname{Re}(I(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(L_n)$ et que $\operatorname{Re}\left(\frac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}\right) = 0$ si $n \geq 2$ est pair et que l'on a

$\operatorname{Re}\left(\frac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{-i(2k+1)\pi/2} - 1}{-i(2k+1)}\right) = \frac{(-1)^k}{2k+1}$ si $n = 2k+1 \geq 1$ est impair, il ne reste dans la formule

ci-dessus que $\operatorname{Re}(I(x)) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \times \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1) \cdot (2k+1)!}$.

c. Par inégalité triangulaire sur les intégrales, $|I(x)| = \left| \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt \right| \leq \int_0^{\pi/2} |\exp(-xe^{-it})| dt$. Or $\exp(-xe^{-it}) = e^{-x \cos(t)} e^{ix \sin(t)}$ donc $|\exp(-xe^{-it})| = e^{-x \cos(t)}$.

Méthode 1 : la fonction \cos est concave sur J car $\cos'' = -\cos \leq 0$ sur J donc $\forall t \in J, \cos(t) \geq 1 - \frac{2t}{\pi}$. Ainsi,

$e^{-x \cos(t)} \leq e^{-x} e^{2xt/\pi}$ donc $\forall x > 0, \int_0^{\pi/2} |\exp(-xe^{-it})| dt \leq e^{-x} \int_0^{\pi/2} e^{2xt/\pi} dt$. On en déduit donc que

$|I(x)| \leq e^{-x} \left[\frac{\pi}{2x} e^{2xt/\pi} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi e^{-x} (e^x - 1)}{2x} = \frac{\pi(1 - e^{-x})}{2x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(1 - e^{-x})}{2x} = 0$, par encadrement,

on obtient la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt = 0$.

Méthode 2 : soit $g : \mathbb{R} \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \exp(-xe^{-it})$ de sorte que $I(x) = \int_0^{\pi/2} g(x, t) dt$.

(H₁) pour tout $t \in J$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x, t) = 0 = a(t)$ car $\cos(t) > 0$.

(H₂) pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $h_x : t \mapsto g(x, t)$ et a sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

(H₃) pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $|g(x, t)| \leq 1 = \varphi(t)$ et φ est continue et intégrable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

D'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = \int_0^{\pi/2} a(t) dt = 0$.

D'après les questions précédentes, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Re}(I(x)) = \frac{\pi}{2} - F(x)$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = 0$, on a aussi

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(I(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - F(x) \right) = 0$. Ceci assure l'existence d'une limite finie de F en $+\infty$ et sa valeur

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$ qu'on note $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ (intégrale de DIRICHLET).

10.94 a. Si, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = (-1)^n$, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vaut $R = 1$

et sa fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$ est majorée par 1 sur $[0; 1]$.

b. L'hypothèse se traduit par $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Ainsi, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée donc, pour tout réel $r \in]0; 1]$, la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi donc, par définition, le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vérifie donc $R \geq 1$. Ainsi, la fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie sur $] -1; 1[$ au minimum.

c. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0, |na_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, si $n \geq n_0$ et $x \in]0; 1[$, il vient

$|f(x)| = \left| \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n x^n \right| \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| x^n \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ par inégalité triangulaire. On en déduit la majoration $|f(x)| \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{x^n}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. De plus, comme

$\varphi : x \mapsto \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{x^n}{n}$ est polynomiale donc continue en 1, elle est bornée et on a $\varphi(x) = o(\ln(1-x))$ car $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) = -\infty$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [1-\alpha; 1[$, $|\varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\ln(1-x)|$. En combinant ces

deux renseignements, $\forall x \in [1-\alpha; 1[$, $|f(x)| \leq \varepsilon |\ln(1-x)|$ car on sait que $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ si $x \in] -1; 1[$.

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [1-\alpha; 1[$, $|f(x)| \leq \varepsilon |\ln(1-x)|$. Ceci justifie bien que $f(x) = o(\ln(1-x))$.

d. Avec l'exemple de la question **a.**, si on pose $b_n = (-1)^n$, la fonction somme $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est bien définie sur $] -1; 1[$ et vérifie bien $g(x) = o(\ln(1-x))$ car g est bornée sur $[0; 1[$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) = -\infty$. Pourtant, la suite $(nb_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. La réciproque espérée est donc fausse.

Même si on impose que tous les b_n sont positifs, il suffit de prendre $b_n = \frac{1}{n}$ si n est une puissance de 2 et

$b_n = 0$ sinon. Alors, $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2^n}}{2^n}$ est de rayon de convergence 1 car $\left(\frac{x^{2^n}}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si

$|x| \leq 1$ par croissances comparées. En notant $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{2^n}$, on a $\forall x \in [-1; 1]$, $|g(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ donc g est bornée sur $[-1; 1]$ et $g(x) = o(\ln(1-x))$ même si $(nb_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 puisque $2^n b_{2^n} = 1$.

Conclusion : si, au voisinage de 1^- , $f(x) = o(\ln(1-x))$, on ne peut pas conclure que $(na_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

10.95 a. Comme f est de classe C^∞ sur I , $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt$ par la

formule de TAYLOR reste intégral. On constate que si $x \in [0; A[$, comme $\int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \geq 0$, on a

$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \leq f(x)$ donc la série $\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées donc elle est convergente et on peut en déduire que son terme général tend vers 0, ce qui montre que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$ (L). Traitons maintenant deux cas :

Si $x \in] -A; 0]$, $\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \right| = \int_x^0 \frac{(t-x)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt$ car $f^{n+1}(t) \geq 0$ par hypothèse.

Comme $f^{(n+2)} \geq 0$, $f^{(n+1)}$ est croissante donc $\forall t \in [x; 0]$, $f^{(n+1)}(t) \leq f^{(n+1)}(0)$ ce qui montre que $\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \right| \leq \int_x^0 \frac{(t-x)^n f^{(n+1)}(0)}{n!} dt = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n!} \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1} \right]_x^0 = \frac{(-x)^{n+1} f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}$.

Mais comme $-x \geq 0$, d'après (L), on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (-x)^k = 0$ donc, par encadrement, on en déduit

que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt = 0$ et, d'après le cours, f est égale à sa série de TAYLOR sur $] -A; 0[$.

Si $x \in]0; A[$, on prend r tel que $x < r < A$ et, en posant $t = xu = \varphi(u)$ avec $\varphi \in C^1$ sur le segment $[0; 1]$, on a $\int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt = \int_0^1 \frac{(x-xu)^n f^{(n+1)}(xu)}{n!} x du = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du$.

Comme $f^{(n+1)}$ est croissante car $f^{(n+2)} \geq 0$, il vient $\int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \leq \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ru) du$ car $\forall u \in [0; 1], f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(ru)$. Avec le même calcul qu'avant avec r à la place de x , on a $\int_0^r \frac{(r-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt = \frac{r^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ru) du$ donc on obtient la majoration suivante : $\int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \leq \frac{x^{n+1}}{r^{n+1}} \int_0^r \frac{(r-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt = \frac{x^{n+1}}{r^{n+1}} \left(f(r) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} r^k \right) \leq \frac{x^{n+1} f(r)}{r^{n+1}}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{r^{n+1}} = 0$ car $0 < x < r$, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt = 0$ ce qui garantit que f est égale à sa série de TAYLOR sur $]0; A[$.

Avec ces deux cas, f est égale à sa série de TAYLOR sur $] - A; A[$, donc f est développable en série entière sur $] - A; A[$: on dit que f est absolument monotone sur $] - A; A[$ quand $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} \geq 0$ sur $] - A; A[$.

b Comme f est de classe C^∞ sur I et \exp l'est sur \mathbb{R} , par composition, g est de classe C^∞ sur I .

Initialisation : $g = e^f$ est positive sur I , $g' = f' \times e^f$ donc g' est positive sur I car f' l'est et $g'' = (f'' + (f')^2) \times e^f$ est aussi positive sur I car f'' et $(f')^2$ le sont.

Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que la fonction $g^{(k)}$ est positive sur I pour tout entier $k \in [0; n]$, alors, par la formule de LEIBNIZ, on a $g^{(n+1)} = (g')^{(n)} = (f' \times e^f)^{(n)} = (f' \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f')^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)}$.

Or, par hypothèse sur f et hypothèse de récurrence, pour tout $k \in [0; n]$, les fonctions $f^{(k+1)}$ et $g^{(n-k)}$ sont positives sur I , donc par produit, multiplication par $\binom{n}{k} > 0$ et somme, la fonction $g^{(n+1)}$ est positive sur I .

On a bien établi par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}$ est positive sur I .

Ainsi, les hypothèses de la question **a.** sont vérifiées pour g qui est donc développable en série entière sur I .

c. Pour $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, $\tan(x) = P_0(\tan(x))$ et $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = P_1(\tan(x))$ avec $P_0 = X$ et $P_1 = X^2 + 1$. Si on suppose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, que $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x))$ avec P_n un polynôme de degré $n+1$ dont les coefficients sont des entiers naturels, alors $\tan^{(n+1)}(x) = \tan'(x) P_n'(\tan(x)) = P_{n+1}(\tan(x))$ avec $P_{n+1} = (1 + X^2) P_n'(X)$ qui est bien de degré $n+2$ et de coefficients entiers naturels car si $P_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k$, on a $P_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=0}^{n+1} k a_k X^{k+1} = \sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} X^k + \sum_{k=1}^{n+2} (k-1) a_{k-1} X^k$ ce qui donne l'expression $P_{n+1} = (n+1) a_n X^{n+1} + n a_{n-1} X^n + \left(\sum_{k=1}^n ((k+1) a_{k+1} + (k-1) a_{k-1}) X^k \right) + a_1$ qui est bien à coefficients entiers naturels. On conclut que principe de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x))$ avec $P_n \in \mathbb{N}[X]$ et $\deg(P_n) = n+1$.

Comme $\tan(x) \geq 0$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[$ et que $P_n \in \mathbb{N}[X], \forall n \in \mathbb{N}, x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[$, $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x)) \geq 0$ donc, d'après la question **a.**, la fonction \tan est développable en série entière sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right[$ et on peut écrire

$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[$, $\tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. Comme \tan est impaire, $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right]$, $\tan(x) = -\tan(-x)$

donc $\tan(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} (-x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. Cette relation est donc vraie pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et \tan est bien développable en série entière sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

10.96 a. Comme $X^2 - 2\operatorname{ch}(\alpha)X + 1 = X^2 - (e^\alpha + e^{-\alpha})X + 1 = (X - e^\alpha)(X - e^{-\alpha})$, la quantité $x^2 - 2\operatorname{ch}(\alpha)x + 1$ est donc strictement positive hors du segment $[e^{-\alpha}; e^\alpha]$ reliant les deux racines. Par conséquent, l'ensemble de définition de f_α est $D =]-\infty; e^{-\alpha}[\cup]e^\alpha; +\infty[$.

b. La fonction f_α est de classe C^1 sur D par opérations. Comme $f_\alpha(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2\operatorname{ch}(\alpha)x + 1)$ pour $x \in D$, on a $f'_\alpha(x) = \frac{x - \operatorname{ch}(\alpha)}{(x - e^\alpha)(x - e^{-\alpha})} = \frac{(x/2) - (e^\alpha/2) + (x/2) - (e^{-\alpha}/2)}{(x - e^\alpha)(x - e^{-\alpha})} = -\frac{1}{2(e^\alpha - x)} - \frac{1}{2(e^{-\alpha} - x)}$ donc $f'_\alpha(x) = -\frac{e^{-\alpha}}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\alpha}x} - \frac{e^\alpha}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^\alpha x}$. Pour tout réel $x \in]-e^{-\alpha}; e^{-\alpha}[$, $|e^{-\alpha}x| < 1$ et $|e^\alpha x| < 1$ donc on a $f'_\alpha(x) = -\frac{e^{-\alpha}}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-\alpha}x)^n - \frac{e^\alpha}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (e^\alpha x)^n$ grâce aux séries géométriques. On a donc la relation suivante, $\forall x \in]-e^{-\alpha}; e^{-\alpha}[$, $f'_\alpha(x) = -\frac{e^{-\alpha}}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-\alpha}x)^n - \frac{e^\alpha}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (e^\alpha x)^n$ qu'on peut regrouper et simplifier en $f'_\alpha(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{(n+1)\alpha} + e^{-(n+1)\alpha}}{2} x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{ch}((n+1)\alpha) x^n$. Les fonctions f'_α et f_α sont développables en série entière sur $]-e^{-\alpha}; e^{-\alpha}[$. En intégrant à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence, comme $f_\alpha(0) = 0$, on a $\forall x \in]-e^{-\alpha}; e^{-\alpha}[$, $f_\alpha(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{ch}((n+1)\alpha) \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

10.97 a. Comme f est dérivable sur \mathbb{R} , elle y est continue. Ainsi, par composition, $x \mapsto f(ax)$ est continue sur \mathbb{R} donc f' aussi ce qui montre que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} . Si on suppose que f est de classe C^n sur \mathbb{R} pour un entier $n \geq 1$, alors $x \mapsto f(ax)$ est aussi de classe C^n sur \mathbb{R} donc f' l'est encore et f est donc de classe C^{n+1} sur \mathbb{R} . Par principe de récurrence, f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sur \mathbb{R} donc f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = f(ax)$ donc $f''(x) = af'(ax) = af(a^2x)$. On continue, $f'''(x) = a^3 f'(a^2x) = a^3 f(a^3x)$ et $f^{(4)}(x) = a^6 f'(a^3x) = a^6 f(a^4x)$. Supposons, pour $n \in \mathbb{N}$, qu'on ait $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}} f(a^nx)$. Alors, en dérivant cette relation, on a $f^{(n+1)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}} \times a^n f'(a^nx) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(a^{n+1}x)$. Comme on a $f^{(0)}(x) = f(x) = a^{\frac{0(0-1)}{2}} f(a^0x)$, on a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}} f(a^nx)$.

b. Pour $b > 0$, f étant continue sur le segment $[-b; b]$, elle y est bornée et on peut poser $M_b = \|f\|_{\infty, [-b; b]}$.

Pour $x \in [-b; b]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt$. Pour $t \in [0; x]$, comme $f^{(n+1)}(t) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(a^{n+1}t)$ et que $a^nt \in [0; x] \subset [-b; b]$ car $|a| < 1$, on a $|f^{(n+1)}(t)| \leq a^{\frac{n(n+1)}{2}} M_b$.

Par inégalité triangulaire, on a $\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \right| \leq \left| \int_0^x \frac{|x|^n a^{\frac{n(n+1)}{2}} M_b}{n!} dt \right| = \frac{|x|^{n+1} a^{\frac{n(n+1)}{2}} M_b}{n!}$

donc, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} = 0$ car $|a| < 1$, on a $\forall x \in [-b; b]$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$. Mais

ceci étant vrai pour tout $b > 0$ et comme $f^{(k)}(0) = a^{\frac{k(k-1)}{2}} f(0)$, f est bien égale à sa série de TAYLOR sur \mathbb{R} et on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k}{k!}$.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et la fonction $g_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_\lambda(x) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k}{k!}$. Si on pose $a_k = \frac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}}{k!} > 0$,

on a $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a^k}{k+1}$ donc, comme $0 < a < 1$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 0$ donc, par D'ALEMBERT, le rayon de convergence de la série $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ vaut $R = +\infty$ ce qui justifie que la fonction g_λ est bien définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'_\lambda(x) = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a \frac{k(k-1)}{2} x^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a \frac{k(k+1)}{2} x^k}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a \frac{k(k-1)}{2} (ax)^k}{k!} = g_\lambda(ax)$. Avec ce qui précède, les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = g(ax)$ sont les fonctions proportionnelles à $g_1 : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a \frac{k(k-1)}{2} x^k}{k!}$, elles constituent donc la droite vectorielle $\text{Vect}(g_1)$.

10.98 a. Posons $a_n = \binom{2n}{n} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$, alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$. D'après D'ALEMBERT, le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n$ vaut $R = \frac{1}{4}$.

b. Si $x = \frac{1}{4}$, $a_n x^n = \binom{2n}{n} x^n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{4\pi n} (2n)^{2n} e^{2n}}{4^n (2\pi n) n^{2n} e^{2n}} \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ avec l'équivalent de STIRLING donc, par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum_{n \geq 0} a_n \left(\frac{1}{4}\right)^n$ diverge.

Si $x = -\frac{1}{4}$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est alternée et $\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{2(2n+1)}{4(n+1)} = \frac{4n+2}{4n+4} < 1$ d'après a. donc la suite $(|a_n x^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 puisqu'on vient de voir que $|a_n x^n| \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Ainsi, par le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n \geq 0} a_n \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ converge.

L'ensemble de définition de f est donc $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right[$.

c. On a vu en question a. que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$. En multipliant par x^n et en sommant, on a donc $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(2n+1)a_n x^n = 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on reconnaît, puisqu'on est dans l'intervalle ouvert de convergence, $f'(x) = 4xf'(x) + 2f(x)$ ou $(1-4x)f'(x) = 2f(x)$ donc f est solution sur $\left]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right[$ de (E) : $(1-4x)y' - 2y = 0$.

d. On résout classiquement cette équation différentielle linéaire homogène normalisée (E) d'ordre 1 et, comme une primitive de $a : x \mapsto \frac{2}{1-4x}$ est $A : x \mapsto -\frac{1}{2} \ln(1-4x)$ et puisque $f(0) = a_0 = 1$, on a $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right[$, $f(x) = e^{\frac{-\ln(1-4x)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

10.99 a. On calcule $a_2 = a_1 + a_0 = 2$, $a_3 = a_2 + 2a_1 = 4$, $a_4 = a_3 + 3a_2 = 10$, $a_5 = a_4 + 4a_3 = 26$ et on peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq a_n \leq 2(n-1)!$. On vient de faire l'initialisation.

Soit $n \geq 1$ tel que $0 \leq a_{n+1} \leq 2n!$ et $0 \leq a_n \leq 2(n-1)!$, comme $a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$, on a $0 + (n+1).0 \leq a_{n+2} \leq 2n! + 2(n+1)(n-1)! = 2(n-1)!(n+n+1) \leq 2(n-1)!(n(n+1)) = 2(n+1)!$ car $n+1 \leq n^2$ puisque $n \geq 1$. Par principe de récurrence double, on a $\forall n \geq 1$, $0 \leq a_n \leq 2(n-1)!$. Ainsi, pour $n \geq 1$, $0 \leq \frac{a_n}{n!} \leq \frac{2}{n}$ donc, par encadrement, $\left(\frac{a_n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

b. Comme la suite $\left(\frac{a_n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, elle est bornée, donc par définition du rayon de convergence d'une série entière, on a $R \geq 1$.

c. Les dérivations qui suivent sont valides sur l'intervalle ouvert de convergence. Pour $x \in]-R; R[$, on

a $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n a_n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n$ et $f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n a_{n+1}}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+2}}{n!} x^n$. Or, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+2} x^n}{n!} = \frac{a_{n+1} x^n}{n!} + \frac{(n+1) a_n x^n}{n!}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+2} x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1} x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1) a_n x^n}{n!}$ en sommant ce qui revient à $f''(x) = f'(x) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n a_n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!} = f'(x) + x f'(x) + f(x)$. Par conséquent, f est solution sur $] -R; R[$ de l'équation différentielle (E) : $y'' - (1+x)y' - y = 0$.

d. D'après la question précédente, on a $f''(x) - (1+x)f'(x) - f(x) = (f'(x) - (1+x)f(x))' = 0$. Comme $] -R; R[$ est un intervalle et que $f'(0) - (1+0)f(0) = a_1 - a_0 = 0$, on a donc $\forall x \in] -R; R[$, $f'(x) - (1+x)f(x) = 0$.

On en déduit en intégrant cette équation différentielle linéaire du premier ordre mise sous forme normalisée sans second membre, comme une primitive de $x \mapsto 1+x$ est $x \mapsto x + \frac{x^2}{2}$ sur l'intervalle $] -R; R[$, que l'on a

$\forall x \in] -R; R[$, $f(x) = e^{x + \frac{x^2}{2}}$ puisque $f(0) = a_0 = 1$.

Alors $\forall x \in] -R; R[$, $f(x) = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} x^i \right) \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j! 2^j} x^{2j} \right)$. Ces deux séries ont pour rayon $+\infty$ donc on peut

effectuer le produit de CAUCHY et obtenir $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i+2j=n} \frac{n!}{i! j! 2^j} \right) x^n$. En identifiant (par unicité) les coefficients entre les deux expressions de $f(x)$ sous forme de série entière, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_n}{n!} = \sum_{i+2j=n} \frac{1}{i! j! 2^j}$ donc

$$a_n = \sum_{i+2j=n} \frac{n!}{i! j! 2^j}. \text{ Puisque } 2j \leq n \text{ et } i = n - 2j, \text{ on a la formule } a_n = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2j)! j! 2^j}.$$

Pour information : on considère l'ensemble I_n des permutations σ de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui sont des involutions, c'est-à-dire qui vérifient $\sigma \circ \sigma = \text{id}_{\llbracket 1; n \rrbracket}$; et on pose $b_n = \text{card}(I_n)$. Alors, pour $n \geq 1$, on partitionne les involutions σ de $\llbracket 1; n+2 \rrbracket$ en deux catégories :

- celles pour lesquelles $\sigma(n+2) = n+2$ sont au nombre de b_{n+1} car il n'y a pas de choix à faire pour $\sigma(n+2)$ qu'on impose égal à $n+2$, ensuite σ induit alors sur $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ une involution de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$.
- celles telles que $\sigma(n+2) = k \neq n+2$ sont au nombre de $(n+1)b_n$ car pour les choisir de manière bijective, il y a $n+1$ choix pour l'entier k qui est l'image de $n+2$ par σ et, une fois ce choix effectué, cela implique que $\sigma(k) = \sigma(\sigma(n+2)) = n+2$ car σ doit être une involution, et on a alors b_n choix pour finir de déterminer σ qui doit induire sur $\llbracket 1; n+1 \rrbracket \setminus \{k\}$ une involution de cet ensemble.

Cette partition implique la relation $b_{n+2} = b_{n+1} + (n+1)b_n$ pour $n \geq 1$ et, comme $b_2 = 2 = 1+1 \cdot 1 = b_1 + 1 \cdot b_0$ en prenant comme convention que $b_0 = 1$, on a bien $\forall n \geq 0$, $b_{n+2} = b_{n+1} + (n+1)b_n$. On montre alors par une récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

On peut alors expliquer la relation (R) de manière combinatoire, en constatant qu'une involution σ de $\llbracket 1; n \rrbracket$ est une application telle que pour tout entier x entre 1 et n , et on a deux choix :

- soit $\sigma(x) = x$ et x est appelé un point fixe de σ .
- soit $\sigma(x) = y \neq x$ et alors, comme $\sigma^2 = \text{id}_{\llbracket 1; n \rrbracket}$, on a forcément $\sigma(y) = x$.

Ainsi, si $\sigma \in A_n$, le nombre f de points fixes de σ a la même parité que n de sorte qu'il existe $2j$ entiers de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui ne sont pas fixes par σ avec $f = n - 2j$ avec $0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. On peut donc écrire $A_n = \bigcup_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n,j}$ où

$A_{n,j} = \{\sigma \in A_n \mid \sigma \text{ admet } f = n - 2j \text{ points fixes}\}.$

Pour construire une involution σ de $A_{n,j}$:

- on choisit les $n - 2j$ éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui sont fixes par σ : $\binom{n}{n-2j} = \binom{n}{2j}$ choix.
- on choisit l'image y du plus petit élément x qui reste : $(2j-1)$ choix (et alors $\sigma(x) = y$ et $\sigma(y) = x$).
- on choisit l'image t du plus petit élément z qui reste : $(2j-3)$ choix etc...

Ainsi $\text{card}(A_{n,j}) = \binom{n}{2j} \times (2j-1) \times (2j-3) \times \dots \times 3 \times 1 = \frac{n!}{(n-2j)!(2j)!} \times \frac{(2j)!}{2^j j!}$ en multipliant en haut et en bas

par les termes pairs qui manquent. On retrouve bien $I_n = \text{card}(A_n) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \text{card}(A_{n,j}) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2j)!2^j j!}.$

10.100 a. Initialisation : f est solution de (E) donc f est dérivable par définition donc f est de classe C^0 sur \mathbb{R} .

Hérédité : supposons, pour un entier $n \in \mathbb{N}$, que f soit de classe C^n sur \mathbb{R} , alors $f' : x \mapsto f(x) + f(\lambda x)$ est aussi de classe C^n sur \mathbb{R} par somme et composition. Ainsi, f est de classe C^{n+1} sur \mathbb{R} .

Par principe de récurrence, f est de classe C^n sur \mathbb{R} pour tout entier n donc f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

b. Soit f solution de (E) telle que $f(0) = 0$, alors $f'(0) = \alpha f(0) + f(0) = 0$ et, plus généralement, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n+1)}(0) = \alpha f^{(n)}(0) + \lambda^n f^{(n)}(0) = 0$. Soit $a > 0$, alors si on note $M_p = \sup_{x \in [a; a]} |f^{(p)}(x)|$, on a avec

l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-a; a], \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{a^{n+1} M_{n+1}}{(n+1)!}$. Mais puisque

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-a; a], f^{(n+1)}(x) = \alpha f^{(n)}(x) + \lambda^n f^{(n)}(\lambda x)$ on a $M_{n+1} \leq (\alpha + 1)M_n$ et donc $M_n \leq (\alpha + 1)^n M_0$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-a; a], \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{a^{n+1} (\alpha + 1)^{n+1} M_0}{(n+1)!}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, f est développable en série entière sur $[-a; a]$ et $f = 0$ sur $[-a; a]$ pour tout $a > 0$: $f = 0$ sur \mathbb{R} .

c. Si f est développable en série entière (avec rayon $R > 0$) et solution de l'équation différentielle, alors $\forall x \in]-R; R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On remplace dans l'équation et $\forall x \in]-R; R[, \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} - \alpha a_n - \lambda^n a_n) x^n = 0$ donc, par unicité des coefficients dans une série entière de rayon strictement positif, $a_{n+1} = \frac{\alpha + \lambda^n}{n+1} a_n$.

Réciproquement, si on définit f par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant cette récurrence et par exemple $a_0 = 1$, on a bien $R = +\infty$ avec d'ALEMBERT car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\alpha + \lambda^n}{n+1} \right| = 0$ et f est solution de l'équation en remontant les calculs.

Si g est une solution quelconque de l'équation, alors posons $h = g - g(0)f$ où $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha + \lambda^k}{k+1} \right) x^n$ est la solution développable en série entière qu'on vient de trouver (valant 1 en 0). Comme h est de classe C^∞ et vaut 0 en 0 par construction, on a $h = 0$ d'après la question c. car h est solution de l'équation aussi.

Ainsi $g = g(0)f$. Par conséquent, $E = \text{Vect}(f)$.

10.101 a. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vaut par

définition $R = \sup \left(\{x \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n x^n)_{n \geq 0} \text{ est bornée}\} \right)$ avec par convention $R = +\infty$ si cet ensemble n'est pas majoré.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0; 1]$, on a $\frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n$ donc, par croissance de l'intégrale, on a l'encadrement

$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{2} dt = \frac{1}{2(n+1)} \leq a_n \leq \frac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n dt$ (1). Comme le rayon de convergence des deux séries

$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{2(n+1)}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+1}$ vaut classiquement 1, on peut conclure d'après le cours que $R = 1$. Par croissance de l'intégrale, si $n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0; 1]$, $0 \leq \frac{t^{n+1}}{1+t^2} \leq \frac{t^n}{1+t^2}$ donc $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ et la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, l'encadrement (1) montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Par critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n \geq 0} a_n (-1)^n$ converge alors que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge par minoration puisque $a_n \geq \frac{1}{2(n+1)}$ et que la série harmonique $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1}$ diverge. Ainsi, le domaine de définition de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est $[-1; 1[$.

c. Dans la relation (R) : $\frac{1}{(1-xt)(1+t^2)} = \frac{a}{1-xt} + \frac{bt}{1+t^2} + \frac{c}{1+t^2}$, pour $x \neq 0$, on multiplie par $1-xt$ et on prend $t = \frac{1}{x}$ et on trouve $a = \frac{x^2}{1+x^2}$. Dans (R), on multiplie par $1+t^2$ et on prend $t = i$ pour avoir $\frac{1}{1-ix} = \frac{1+ix}{1+x^2} = bi+c$ donc, comme b et c sont réels, on a $b = \frac{x}{1+x^2}$ et $c = \frac{1}{1+x^2}$. On peut aussi bien sûr procéder par identification. Alors, $\forall t \in [0; 1]$, $\frac{1}{(1-xt)(1+t^2)} = \frac{x^2}{(1+x^2)(1-xt)} + \frac{xt}{(1+x^2)(1+t^2)} + \frac{1}{(1+x^2)(1+t^2)}$ et cette relation marche encore pour $x = 0$.

d. Pour $|x| < 1$, la série de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $u_n(t) = \frac{x^n t^n}{1+t^2}$ converge normalement sur $[0; 1]$ car $\|u_n\|_{\infty, [0; 1]} \leq |x|^n$ et que la série géométrique $\sum_{n \geq 0} |x|^n$ converge car $|x| < 1$ donc on peut intervertir série et intégrale sur le segment $[0; 1]$, puisque les fonctions u_n sont toutes continues sur $[0; 1]$, pour avoir la relation $\forall x \in]-1; 1[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 u_n(t) dt \right) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right) dt = \int_0^1 \frac{dt}{(1-xt)(1+t^2)}$ car $\sum_{n=0}^{+\infty} (xt)^n = \frac{1}{1-xt}$ puisque $|xt| < 1$. D'après c., $\forall x \in]-1; 1[$, $S(x) = \frac{x}{1+x^2} \int_0^1 \frac{x dt}{1-xt} + \frac{x}{1+x^2} \int_0^1 \frac{t dt}{1+t^2} + \frac{1}{1+x^2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ par linéarité de l'intégrale donc $S(x) = \frac{x}{1+x^2} [-\ln(1-xt)]_0^1 + \frac{x}{2(1+x^2)} [\ln(1+t^2)]_0^1 + \frac{1}{1+x^2} [\text{Arctan}(t)]_0^1$ et on obtient donc $S(x) = \frac{-4x \ln(1-x) + 2x \ln(2) + \pi}{4(1+x^2)}$.

e. Les fonctions $v_n : x \mapsto u_n x^n$ sont toutes continues sur $[-1; 0]$ et, pour $x \in [-1; 0]$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ est alternée et la suite $(|v_n(x)|)_{n \geq 0}$ est décroissante et tend vers 0 car $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante, tend vers 0 et $|x| \leq 1$. Ainsi, par le critère spécial des séries alternées, on a $|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x) \right| \leq |v_{n+1}(x)| \leq u_{n+1}$ donc $\|R_n\|_{\infty, [-1; 0]} \leq u_{n+1}$ ce qui montre par encadrement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, [-1; 0]} = 0$ et que la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge uniformément vers S sur $[-1; 0]$. Par théorème, on a donc la continuité de S sur $[-1; 0]$ ce qui montre que $S(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \lim_{x \rightarrow -1^+} S(x) = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\pi}{8}$.

10.102 a. f est définie comme la somme de la série entière lacunaire $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ où $b_n = 1$ si n est un carré et $b_n = 0$ sinon. Comme $(b_n x^n)_{n \geq 0}$ est bornée si et seulement si $(b_{n^2} x^{n^2})_{n \geq 0} = (x^{n^2})_{n \geq 0}$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si $|x| \leq 1$, le rayon de convergence R de cette série entière vaut $R = 1$. Pour $x = \pm 1$, cette série est grossièrement divergente donc le domaine de définition de f vaut $I =]-1; 1[$.

b. En tant que somme d'une série entière de rayon 1, d'après le cours, f est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence, donc a fortiori dérivable sur $I =]-1; 1[$.

c. Comme on étudie f au voisinage de 1, on peut se contenter de prendre $x \in]0; 1[$, et de poser la fonction $h_x : t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln(x)}$ qui est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ par comparaison aux intégrales de RIEMANN

car $h_x(t) = e^{t^2 \ln(x)} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées ($\ln(x) < 0$).

Comme la fonction h_x est décroissante sur \mathbb{R}_+ , on a $\forall k \geq 1$, $\int_k^{k+1} h_x(t) dt \leq x^{k^2} = h_x(k) \leq \int_{k-1}^k h_x(t) dt$.

On somme pour k allant de 0 à $+\infty$ à gauche et de 1 à $+\infty$ à droite (l'intégrale et la série convergent) ce qui donne par CHASLES l'encadrement $\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt + h_x(0) = \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt + 1$.

En posant $t = \frac{u}{\sqrt{-\ln(x)}} = \varphi(u)$, φ étant une bijection strictement croissante de classe C^1 de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ ,

par changement de variable, on a $\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2 \ln(x)} dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-\pi}{\ln(x)}}$.

Par encadrement, comme $1 = o\left(\sqrt{\frac{1}{-\ln(x)}}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-\pi}{\ln(x)}} = +\infty$, on a l'équivalent $f(x) \sim_{1^-} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-\pi}{\ln(x)}}$.

d. Comme il existe une infinité de termes de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont supérieurs ou égaux à 1 (il y a une infinité de carrés parfaits), on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge, ce qui prouve que $R' \leq 1$. Comme

$a_n = \text{card} \{k \in \llbracket 0; \lfloor \sqrt{n} \rfloor \mid n - k^2 \text{ est un carré parfait}\}$, on a $a_n \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1 \leq \sqrt{n} + 1 \leq n + 1$ et comme la série entière $\sum_{n \geq 0} (n+1)x^n$ est de rayon 1, on a $R' \geq 1$. Par conséquent, $R' = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{\substack{(u,v) \in \llbracket 0; \lfloor \sqrt{n} \rfloor \rfloor^2 \\ u^2 + v^2 = n}} 1 = \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 0; n \rfloor \\ i+j=n}} b_i b_j$ (en posant $i = u^2$ et $j = v^2$) par définition des b_n . Par

exemple, $a_5 = b_0 b_5 + b_1 b_4 + b_2 b_3 + b_3 b_2 + b_4 b_1 + b_5 b_0 = 2$ car $b_2 = b_3 = b_5 = 0$ et $b_0 = b_1 = b_4 = 1$ ce qui correspond aux deux écritures $5 = 1 + 4 (= 1^2 + 2^2 = 2^2 + 1^2) = 4 + 1$. Par produit de CAUCHY de

deux séries entières, pour $x \in]-R'; R'[=]-1; 1[$, on a $f(x)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ avec

$c_n = \sum_{k=0}^n b_k b_{n-k} = \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 0; n \rfloor^2 \\ i+j=n}} b_i b_j = a_n$. Ainsi, $f(x)^2 = g(x)$ ce qui prouve que $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge pour

$x \in]-1; 1[$ donc que $R' \geq 1$ indépendamment de ce qui précède. On trouve à nouveau que $R' = 1$. D'après la question **c.**, on a même $g(x) = f(x)^2 \sim_{1^-} \frac{-\pi}{4 \ln(x)}$.

10.103 Déjà, la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est bien définie car u_0 est donné et la relation $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$ définit bien u_{n+1} connaissant les termes u_0, \dots, u_n . On peut montrer facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{N}$.

a. Comme $u_0 = 3$, on a $u_1 = u_0^2 = 9$ et $u_2 = 2u_0 u_1 = 54$. Ainsi, on a bien $0 \leq \frac{u_0}{0!} = 3 \leq 4 = 4^{0+1}$, $0 \leq \frac{u_1}{1!} = 9 \leq 16 = 4^{1+1}$ et $0 \leq \frac{u_2}{2!} = 27 \leq 64 = 4^{2+1}$. Soit $n \geq 3$ tel que $\forall k \in \llbracket 0; n \rfloor$, $0 \leq \frac{u_k}{k!} \leq 4^{k+1}$,

alors $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k u_{n-k} \geq 0$ car u_0, \dots, u_n sont positifs. De plus, par hypothèse de récurrence,

$u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k u_{n-k} = n! \sum_{k=0}^n \frac{u_k u_{n-k}}{k!(n-k)!} \leq n! \sum_{k=0}^n 4^{k+1} 4^{n+1-k} = (n+1)! 4^{n+2}$ donc $\frac{u_{n+1}}{(n+1)!} \leq 4^{n+2}$.

Par principe de récurrence forte, on a établi que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{u_n}{n!} \leq 4^{n+1}$.

b. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{u_n}{n!} \leq 4^{n+1}$ d'après **a.**, et puisque le rayon de convergence de la série entière

$\sum_{n \geq 0} 4^{n+1} x^n$ vaut $\frac{1}{4}$ car $(4^{n+1} x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leq \frac{1}{4}$, on en déduit que le rayon R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$ vérifie $R \geq \frac{1}{4}$. Ainsi, la fonction f , qui est la somme de cette série entière, est bien

définie sur $I =]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$.

c. On dérive terme à terme donc $\forall x \in I$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{u_n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n$ à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence et après changement d'indice. On a donc $\forall x \in I$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{u_k}{k!} \cdot \frac{u_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n$ car $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. On reconnaît un produit de CAUCHY, valide puisque $I \subset]-\mathbb{R}; \mathbb{R}[$, et on a $f'(x) = f(x)^2$. Par conséquent, f est bien solution sur I de l'équation (E) : $y' = y^2$.

d. Analyse : supposons que f ne s'annule pas sur I , alors $\forall x \in I$, $\frac{f'(x)}{f(x)^2} = 1 \iff \left(\frac{1}{f(x)} + x \right)' = 0$ donc $x \mapsto \frac{1}{f(x)} + x$ est constante sur l'intervalle I . Or $f(0) = 3$ donc $\forall x \in I$, $\frac{1}{f(x)} + x = \frac{1}{3}$ et $f(x) = \frac{3}{1-3x}$.

Synthèse : soit $g :]-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{3}{1-3x}$. g ne s'annule pas sur I , $g(0) = \frac{1}{3}$ et $g'(x) = \frac{9}{(1-3x)^2} = g(x)^2$. Ainsi, f et g sont solutions du même problème de CAUCHY (non linéaire donc hors programme) et sont donc égales sur I . Si on veut rester dans le programme, on décompose $\forall x \in]-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}[$, $g(x) = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} (3x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{n+1} x^n$. Posons, $v_n = n! 3^{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Par produit de CAUCHY dans $]-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}[$, on a $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{v_{n+1}}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{v_k}{k!} \frac{v_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n$. Par unicité du développement en série entière, il vient $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{v_k}{k!} \frac{v_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} v_k v_{n-k}$. Par récurrence forte, on montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n = n! 3^{n+1}$ car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont le même premier terme et la même relation de récurrence, à savoir $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} v_k v_{n-k}$.

10.104 a. $f : t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$ est continue sur $] -\infty; 1[$ en la prolongeant par continuité en 0 avec $f(0) = -1$ puisque $\ln(1-t) \sim_0 -t$. F est donc la primitive de $-f$ qui s'annule en 0 donc F est au moins définie sur $] -\infty; 1[$.

Si $x = 1$, $f(t) \sim_{1^-} \ln(1-t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ donc f est intégrable sur $[0; 1[$ et $F(1)$ existe par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Par conséquent, le domaine définition de F est $D =] -\infty; 1[$.

b. D'après le cours, $\forall t \in] -1; 1[$, $\ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$ donc $-f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$ (marche aussi si $t = 0$). Pour $x \in] -1; 1[$, en intégrant terme à terme sur le segment $[\widetilde{0}; x]$ inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, il vient $F(x) = \int_0^x (-f(t)) dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{n} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = S(x)$. Par définition de la convergence d'une intégrale, $F(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$. En posant $u_n : x \mapsto \frac{x^n}{n^2}$, on a $\|u_n\|_{\infty, [0; 1]} = \frac{1}{n^2}$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0; 1]$ et, puisque toutes les u_n sont continues sur $[0; 1]$, S est continue sur $[0; 1]$ donc $F(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = S(1) = \frac{\pi^2}{6}$. On a bien $\forall x \in [0; 1]$, $F(x) = S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

c. Soit $G :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x) \ln(1-x)$. Par opérations, la fonction G est dérivable sur $]0; 1[$. De plus, la fonction F est dérivable sur $]0; 1[$ avec $F'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$ donc, pour $x \in]0; 1[$, on a la relation $(F(x) + F(1-x) - G(x))' = F'(x) - F'(1-x) - G'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1-(1-x))}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = 0$ avec l'abus de notation usuel. Ainsi, la fonction $x \mapsto F(x) + F(1-x) - G(x)$ est constante sur l'intervalle $]0; 1[$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} (F(x) + F(1-x) - G(x)) = F(0) + F(1) - \frac{\pi^2}{6} = 0$ d'après b. et car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) \ln(1-x) = 0$ puisque $\ln(1-x) \sim_0 -x$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$, donc $\forall x \in]0; 1[$, $F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(x) \ln(1-x)$.

10.105 a. Initialisation : pour $n = 0$, $\forall x \in I$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{P_0(\sin(x))}{\cos^{0+1}(x)}$ en prenant $P_0 = X + 1$ qui est bien à coefficients dans \mathbb{N} par définition de la fonction f .

Pour $n = 1$, en dérivant, on a $f'(x) = \frac{\cos^2(x) + (\sin(x) + 1)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x) + 1}{\cos^2(x)}$ donc $f^{(1)}(x) = \frac{P_1(\sin(x))}{\cos^{1+1}(x)}$ avec $P_1 = X + 1$ à coefficients dans \mathbb{N} et de degré $n = 1$ et unitaire.

Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$ avec $P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{N}[X]$ de degré n avec $a_n = 1$. On dérive une fois de plus, toutes les fonctions étant de classe C^∞ sur I , et on obtient la relation $\forall x \in I$, $f^{(n+1)}(x) = \frac{\cos(x)P'_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)} + (n+1)\frac{\sin(x)P_n(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)}$ donc, après réduction au même dénominateur, $f^{(n+1)}(x) = \frac{\cos^2(x)P'_n(\sin(x)) + (n+1)\sin(x)P_n(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)} = \frac{P_{n+1}(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)}$ si on définit le

polynôme $P_{n+1} = (1 - X^2)P'_n + (n+1)XP_n = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} - \sum_{k=0}^n k a_k X^{k+1} + (n+1) \sum_{k=0}^n a_k X^{k+1}$ qui s'arrange en $P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}X^k - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)a_{k-1}X^k + (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}X^k$, puis, en regroupant les termes, en $P_{n+1} = a_n X^{n+1} + 2a_{n-1}X^n + \left(\sum_{k=1}^{n-1} [(k+1)a_{k+1} + (n+2-k)a_{k-1}]X^k \right) + a_1 \in \mathbb{N}[X]$ qui est bien unitaire, de degré $n+1$ et à coefficients dans \mathbb{N} .

Conclusion : par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{N}[X]$, $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$. De plus, s'il existait, pour $n \in \mathbb{N}$, un autre polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in I$, $f^{(n)}(x) = \frac{Q_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)} = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$, on aurait $\forall x \in I$, $P_n(\sin(x)) = Q_n(\sin(x))$ donc $P_n = Q_n$ car P_n et Q_n coïncident sur $] -1; 1[$ qui est infini. Ainsi, la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est unique et vérifie $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = (1 - X^2)P'_n + (n+1)XP_n$ et on a montré lors de la récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n est de degré n et unitaire.

b. Soit $x \in J = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$ par la formule de TAYLOR reste intégral. Or $\forall t \in [0; x] \subset J$, on a $(x-t)^n f^{(n+1)}(t) = (x-t)^n \frac{P_{n+1}(\sin(t))}{\cos^{n+2}(t)} \geq 0$ car $x-t \geq 0$, $\sin(t) \geq 0$ donc $P_{n+1}(\sin(t)) \geq 0$ car $P_n \in \mathbb{N}[X]$ et $\cos(t) > 0$. Ainsi, $\frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \geq 0$ donc $0 \leq S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} \leq f(x)$ ce qui montre que les sommes partielles de la série de TAYLOR de f en x sont majorées. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, cette série converge d'après le cours. Ceci montre que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ vérifie $R \geq \frac{\pi}{2}$. D'après le cours toujours, la série de TAYLOR de f converge donc sur l'intervalle ouverte de convergence $]R; R[$ qui contient I .

c. Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$, g est bien définie d'après la question précédente. La fonction f est dérivable sur I et $f'(x) = \frac{\sin(x) + 1}{\cos^2(x)} = \frac{(\sin(x) + 1)^2 + \cos^2(x)}{2\cos^2(x)} = \frac{f(x)^2 + 1}{2}$ donc on obtient $\forall x \in I$, $2f'(x) = f(x)^2 + 1$. Par la formule de LEIBNIZ, en écrivant $(2f'(x))^{(n)} = (f(x)^2 + 1)^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a la relation $2f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x)$. En particulier en prenant $x = 0$, on a la relation $2f^{(n+1)}(0) = 2P_{n+1}(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(0) f^{(n-k)}(0) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} P_k(0) P_{n-k}(0)$ donc $2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k \alpha_{n-k}}{n+1}$ en posant $\alpha_k = \frac{P_k(0)}{k!}$ si $n \geq 1$. On a aussi $2f'(0) = f(0)^2 + 1$ donc $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$.

Mais on a $\forall x \in I, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$ et, par produit de CAUCHY, $\forall x \in I, g(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \alpha_{n-k} \right) x^n$ d'où $g(x)^2 = \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \alpha_{n-k} \right) x^n = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) \alpha_{n+1} x^n = -1 + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \alpha_{n+1} x^n$ donc $g(x)^2 = -1 + 2g'(x)$. Les deux fonctions f et g sont donc solutions sur I de l'équation différentielle non linéaire $2y' = y^2 + 1$. Comme on n'a pas au programme de théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ non linéaire, on va poser les fonctions $a = \text{Arctan} \circ f$ et $b = \text{Arctan} \circ g$ qui sont dérivables sur I comme composées de fonctions dérivables. $\forall x \in I, a'(x) = \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} = \frac{1}{2} = \frac{g'(x)}{1+g(x)^2} = b'(x)$ donc, comme I est un intervalle, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I, a(x) = b(x) + C$. Or $a(0) = b(0) = \text{Arctan}(\alpha_0) = \frac{\pi}{4}$ donc

$C = 0$. Ainsi, $\forall x \in I, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ ce qui justifie que f est développable en série entière sur I .

De plus, si on avait $R > \frac{\pi}{2}$, alors $f = g$ serait de classe C^∞ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \subset]-\mathbb{R}; \mathbb{R}[$ donc, en particulier, f serait continue en $\frac{\pi}{2}$ alors que $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} f(x) = +\infty$. Ainsi, le rayon R de la série de TAYLOR de f vaut $R = \frac{\pi}{2}$.

Questions de cours :

- D'après le cours, on sait que $\forall x \in]-1; 1[, \text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.
- Pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^{n+1} sur l'intervalle I , pour tout $(a, b) \in I^2$, on a la formule de TAYLOR reste intégral suivante, $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt$.
- Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g : t \mapsto f(\cos(t), \text{Arctan}(t), 2^t)$. D'après la règle de la chaîne, comme $t \mapsto \cos(t)$, $t \mapsto \text{Arctan}(t)$ et $t \mapsto 2^t$ sont de classe C^1 sur \mathbb{R} , g l'est aussi et

$$g'(t) = -\sin(t) \frac{\partial f}{\partial x}(\cos(t), \text{Arctan}(t), 2^t) + \frac{1}{1+t^2} \frac{\partial f}{\partial y}(\cos(t), \text{Arctan}(t), 2^t) + \ln(2) 2^t \frac{\partial f}{\partial z}(\cos(t), \text{Arctan}(t), 2^t).$$

- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $(a, b) \in I^2$, alors $\forall y \in [\widetilde{f(a); f(b)}]$, il existe un réel $c \in [\widetilde{a; b}]$ tel que $f(c) = y$.

10.106 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $f_x : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_x(t) = \frac{t^x}{1+t^2}$ qui est continue sur \mathbb{R}_+^* . Comme $f_x(t) \sim_0 \frac{1}{t^{-x}}$,

par comparaison aux intégrales de RIEMANN, f_x est intégrable en 0 si et seulement si $-x < 1 \iff x > -1$.

De plus, $f_x(t) \iff \frac{1}{t^{2-x}}$ donc, de même, f_x est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $2-x > 1 \iff x < 1$.

Comme f_x est positive, $\int_0^{+\infty} f_x$ converge si et seulement si f_x est intégrable sur \mathbb{R}_+^* , c'est-à-dire intégrable en 0 et en $+\infty$. Par conséquent, le domaine de définition de f est $D =]-1; 1[$.

b. Pour $x \in D$, f_x est intégrable sur $[1; +\infty[$ d'après a. et $f_x(t) = \frac{t^x}{1+t^2} = \frac{e^{x \ln(t)}}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln(t))^n}{n!(1+t^2)}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $g_n : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = \frac{(\ln(t))^n x^n}{n!(1+t^2)}$ de sorte que $g(x) = \int_1^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) \right) dt$.

(H₁) $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge simplement sur $[1; +\infty[$ vers f_x (on en vient).

(H₂) Les fonctions g_n sont continues et intégrables sur $[1; +\infty[$ pour $n \in \mathbb{N}$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $g_n(t) \sim_{+\infty} \frac{(\ln(t))^n x^n}{n! t^2} = o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ par croissances comparées.

(H₃) La fonction f_x est continue sur $[1; +\infty[$.

(H₄) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_1^{+\infty} |g_n(t)| dt = \frac{|x|^n}{n!} \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^n}{1+t^2} dt \leq \frac{|x|^n}{n!} \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^n}{t^2} dt$. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^n}{t^2} dt$ et, avec $u : t \mapsto (\ln(t))^n$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{t}$ qui sont de classe C^1 sur $[1; +\infty[$ avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, on obtient pour $n \geq 1$, par intégration par parties, $J_n = [u(t)v(t)]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t}\right) n(\ln(t))^{n-1} \left(-\frac{1}{t}\right) dt = nJ_{n-1}$. Puisque $J_0 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{+\infty} = 1$, on a par une récurrence simple $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = n!$. Ainsi, $\int_1^{+\infty} |g_n(t)| dt \leq \frac{J_n |x|^n}{n!} = |x|^n$ et la série géométrique $\sum_{n \geq 0} |x|^n$ converge car $|x| < 1$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, $g(x) = \int_1^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^{+\infty} g_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en posant $a_n = \frac{1}{n!} \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)^n}{1+t^2} dt$ donc g est développable en série entière sur $] -1; 1[$.

c. Par la relation de CHASLES, $\forall x \in D$, $f(x) = \int_0^1 f_x(t) dt + \int_1^{+\infty} f_x(t) dt$. Dans l'intégrale $\int_0^1 f_x(t) dt$, on effectue le changement de variable $t = \frac{1}{u} = \varphi(u)$ avec φ qui est une bijection strictement décroissante de classe C^1 de $[1; +\infty[$ dans $]0; 1]$ et on a $\int_0^1 f_x(t) dt = \int_{+\infty}^1 \frac{(1/u)^x}{1 + \frac{1}{u^2}} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int_1^{+\infty} \frac{u^{-x}}{1+u^2} du = g(-x)$.

Ainsi, $f(x) = g(x) + g(-x)$ donc, comme g est développable en série entière sur $] -1; 1[$ d'après b., f l'est aussi et on a $\forall x \in D$, $f(x) = g(x) + g(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + (-1)^n a_n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_{2n} x^{2n}$. La fonction f est donc paire sur D , ce qu'on pouvait voir directement avec le même changement de variable $t = \frac{1}{u}$.

10.107 a. Soit $r > 0$ et $p \in \mathbb{N}$, par hypothèse, on a $f(re^{it}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int}$ car le rayon de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ vaut $R = +\infty$.

Ainsi, $f(re^{it})e^{-ipt} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int} e^{-ipt} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n-p)t} = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t) dt$ si $g_n : t \mapsto a_n r^n e^{i(n-p)t}$.

On a $\|g_n\|_{\infty, [0; 2\pi]} = |a_n| r^n$ et $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ converge absolument par le lemme d'ABEL car $r < R = +\infty$, donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement sur le segment $[0; 2\pi]$. Par le théorème d'intégration

terme à terme par convergence normale sur segment, $\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} g_n(t) dt$. Or on calcule $\int_0^{2\pi} g_n(t) dt = \left[\frac{a_n r^n e^{i(n-p)t}}{i(n-p)}\right]_0^{2\pi} = 0$ si $n \neq p$ et $\int_0^{2\pi} g_p(t) dt = 2\pi a_p r^p$.

On en déduit donc que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall r > 0$, $\int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} dt = 2\pi a_p r^p$.

b. Comme f est bornée sur \mathbb{C} , posons $M = \|f\|_{\infty, \mathbb{C}} = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$ et, par inégalité triangulaire sur les intégrales, $\left|\int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} dt\right| \leq \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| dt \leq 2\pi M$. D'après a., $|2\pi a_p r^p| \leq 2\pi M$ donc $|a_p| \leq \frac{M}{r^p}$. Comme ceci est vrai pour tout $r > 0$, en faisant tendre r vers $+\infty$ dans cette inégalité pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq |a_p| \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{M}{r^p} = 0$ donc $a_p = 0$. Ainsi, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = a_0$ donc f est constante.

Bien sûr, ceci est faux si f n'est que bornée sur \mathbb{R} comme en témoigne la fonction \cos par exemple.

c. Pour un entier $p \geq q + 1$ et un réel $r > 0$, toujours par inégalité triangulaire sur les intégrales, on obtient

$\left| \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ip t} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| dt \leq \int_0^{2\pi} (\alpha r^q + \beta) dt \leq 2\pi(\alpha r^q + \beta)$. Ainsi, avec la question **a.**, on a $|2\pi a_p r^p| \leq 2\pi(\alpha r^q + \beta)$ d'où $0 \leq |a_p| \leq \alpha r^{q-p} + \beta r^{-p}$. Encore une fois, comme $\lim_{r \rightarrow +\infty} (\alpha r^{q-p} + \beta r^{-p}) = 0$, en passant à la limite, on a $|a_p| = 0$ si $p > q$. Par conséquent, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{p=0}^q a_p z^p$ donc f est polynomiale.

d. Soit $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(z) = f(z)e^{-z}$. Comme f et \exp sont développables en série entière avec un rayon $+\infty$, par produit de CAUCHY, la fonction g est elle-même développable en série entière sur \mathbb{C} . Pour $z \in \mathbb{C}$, $|g(z)| = |f(z)||e^{-z}| = |f(z)|e^{-\operatorname{Re}(z)} \leq 1$ donc g est bornée sur \mathbb{C} ce qui, avec la question **b.**, montre que g est constante sur \mathbb{C} . Ainsi, il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $g(z) = f(z)e^{-z} = k$ d'où $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = ke^z$.

10.108 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction $u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n(2n+1)}$. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} x^2 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = x^2 = \ell.$$

• Si $|x| < 1$, on a $\ell < 1$ donc, par critère de D'ALEMBERT, $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ converge. Ainsi, $R \geq 1$.

• Si $|x| > 1$, on a $\ell > 1$ donc, par critère de D'ALEMBERT, $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ diverge. Ainsi, $R \leq 1$.

Par conséquent, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n(2n+1)}$ vaut $R = 1$.

b. Comme $|u_n(\pm 1)| \sim_{+\infty} \frac{1}{2n^2}$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n(\pm 1)$ converge absolument par comparaison aux séries de RIEMANN.

Le domaine I de définition de S est $I = [-1; 1]$.

c. D'après le cours, la fonction S (somme d'une série entière) est continue (et même de classe C^∞) au moins sur l'intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire dans notre cas sur $] -1; 1[$.

d. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|u_n\|_{\infty, I} = |u_n(1)| = \frac{1}{n(2n+1)} \sim_{+\infty} \frac{1}{2n^2}$ et que la série de RIEMANN $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge car $2 > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur I . Comme toutes les fonctions u_n sont continues sur I , par théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction S est continue sur I .

e. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n(2n+1)} = \frac{(2n+1) - 2n}{n(2n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}$ et le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n+1}}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ vaut aussi 1 donc, pour $x \in] -1; 1[$, on peut écrire $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ en séparant les sommes. On reconnaît des séries entières classiques et $S(x) = x \ln(1+x^2) + 2(\operatorname{Arctan}(x) - 1)$.

f. Comme la fonction S est impaire et continue sur $[-1; 1]$ donc en 1, on a $S(1) = S(-1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x)$ donc $S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x \ln(1+x^2) + 2(\operatorname{Arctan}(x) - 1)) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2} \sim 0,26 > 0$. Pour $x = \pm 1$, la série alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$ converge aussi par le critère spécial des séries alternées car $\left(\frac{1}{n(2n+1)} \right)_{n \geq 1}$ est décroissante et tend vers 0. On sait alors que sa somme $S(1)$ est du signe de son premier terme $\frac{(-1)^{1+1}}{1(2+1)} > 0$ donc $S(1) > 0$.

10.109 Déjà, la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est bien définie car a_0 est donné et la relation $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$ définit bien a_{n+1} connaissant les termes a_0, \dots, a_n . On peut montrer facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$.

a. Initialisation : comme $u_0 = 1$, $u_1 = u_0^2 = 1$ et $u_2 = 2u_0 u_1 = 2$. Ainsi, $0 \leq \frac{a_0}{0!} = 1 \leq 1$, $0 \leq \frac{a_1}{1!} = 1 \leq 1$.

Hérédité : soit $n \geq 2$ tel que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $0 \leq \frac{a_k}{k!} \leq 1$, alors $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k} \geq 0$ car a_0, \dots, a_n sont

positifs. Par hypothèse de récurrence, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k a_{n-k} = n! \sum_{k=0}^n \frac{a_k a_{n-k}}{k!(n-k)!} \leq n! \sum_{k=0}^n 1 = (n+1)!$ donc on a bien l'inégalité $\frac{a_{n+1}}{(n+1)!} \leq 1$.

Conclusion : par principe de récurrence forte, on a établi que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{a_n}{n!} \leq 1$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{a_n}{n!} \leq 1$, et puisque le rayon de convergence de la série entière géométrique $\sum_{n \geq 0} x^n$ vaut 1, d'après le cours, le rayon R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$ vérifie $R \geq 1$. Ainsi, la fonction f , qui est la somme de cette série entière, est bien définie sur $I =]-1; 1[\subset]-R; R[$.

b. On dérive terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence qui contient $] - 1; 1[$ d'après la question **a.** pour avoir $\forall x \in I, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{a_n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n$ à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence et après changement d'indice. On a donc $\forall x \in I, f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} \cdot \frac{a_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n$ car $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. On reconnaît un produit de CAUCHY, valide puisque $I \subset]-R; R[$, et on a $f'(x) = f(x)^2$.

Par conséquent, f est bien solution sur I de l'équation (E) : $y' = y^2$.

c. Analyse : supposons que f ne s'annule pas sur I , alors $\forall x \in I, \frac{f'(x)}{f(x)^2} = 1 \iff \left(\frac{1}{f(x)} + x \right)' = 0$ donc $x \mapsto \frac{1}{f(x)} + x$ est constante sur l'intervalle I . Or $f(0) = 1$ donc $\forall x \in I, \frac{1}{f(x)} + x = 1$ et $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Synthèse : soit $g :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{1-x}$, alors g ne s'annule pas sur I , $g(0) = 1$ et, pour $x \in I$, on a $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = g(x)^2$. Ainsi, f et g sont solutions du même problème de CAUCHY (non linéaire donc hors programme) et sont donc égales sur I .

Si on veut rester dans le programme, on décompose $\forall x \in]-1; 1[, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Posons, $v_n = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$ de sorte que $\forall x \in]-1; 1[, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{n!} x^n$. Par produit de CAUCHY et par unicité du développement en série entière dans $] - 1; 1[$, on a $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{v_{n+1}}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{v_k}{k!} \cdot \frac{v_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n$, il vient donc la relation $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{v_{n+1}}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{v_k}{k!} \cdot \frac{v_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} v_k v_{n-k}$. Par récurrence forte, on montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n = n!$ car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont le même premier terme et la même relation de récurrence, à savoir $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} v_k v_{n-k}$.

Bien sûr, on pouvait le conjecturer en calculant quelques termes initiaux de plus et le démontrer par récurrence forte sans passer par les séries entières.

10.110 a. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ donc, comme $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = e^{-1} = \frac{1}{e}$. D'après (C), on a donc $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0 = u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} n \ell$ par télescopage ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ donc que $u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{e}$.

Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{nx^n}{e}$ est égal à 1 car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)e}{en} = 1$ avec la règle

de D'ALEMBERT, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ vérifie aussi $R = 1$.

b. Si on note $S_k = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{i!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = S_{n+1}$, on a par télescopage

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} S_{k+1} = \sum_{j=1}^n S_j \text{ en posant } j = k+1 \text{ donc, comme } S_0 = 1 = u_0, \text{ on obtient}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n S_k$. Comme $S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e}$, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} S_n x^n$ vaut 1 comme celui de la série géométrique $\sum_{n \geq 0} x^n$. Par produit de CAUCHY, pour x dans l'intervalle ouvert de convergence

$$]-1; 1[, \text{ on a } \left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n 1 \cdot S_k \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = f(x) \text{ donc } \frac{g(x)}{1-x} = f(x) \text{ en posant}$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n. \text{ Mais, de même, pour } x \in]-1; 1[, \text{ on a } \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n 1 \cdot \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^n$$

car le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$ vaut $+\infty$ donc $\frac{e^{-x}}{1-x} = g(x)$. Ainsi, $\forall x \in]-1; 1[, f(x) = \frac{e^{-x}}{(1-x)^2}$.

c. Soit $\varepsilon > 0$, par convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Mais

$$\forall n \geq n_0, \left| \sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - \ell) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} (u_k - \ell) + \sum_{k=n_0}^{n-1} (u_k - \ell) \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} (u_k - \ell) \right| + \sum_{k=n_0}^{n-1} |u_k - \ell|$$

par inégalité triangulaire donc $\left| \sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell \right| \leq A + \sum_{k=n_0}^{n-1} |u_k - \ell| \leq A + \frac{(n - n_0)\varepsilon}{2} \leq A + \frac{n\varepsilon}{2}$ en posant

$$A = \left| \sum_{k=0}^{n_0-1} (u_k - \ell) \right| \geq 0. \text{ Or il existe un entier } n_1 \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_1, A \leq \frac{n\varepsilon}{2} \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\varepsilon}{2} = +\infty \text{ d'où}$$

$$\forall n \geq n_1, \left| \sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell \right| \leq \frac{n\varepsilon}{2} + \frac{n\varepsilon}{2} = n\varepsilon. \text{ Ainsi, } \sum_{k=0}^{n-1} u_k - n\ell \underset{+\infty}{=} o(n) \underset{+\infty}{=} o(n\ell) \text{ donc } \sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{+\infty}{\sim} n\ell.$$

10.111 a. La fonction $g : t \mapsto \frac{\text{th}(t)}{t^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et $g(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ donc la fonction g est intégrable

sur $[n; +\infty[$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN d'où l'existence de a_n pour tout entier $n \geq 1$.

Comme la fonction th est croissante sur \mathbb{R}_+ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{th}(t) = 1, \forall t \in [n; +\infty[, \text{th}(n) \leq \text{th}(t) \leq 1$ donc, par

croissance de l'intégrale, on a $\int_n^{+\infty} \frac{\text{th}(n)dt}{t^2} = \left[\frac{\text{th}(n)}{t} \right]_n^{+\infty} = \frac{\text{th}(n)}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{n} = \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Classiquement, par le critère de D'ALEMBERT par exemple, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ est égal à 1 donc, par équivalence, celui de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ vaut aussi $R = 1$.

Comme th est positive et que la suite d'intervalle $([n; +\infty[)_{n \geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion, $(a_n)_{n \geq 1}$

est décroissante et tend vers 0 en tant que reste d'une intégrale convergente. Par le critère spécial des séries

alternées, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$ converge et la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge par comparaison à la série harmonique. Ainsi, le domaine de définition de f est $[-1; 1[$.

b. Si $x \in [-1; 0]$, on vient de voir que la suite $(a_n |x|^n)_{n \geq 1}$ est décroissante et tend vers 0 donc $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$

converge par le critère spécial des séries alternées et $\forall n \geq 1, |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq |a_{n+1} x^{n+1}| \leq a_{n+1}$.

Ainsi, R_n est bornée sur $[-1; 0]$ et $\|R_n\|_{\infty, [-1; 0]} \leq a_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On a donc convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} g_n$

sur $[-1; 0]$ si $g_n : x \mapsto a_n x^n$ et donc continuité de f sur $[-1; 0]$ car les g_n sont continues sur $[-1; 0]$.

c. Comme $f(x) \underset{1^-}{\sim} -\ln(1-x)$ est équivalent à $f(x) + \ln(1-x) \underset{+\infty}{=} o(\ln(1-x))$, on va majorer la différence

$f(x) - (-\ln(1-x))$. Comme on sait que $\forall x \in]-1; 1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, il s'agit de majorer $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n - \frac{1}{n}\right)x^n$. Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\text{th}(n)}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ donc $\left|a_n - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1 - \text{th}(n)}{n}$ et $|f(x) + \ln(1-x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \text{th}(n)}{n} x^n$ pour tout $x \in [0; 1]$. Posons $b_n = \frac{1 - \text{th}(n)}{n}$ pour $n \geq 1$, alors $1 - \text{th}(n) = 1 - \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \frac{2e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-2n}$ donc $b_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2e^{-2n}}{n} = o(e^{-2n})$ et la série géométrique $\sum_{n \geq 1} e^{-2n}$ converge car $0 < e^{-2} < 1$.

Ainsi, $\forall x \in [0; 1]$, $|f(x) + \ln(1-x)| \leq B = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ ce qui montre que $f(x) \underset{1^-}{=} -\ln(1-x) + O(1)$ donc $f(x) \underset{1^-}{=} -\ln(1-x) + o(\ln(1-x))$ car $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) = -\infty$ et on conclut bien que $f(x) \underset{1^-}{\sim} -\ln(1-x)$.

10.112 a. On a $v_{2n+1} = 0$ car il n'existe aucun $(2n+1)$ -uplet $(a_1, \dots, a_{2n+1}) \in \{-1, 1\}^{2n+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{2n+1} a_k = 0$ car tous les a_k sont impairs donc $\sum_{k=1}^{2n+1} a_k$ a la parité de $2n+1$ donc est impair alors que 0 est pair.

b. $n=1$: il n'existe qu'un couple $(a_1, a_2) \in \{-1, 1\}^2$ tel que $a_1 + a_2 = 0$ et $\forall p \in [1; 2]$, $\sum_{k=1}^p a_k \geq 0$ et il s'agit de $(1, -1)$. Ainsi, $u_1 = 1$.

$n=2$: il n'y a que deux quadruplets $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \{-1, 1\}^4$ tels que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ et tels que $\forall p \in [1; 4]$, $\sum_{k=1}^p a_k \geq 0$ et il s'agit de $(1, 1, -1, -1)$, $(1, -1, 1, -1)$. Ainsi, $u_2 = 2$.

$n=3$: il n'y a que cinq sextuplets $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \in \{-1, 1\}^6$ tel que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0$ et tels que $\forall p \in [1; 6]$, $\sum_{k=1}^p a_k \geq 0$ et il s'agit de $(1, 1, 1, -1, -1, -1)$, $(1, 1, -1, 1, -1, -1)$, $(1, 1, -1, -1, 1, -1)$, $(1, -1, 1, 1, -1, -1)$ et $(1, -1, 1, -1, 1, -1)$. Ainsi, $u_3 = 5$.

c. Notons $U_{n+1} = \left\{ (a_1, \dots, a_{2n+1}) \in \{-1, 1\}^{2n+1} \mid \sum_{k=1}^{2n+1} a_k = 0 \text{ et } \forall p \in [1; 2n+2], \sum_{k=1}^p a_k \geq 0 \right\}$ et, pour $m \in [1; n+1]$, on note $U_{n+1}^m = \left\{ (a_1, \dots, a_{2n+2}) \in U_{n+1} \mid 2m = \text{Min} \left(\left\{ j \in [1; n+1] \mid \sum_{k=1}^{2j} a_k = 0 \right\} \right) \right\}$ (la parité de $\text{Min} \left(\left\{ j \in [1; n+1] \mid \sum_{k=1}^{2j} a_k = 0 \right\} \right)$ tient au fait que $\sum_{k=1}^j a_k$ a la parité de j). On a la partition

$U_{n+1} = \bigsqcup_{m=1}^{n+1} U_{n+1}^m$ de sorte que $u_{n+1} = \text{card}(U_{n+1}) = \sum_{m=1}^{n+1} \text{card}(U_{n+1}^m)$. Traitons trois cas :

- Si $m=1$ et si $(a_1, \dots, a_{2n+2}) \in U_{n+1}^1$, alors $a_1 = 1$ et $a_2 = -1$ donc U_{n+1}^1 est en bijection avec U_n en envoyant $(1, -1, a_3, \dots, a_{2n+2})$ sur (a_3, \dots, a_{2n+2}) . Ainsi, $\text{card}(U_{n+1}^1) = u_n = u_0 u_n$ car $u_0 = 1$.
- Si $m \in [2; n]$ et si $(a_1, \dots, a_{2n+2}) \in U_{n+1}^m$, alors $u_1 = 1$ et $u_{2m} = -1$ donc l'application qui à $(a_1, \dots, a_{2n+2}) \in U_{n+1}^m$ associe le couple $((a_2, \dots, a_{2m-1}), (a_{2m+1}, \dots, a_{2n+2}))$ définit une bijection entre les ensembles U_{n+1}^m et $U_{m-1} \times U_{n-m+1}$. En effet, la bijection réciproque est l'application qui à $((b_1, \dots, b_{2m-2}), (c_1, \dots, c_{2(n-m+1)}))$ associe $(1, b_1, \dots, b_{2m-2}, -1, c_1, \dots, c_{2(n-m+1)})$. Ainsi, $\text{card}(U_{n+1}^m) = \text{card}(U_{m-1} \times U_{n-m+1}) = \text{card}(U_{m-1}) \times \text{card}(U_{n-m+1}) = u_{m-1} u_{n-m+1}$.
- Si $m = n+1$ et si $(a_1, \dots, a_{2n+2}) \in U_{n+1}^{n+1}$, alors $a_1 = 1$ et $a_{2n+2} = -1$ donc U_{n+1}^{n+1} est en bijection avec U_n en envoyant $(1, a_2, \dots, a_{2n+1}, -1)$ sur (a_2, \dots, a_{2n+1}) . Ainsi, $\text{card}(U_{n+1}^{n+1}) = u_n = u_n u_0$.

Par conséquent, $u_{n+1} = u_0 u_n + \left(\sum_{m=2}^n u_{m-1} u_{n-m+1} \right) + u_n u_0 = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}$ en posant $k = m-1$.

d. Analyse : supposons que la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ a un rayon $R > 0$. Soit alors $f :]-R; R[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Pour $x \in]-R; R[$, on a $f(x)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k u_{n-k} \right) x^n$ par produit de CAUCHY donc, avec la relation de **c.**, on a $f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^n$ donc $xf(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} = f(x) - 1$. Ainsi, $f(x)$ est racine du polynôme $P_x = xX^2 - X + 1$ dont le discriminant vaut $\Delta = 1 - 4x$. Comme $f(x) \in \mathbb{R}$, on a forcément $\Delta \geq 0$ donc $x \leq \frac{1}{4}$. Ceci garantit déjà que $R \leq \frac{1}{4}$. On donc $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ ou $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = u_0 = 1$. Comme $g : x \mapsto 2xf(x) - 1$ est développable en série entière sur $] -R; R[$, elle y est continue et on sait d'après ce qui précède que $\forall x \in] -R; R[$, $g(x) = \pm \sqrt{1-4x}$. La continuité de g et le fait que g ne s'annule pas sur $] -R; R[$ montre que l'on a soit $\forall x \in] -R; R[$, $g(x) = \sqrt{1-4x}$ soit $\forall x \in] -R; R[$, $g(x) = -\sqrt{1-4x}$. Mais comme g vaut -1 en 0 , elle est négative sur $] -R; R[$ et on a donc $\forall x \in] -R; R[$, $g(x) = -\sqrt{1-4x}$ donc $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ si $x \neq 0$.

Synthèse : d'après le cours $\forall u \in]-1; 1[$, $\sqrt{1+u} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n)! u^n}{(2n-1)(n!)^2 4^n}$ (on le retrouve assez vite avec le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$) donc $\forall x \in]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, $\sqrt{1-4x} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)! x^n}{(2n-1)(n!)^2}$ ce qui montre que $\forall x \in]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[\setminus \{0\}$, $\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)! x^{n-1}}{2(2n-1)(n!)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+2)! x^n}{2(2n+1)((n+1)!)^2}$ qu'on va plutôt écrire $\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)! x^n}{n!(n+1)!}$. Posons $v_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ de sorte que l'on a $\forall x \in]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[\setminus \{0\}$, $g(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$. On pose $g(0) = v_0 = 1$. Comme $0g(0)^2 - g(0) + 1 = 0$ et que $\forall x \in]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[\setminus \{0\}$, $xg(x)^2 - g(x) + 1 = \frac{1 - 2\sqrt{1-4x} + (1-4x)}{4x} - \frac{2 - 2\sqrt{1-4x}}{4x} + \frac{4x}{4x} = 0$, on a bien $\forall x \in]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, $xg(x)^2 - g(x) + 1 = 0$. En effectuant un produit de CAUCHY sur $] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, et en identifiant les coefficients (les calculs ont déjà été faits dans la partie analyse), on trouve que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sum_{k=0}^n v_k v_{n-k}$. Comme $v_0 = u_0 = 1$ et que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence, par récurrence forte, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$. Ainsi, $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ est bien de rayon $R = \frac{1}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Par exemple, $u_0 = \frac{(2.0)!}{0!(0+1)!} = 1$, $u_1 = \frac{(2.1)!}{1!(1+1)!} = 1$, $u_2 = \frac{(2.2)!}{2!(2+1)!} = 2$ et $u_3 = \frac{(2.3)!}{3!(3+1)!} = 5$ qui confirme les calculs de la question **b.**. Et on a $u_4 = \frac{(2.4)!}{4!(4+1)!} = 14$ et $u_5 = \frac{(2.5)!}{5!(5+1)!} = 42$.

10.113 a. f est définie comme la somme de la série entière lacunaire $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ où $a_n = 1$ si n est un carré et $a_n = 0$ sinon. Comme $(a_n x^n)_{n \geq 0}$ est bornée si et seulement si $(a_{n^2} x^{n^2})_{n \geq 0}$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si $|x| \leq 1$, la rayon de R de cette série entière vaut $R = 1$. Pour $x = \pm 1$, cette série est grossièrement divergente donc le domaine de définition de f vaut $I =]-1; 1[$.

b. En tant que somme d'une série entière de rayon 1, d'après le cours, f est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence, donc a fortiori continue sur I .

c. Comme on étudie f au voisinage de 1, on peut se contenter de prendre $x \in]0; 1[$, et de poser la fonction

$h_x : t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln(x)}$ qui est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ par comparaison aux intégrales de RIEMANN car $h_x(t) = e^{t^2 \ln(x)} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées ($\ln(x) < 0$).

Comme la fonction h_x est décroissante sur \mathbb{R}_+ , on a $\forall k \geq 1$, $\int_k^{k+1} h_x(t) dt \leq x^{k^2} = h_x(k) \leq \int_{k-1}^k h_x(t) dt$. On somme pour k allant de 0 à $+\infty$ à gauche et de 1 à $+\infty$ à droite (l'intégrale et la série convergent) ce qui donne par CHASLES l'encadrement $\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt + h_x(0) = \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt + 1$.

En posant $t = \frac{u}{\sqrt{-\ln(x)}} = \varphi(u)$, φ étant une bijection strictement croissante de classe C^1 de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ , par changement de variable, on a $\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2 \ln(x)} dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-\pi}{\ln(x)}}$ d'après l'intégrale de GAUSS rappelée. Ainsi, on a l'équivalent $f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-\pi}{\ln(x)}}$ car $1 \underset{x \rightarrow 1^-}{=} o\left(\sqrt{\frac{1}{-\ln(x)}} puisque $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-\pi}{\ln(x)}} = +\infty$.$

10.114 a. Par construction, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$, ainsi, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{\alpha+n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell = 1$ donc, par critère de D'ALEMBERT, le rayon R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vaut $R = \frac{1}{\ell} = 1$.

b. On a $v_n - v_{n-1} = \left(\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{\alpha}{k} \right) \right) - \alpha \ln(n) - \left(\left(\sum_{k=1}^{n-1} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{k} \right) \right) - \alpha \ln(n-1) \right) = \ln \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right) - \alpha \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ pour tout entier $n \geq 2$ donc $v_n - v_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \alpha \left(-\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum_{n \geq 2} (v_n - v_{n-1})$ converge absolument donc converge.

c. Par dualité suite-série, grâce à la question précédente, la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel α . Or $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{k+\alpha}{k} \right) - \ln(n^\alpha) = -\ln(n^\alpha a_n)$ donc $a_n = \frac{e^{-v_n}}{n^\alpha}$. Mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-v_n} = \lambda = e^{-\alpha} > 0$ par continuité de l'exponentielle donc $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$.

d. En 1 : d'après c., comme $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$ et que les a_n sont positifs, la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$ converge. Par critère de RIEMANN, $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

En -1 : la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est alternée et la suite $(|a_n|)_{n \geq 0}$ tend vers 0 car $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$ et $\alpha > 0$. De plus, comme $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{\alpha+n+1} < 1$, la suite $(|a_n|)_{n \geq 0}$ est aussi décroissante. Ainsi, par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge pour toutes les valeurs de $\alpha > 0$.

10.115 a. La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est alternée et la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 donc,

par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, ce qui justifie l'existence de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

b. La suite $(|u_n x^{n+1}|)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{|x|^{n+1}}{2n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leq 1$ donc, par définition du rayon de convergence d'une série entière, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ vaut $R = 1$. Bien sûr, on aurait pu utiliser le critère de D'ALEMBERT. Ainsi, le domaine de définition D de I vérifie $] -1; 1[\subset D \subset [-1; 1]$.

$I(1)$ est bien définie car S existe d'après la question a.. Par contre, $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1}$ diverge car $\frac{1}{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n} > 0$

et la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Ainsi, $I(-1)$ n'existe pas et on a $D =]-1; 1]$.

c. Soit $x \in]0; 1[$: on pose $y = \sqrt{x} \in]0; 1[$ donc $I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n y^{2n+2} = y \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1}$ et on reconnaît une série entière classique, à savoir $f(x) = y \operatorname{Arctan}(y) = \sqrt{x} \operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$.

Soit $x \in]-1; 0[$: on pose $y = \sqrt{-x} \in]0; 1[$ donc $I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n (-1)^{n+1} y^{2n+2} = -y \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} y^{2n+1}$ donc $I(x) = -y \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} y^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^{2n}}{2n} \right) = -\frac{y}{2} (-2 \ln(1-y) + \ln(1-y^2)) = \frac{y}{2} \ln \left(\frac{1-y^2}{(1-y)^2} \right) = \frac{y}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right)$ et on reconnaît $I(x) = y \operatorname{Argth}(y) = \sqrt{-x} \operatorname{Argth}(\sqrt{-x})$.

Posons $f_n : x \mapsto u_n x^{n+1}$ définie sur $[0; 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(H₁) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0; 1]$.

(H₂) Pour $n \in \mathbb{N}$, en posant $R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ sur $[0; 1]$ (qui existe d'après **b.**), comme $(|f_k(x)|)_{k \geq 0}$ est décroissante et tend vers 0 pour tout $x \in [0; 1]$, le critère spécial des séries alternées montre que $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+2}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$ donc R_n est bornée sur $[0; 1]$ et $\|R_n\|_{\infty, [0; 1]} \leq \frac{1}{2n+3}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty, [0; 1]} = 0$ par encadrement : $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément (pas normalement) sur $[0; 1]$.

Par théorème, $I = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[0; 1]$ donc $I(1) = S = \lim_{x \rightarrow 1^-} I(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x} \operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4}$.

d. D'abord, I étant continue sur le segment $[0; 1]$, l'intégrale $\int_0^1 I(x) dx$ converge.

Méthode 1 : on pose $u : x \mapsto \frac{2}{3} x^{3/2}$ et $v : x \mapsto \operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $]0; 1]$ et,

comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)v(x) = 0$ car $u(x)v(x) \sim \frac{2x^2}{3}$, on a $\int_0^1 I(x) dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x) dx$ ce qui donne

$$\int_0^1 I(x) dx = \frac{2}{3} \times \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x dx}{1+x} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} [x - \ln(1+x)]_0^1 = \frac{\pi}{6} - \frac{1 - \ln(2)}{3} \sim 0,42.$$

Méthode 2 : comme $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur le segment $[0; 1]$ d'après **c.**, on peut intégrer terme

à terme et avoir $\int_0^1 I(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n x^{n+2}}{(2n+1)(n+2)} \right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(n+2)}$. Or on peut

décomposer $\frac{1}{(2n+1)(n+2)} = \frac{2}{3(2n+1)} - \frac{1}{3(n+2)}$ et $\int_0^1 I(x) dx = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$. Or il est

classique (et c'est la même méthode qu'au **c.**) que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} = 1 - \ln(2)$ et on

trouve, comme avec la méthode précédente, $\int_0^1 I(x) dx = \frac{2S}{3} - \frac{1 - \ln(2)}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{1 - \ln(2)}{3}$.

10.116 a. La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur \mathbb{R}^* par opérations et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$ car $\sin(t) \sim t$. Ainsi, f est continue sur \mathbb{R} donc en particulier sur \mathbb{R}_+ . De plus, en posant $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto -\cos(t)$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1; +\infty[$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$.

Ainsi, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} u(t)v'(t) dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} u'(t)v(t) dt$, c'est-à-dire que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$. Or cette dernière intégrale converge absolument par comparaison aux intégrales de

RIEMANN, donc elle converge, car $g : t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1; +\infty[$ et que $g(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Ainsi,

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge aussi.

b. On vient de voir que la fonction f est continue sur \mathbb{R} ce qui montre, par le théorème fondamental de l'intégration, que F est bien définie sur \mathbb{R} en tant que primitive de f qui s'annule en 0. De plus, on sait que

$\forall t \in \mathbb{R}, \sin(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}^*, f(t) = \frac{\sin(t)}{t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$ et cette formule marche aussi pour $t = 0$ car $1 = \frac{(-1)^0 t^{2 \cdot 0}}{(2 \cdot 0 + 1)!}$. Comme le rayon de convergence de $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!}$ vaut $R = +\infty$, on peut

intégrer terme à terme sur $\widetilde{[0; x]}$ qui est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ pour avoir $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k+1)!} \right) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1) \cdot (2k+1)!}$.

c. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto \exp(-xe^{-it})$ est continue sur le segment $J = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc l'intégrale

$I(x) = \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it})dt$ existe. On sait que $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ donc, en prenant $z = -xe^{-it}$, on

obtient $\forall t \in J, \exp(-xe^{-it}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $h_n : t \mapsto \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!}$.

Comme $\forall t \in J, |h_n(t)| = \frac{|x|^n}{n!}$, on a $\|h_n\|_{\infty, J} = \frac{|x|^n}{n!}$ et la série exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{|x|^n}{n!}$ converge donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} h_n$ converge normalement vers h sur le segment J . Comme toutes les h_n et h sont continues

sur J , le théorème d'intégration terme à terme sur segment montre que $I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!} dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons l'intégrale $L_n = \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^n x^n e^{-int}}{n!} dt$. On a le cas particulier $L_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}$

et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient $L_n = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \int_0^{\pi/2} e^{-int} dt = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \left[\frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^{\pi/2} = \frac{(-1)^n x^n}{n!} \times \frac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}$.

Comme on sait que $\operatorname{Re}(I(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(L_n)$ et que $\operatorname{Re}\left(\frac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}\right) = 0$ si $n \geq 2$ est pair et que l'on a

$\operatorname{Re}\left(\frac{e^{-in\pi/2} - 1}{-in}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{-i(2k+1)\pi/2} - 1}{-i(2k+1)}\right) = \frac{(-1)^k}{2k+1}$ si $n = 2k+1 \geq 1$ est impair, il ne reste dans la formule

ci-dessus que $\operatorname{Re}(I(x)) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \times \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1) \cdot (2k+1)!}$.

d. Par inégalité triangulaire sur les intégrales, $|I(x)| = \left| \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt \right| \leq \int_0^{\pi/2} |\exp(-xe^{-it})| dt$. Or

$\exp(-xe^{-it}) = e^{-x \cos(t)} e^{ix \sin(t)}$ donc $|\exp(-xe^{-it})| = e^{-x \cos(t)}$.

Méthode 1 : la fonction \cos est concave sur J car $\cos'' = -\cos \leq 0$ sur J donc $\forall t \in J, \cos(t) \geq 1 - \frac{2t}{\pi}$. Ainsi,

$e^{-x \cos(t)} \leq e^{-x} e^{2xt/\pi}$ donc $\forall x > 0, \int_0^{\pi/2} |\exp(-xe^{-it})| dt \leq e^{-x} \int_0^{\pi/2} e^{2xt/\pi} dt$. On en déduit donc que

$|I(x)| \leq e^{-x} \left[\frac{\pi}{2x} e^{2xt/\pi} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi e^{-x} (e^x - 1)}{2x} = \frac{\pi(1 - e^{-x})}{2x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(1 - e^{-x})}{2x} = 0$, par encadrement,

on obtient la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \exp(-xe^{-it}) dt = 0$.

Méthode 2 : soit $g : \mathbb{R} \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \exp(-xe^{-it})$ de sorte que $I(x) = \int_0^{\pi/2} g(x, t) dt$.

(H₁) pour tout $t \in J$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x, t) = 0 = a(t)$ car $\cos(t) > 0$.

(H₂) pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $h_x : t \mapsto g(x, t)$ et a sont continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

(H₃) pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $|g(x, t)| \leq 1 = \varphi(t)$ et φ est continue et intégrable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

D'après le théorème de convergence dominée à paramètre continu, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = \int_0^{\pi/2} a(t) dt = 0$.

D'après les questions précédentes, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Re}(I(x)) = \frac{\pi}{2} - F(x)$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = 0$, on a aussi

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(I(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - F(x) \right) = 0$. Ceci assure l'existence d'une limite finie de F en $+\infty$ et sa valeur

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$ qu'on note $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ (intégrale de DIRICHLET).

10.117 Posons $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, de sorte que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)(n+3)2^n}{(n+1)(n+2)2^{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \ell = \frac{1}{2}$ donc, d'après le cours et la règle de D'ALEMBERT, $R = \frac{1}{\ell} = 2$.

Posons, pour $x \in]-2; 2[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}$ (série géométrique).

On peut dériver terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire $] -2; 2[$, pour avoir $\forall x \in] -2; 2[$, $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}} = \frac{2}{(2-x)^2}$ puis $g''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)x^n}{2^{n+2}} = \frac{4}{(2-x)^3}$.

En prenant $x = 1$ dans cette dernière relation, on a directement $g''(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+2}} = 4$ donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} = 4 \times 2^2 = 16.$$

10.118 a. Analyse : supposons que la fonction paire $f = \frac{1}{\cos}$ est développable en série entière au voisinage de

0, il existe donc un réel $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que $\forall x \in]-r; r[$, $f(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$ (par parité). Comme le rayon R de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vérifie $R \geq r > 0$ par l'existence de $f(x)$ pour $x \in]-r; r[$, et par

produit de CAUCHY car le rayon de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ vaut $+\infty$, on a $\forall x \in]-r; r[$, $\cos(x) \times \frac{1}{\cos(x)} = 1$

donc $a_0 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $\sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{(-1)^k}{(2k)!} = 0$ par unicité des coefficients d'un développement en série entière,

ce qui donne $a_n = - \sum_{k=1}^n a_{n-k} \frac{(-1)^k}{(2k)!} = \sum_{k=1}^n a_{n-k} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}$.

Synthèse : il existe une unique suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $a_0 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $a_n = \sum_{k=1}^n a_{n-k} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}$.

Calculons les premiers termes de cette suite : on a $a_1 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{a_1}{2} - \frac{a_0}{24} = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24}$ et

$a_3 = \frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{24} + \frac{a_0}{720} = \frac{5}{48} - \frac{1}{48} + \frac{1}{720} = \frac{61}{720}$. Il semble que l'on ait $|a_n| \leq 1$.

• Initialisation : on vient de montrer que $\forall n \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$, on a $|a_n| \leq 1$.

• Hérité : soit $n \geq 4$, supposons que $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $|a_k| \leq 1$. Alors, $|a_n| = \left| \sum_{k=1}^n a_{n-k} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!} \right|$

donc $|a_n| \leq \sum_{k=1}^n \frac{|a_{n-k}|}{(2k)!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)!} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} = \operatorname{ch}(1) - 1 \sim 0,54 \leq 1$.

Par principe de récurrence, on peut conclure que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq 1$. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^{2n}$, qui est donc supérieur, d'après le cours, à celui de $\sum_{n \geq 0} x^{2n}$ qui vaut 1. Ainsi,

$R \geq 1$ et on peut définir $g :]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ par $\forall x \in]-1; 1[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$. Par produit de CAUCHY, comme

avant, $\forall x \in]-1; 1[$, $g(x) \cos(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \right) x^{2n} = 1$ donc

$g(x) = \frac{1}{\cos(x)} = f(x)$ et $f = \frac{1}{\cos}$ est donc développable en série entière, au moins sur $] -1; 1[$.

b. Si on avait $R > \frac{\pi}{2}$, avec le même calcul que précédemment, on aurait $\forall x \in]-R; R[, f(x) \times \cos(x) = 1$. Mais comme $x = \frac{\pi}{2} \in]-R; R[$, on aurait $f(x) \cos(x) = 0 = 1$. NON. Ou alors on pourrait dire que f est continue sur $] - R; R[$, notamment en $x = \frac{\pi}{2}$, ce qui contredit l'expression $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. Toujours est-il que $R \leq \frac{\pi}{2}$. En fait, $R = \frac{\pi}{2}$ mais c'est une autre histoire.

10.119 a. Pour $n \geq 1$, on partitionne les involutions σ de $\llbracket 1; n+2 \rrbracket$ en deux catégories :

- celles pour lesquelles $\sigma(n+2) = n+2$ sont au nombre de I_{n+1} car il n'y a pas de choix à faire pour $\sigma(n+2)$ qu'on impose égal à $n+2$, ensuite σ induit alors sur $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ une involution de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$.
- celles telles que $\sigma(n+2) = k \neq n+2$ sont au nombre de $(n+1)I_n$ car pour les choisir de manière bijective, il y a $n+1$ choix pour l'entier k qui est l'image de $n+2$ par σ et, une fois ce choix effectué, cela implique que $\sigma(k) = \sigma(\sigma(n+2)) = n+2$ car σ doit être une involution, et on a alors I_n choix pour finir de déterminer σ qui doit induire sur $\llbracket 1; n+1 \rrbracket \setminus \{k\}$ une involution de cet ensemble à n éléments.

Cette partition implique la relation $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$ pour $n \geq 1$ et, comme $I_2 = 2 = 1 + 1 \cdot 1 = I_1 + 1 \cdot I_0$ avec la convention choisie pour I_0 , on a bien : $\forall n \geq 0, I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

b. Comme les involutions sont des permutations et qu'il y a $n!$ permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$, on en déduit que $I_n \leq n!$ d'où $0 \leq \frac{I_n}{n!} \leq 1$. Comme la série entière $\sum_{n \geq 0} x^n$ a pour rayon 1, par comparaison, on a $R \geq 1$.

c. Les calculs qui suivent sont valides car le rayon de convergence R est supérieur à 1, on sait qu'on peut dériver terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence qui contient $] - 1; 1[$. Pour $x \in] - 1; 1[$,

$$(1+x)\varphi(x) = \varphi(x) + x\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n + nI_{n-1}}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n+1}}{n!} x^n = \varphi'(x).$$

d. On en déduit en intégrant cette équation différentielle linéaire du premier ordre mise sous forme normalisée sans second membre, comme une primitive de $x \mapsto 1+x$ est $x \mapsto x + \frac{x^2}{2}$ sur l'intervalle $] - 1; 1[$, que l'on a

$$\forall x \in] - 1; 1[, \varphi(x) = e^{x + \frac{x^2}{2}} \text{ puisque } \varphi(0) = I_0 = 1 \text{ par convention.}$$

e. Alors $\forall x \in] - 1; 1[, \varphi(x) = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} x^i \right) \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j! 2^j} x^{2j} \right)$. Ces deux séries ont pour rayon $+\infty$ donc on

peut effectuer le produit de CAUCHY et obtenir $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i+2j=n} \frac{n!}{i! j! 2^j} \right) x^n$. En identifiant (par unicité)

les coefficients entre les deux expressions de $S(x)$ sous forme de série entière, $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{I_n}{n!} = \sum_{i+2j=n} \frac{1}{i! j! 2^j}$

$$\text{donc } I_n = \sum_{i+2j=n} \frac{n!}{i! j! 2^j}. \text{ Puisque } 2j \leq n \text{ et } i = n - 2j, \text{ on a la formule } I_n = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2j)! j! 2^j}.$$

Pour expliquer cette relation de manière combinatoire, on peut constater qu'une involution σ de $\llbracket 1; n \rrbracket$ est une application telle que pour tout entier x entre 1 et n , on a deux choix :

- soit $\sigma(x) = x$ et x est appelé un point fixe de σ .
- soit $\sigma(x) = y \neq x$ et alors, comme $\sigma^2 = \text{id}_{\llbracket 1; n \rrbracket}$, on a forcément $\sigma(y) = x$.

Ainsi, si $\sigma \in A_n$, le nombre f de points fixes de σ a la même parité que n de sorte qu'il existe $2j$ entiers de

$\llbracket 1; n \rrbracket$ qui ne sont pas fixes par σ avec $f = n - 2j$ avec $0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. On peut donc écrire $A_n = \bigcup_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n,j}$ où

$A_{n,j} = \{\sigma \in A_n \mid \sigma \text{ admet } f = n - 2j \text{ points fixes}\}.$

Pour construire une involution σ de $A_{n,j}$:

- on choisit les $n - 2j$ éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui sont fixes par σ : $\binom{n}{n-2j} = \binom{n}{2j}$ choix.
- on choisit l'image y du plus petit élément x qui reste : $(2j - 1)$ choix (et alors $\sigma(x) = y$ et $\sigma(y) = x$).
- on choisit l'image t du plus petit élément z qui reste : $(2j - 3)$ choix etc...

Ainsi $\text{card}(A_{n,j}) = \binom{n}{2j} \times (2j - 1) \times (2j - 3) \times \cdots \times 3 \times 1 = \frac{n!}{(n - 2j)! (2j)!} \times \frac{(2j)!}{2^j j!}$ en multipliant en haut et en bas

par les termes pairs qui manquent. On retrouve bien $I_n = \text{card}(A_n) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \text{card}(A_{n,j}) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n - 2j)! 2^j j!}.$

10.120 a. On a deux types de déplacements possibles, vers le haut ou vers la droite. On doit en faire $2n$ pour

aller de $(0, 0)$ à (n, n) et il en faut n de chaque type. Cela fait donc $c_n = \binom{2n}{n}$ chemins possibles.

b. $n = 1$: il n'existe qu'un chemin $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1)$ avec cette propriété donc $d_1 = 1$.

$n = 2$: $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (2, 0) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2)$ et $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2)$ donc $d_2 = 2$.

$n = 3$: on dessine tous les chemins et on trouve $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (2, 0) \rightarrow (3, 0) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3)$, mais on obtient aussi celui-ci $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (2, 0) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3)$ et encore celui-là $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (2, 0) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3)$, enfin on a les deux derniers en commençant par $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3)$ et en terminant par celui qui rebondit sur la diagonale $(0, 0) \rightarrow (1, 0) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 3)$ donc $d_3 = 5$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $U_{n+1} = \left\{ c = (0, 0) \rightarrow \cdots \rightarrow (n + 1, n + 1) \text{ les chemins qui restent au dessus de la diagonale} \right\}$ et, on note $U_{n+1}^m = \left\{ c = (0, 0) \rightarrow \cdots \rightarrow (m, m) \rightarrow \cdots \rightarrow (n + 1, n + 1) \text{ les chemins qui restent au dessus de la diagonale et tel que } m \text{ est le plus petit entier } k \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket \text{ tel que } (k, k) \text{ appartient au chemin } c \right\}$ pour tout entier $m \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket$. Comme cet entier m existe par définition d'un chemin puisque $(n + 1, n + 1)$ appartient à ces chemins, on a la partition $U_{n+1} = \bigsqcup_{m=1}^{n+1} U_{n+1}^m$ de sorte que

$u_{n+1} = \text{card}(U_{n+1}) = \sum_{m=1}^{n+1} \text{card}(U_{n+1}^m)$. Traitons trois cas :

- Si $m = 1$, on crée une bijection entre U_{n+1}^1 et U_n , donc $\text{card}(U_{n+1}^1) = d_n = d_0 d_n$ car $d_0 = 1$, en envoyant le chemin $c = (0, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow \underbrace{(1, 1) \rightarrow \cdots \rightarrow (x_k, y_k)}_{\sigma'} \rightarrow \cdots \rightarrow (n + 1, n + 1) \in U_{n+1}^1$ sur le

chemin $c' = (0, 0) \rightarrow \cdots \rightarrow (x_k - 1, y_k - 1) \rightarrow \cdots \rightarrow (n, n) \in U_n$.

- Si $m \in \llbracket 2; n \rrbracket$, on a une bijection entre les ensembles U_{n+1}^m et $U_{m-1} \times U_{n-m+1}$ en envoyant le chemin $c = (0, 0) \rightarrow \underbrace{(0, 1) \rightarrow \cdots \rightarrow (m - 1, m)}_{\sigma'} \rightarrow \underbrace{(m, m) \rightarrow (m, m + 1) \rightarrow \cdots \rightarrow (n, n + 1) \rightarrow (n + 1, n + 1)}_{\sigma''}$ de

U_{n+1}^m sur le couple $(c', c'') \in U_{m-1} \times U_{n-m+1}$ où $c' = (0, 0) \rightarrow \cdots \rightarrow (x_i, y_i - 1) \rightarrow \cdots \rightarrow (m - 1, m - 1)$ appartient à U_{m-1} et $c'' = (0, 0) \rightarrow \cdots \rightarrow (x_k - m, y_k - m) \rightarrow \cdots \rightarrow (n - m + 1, n - m + 1) \in U_{n-m+1}$.

Ainsi, $\text{card}(U_n^m) = \text{card}(U_{m-1} \times U_{n-m+1}) = \text{card}(U_{m-1}) \times \text{card}(U_{n-m+1}) = d_{m-1} d_{n-m+1}$.

• Si $m = n + 1$, on crée une bijection entre U_{n+1}^{n+1} et U_n , ce qui donne $\text{card}(U_{n+1}^{n+1}) = d_n = d_n d_0$, en envoyant le chemin $c = (0, 0) \rightarrow \underbrace{(0, 1) \rightarrow \cdots \rightarrow (x_k, y_k) \rightarrow \cdots \rightarrow (n, n+1)}_{\sigma'} \rightarrow (n+1, n+1) \in U_{n+1}^{n+1}$

sur le chemin $c' = (0, 0) \rightarrow \cdots \rightarrow (x_k, y_k - 1) \rightarrow \cdots \rightarrow (n, n) \in U_n$.

Par conséquent, $d_{n+1} = d_0 d_n + \left(\sum_{m=2}^n d_{m-1} d_{n-m+1} \right) + d_n d_0 = \sum_{k=0}^n d_k d_{n-k}$ en posant $k = m - 1$. Cette relation est encore vraie pour $n = 0$ car $d_1 = d_0^2 = 1$.

d. Les chemins qui vont de $(0, 0)$ à (n, n) et qui restent toujours au-dessus de la diagonale $x = y$ font partie des chemins qu'on a dénombré à la question **a.**. Ainsi, par inclusion, on a $0 \leq d_n \leq c_n = \binom{2n}{n}$. Le rayon

de convergence de $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ vaut $\frac{1}{4}$ par D'ALEMBERT car $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!n!^2}{(2n)!(n+1)!^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$

tend vers $\ell = 4$. D'après le cours et l'encadrement précédent, on a donc $R \geq \frac{1}{4}$.

e. Pour $x \in]-R; R[$, on a $f(x)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n d_k d_{n-k} \right) x^n$ par produit de CAUCHY donc, avec la relation de **c.**, on a $f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+1} x^n$ donc $xf(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} d_{n+1} x^{n+1} = f(x) - d_0 = f(x) - 1$.

f. Ainsi, $f(x)$ est racine du polynôme $P_x = xX^2 - X + 1$ dont le discriminant vaut $\Delta = 1 - 4x$. Comme $f(x) \in \mathbb{R}$, on a forcément $\Delta \geq 0$ donc $x \leq \frac{1}{4}$. Ceci garantit que $R \leq \frac{1}{4}$ donc $R = \frac{1}{4}$ avec **d.**. On donc $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$

ou $f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = u_0 = 1$. Comme $g : x \mapsto 2xf(x) - 1$ est développable en série entière sur $] -R; R[$, elle y est continue et on sait d'après ce qui précède que $\forall x \in] -R; R[$, $g(x) = \pm \sqrt{1 - 4x}$. La continuité de g et le fait que g ne s'annule pas sur $] -R; R[$ montre que l'on a soit $\forall x \in] -R; R[$, $g(x) = \sqrt{1 - 4x}$ soit $\forall x \in] -R; R[$, $g(x) = -\sqrt{1 - 4x}$. Mais comme g vaut -1 en 0 , elle est négative sur $] -R; R[$ et on a donc $\forall x \in] -R; R[$, $g(x) = -\sqrt{1 - 4x}$ donc $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ si $x \neq 0$.

g. D'après le cours $\forall u \in] -1; 1[$, $\sqrt{1+u} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n)! u^n}{(2n-1)(n!)^2 4^n}$ (on le retrouve assez vite avec le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$) donc $\forall x \in] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, $\sqrt{1-4x} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)! x^n}{(2n-1)(n!)^2}$ ce qui montre que $\forall x \in] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[\setminus \{0\}$, $\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)! x^{n-1}}{2(2n-1)(n!)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+2)! x^n}{2(2n+1)((n+1)!)^2}$ qu'on va plutôt écrire $\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)! x^n}{n!(n+1)!}$ et, en identifiant par unicité d'un développement en série entière, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Par exemple, $d_0 = \frac{(2.0)!}{0!(0+1)!} = 1$, $d_1 = \frac{(2.1)!}{1!(1+1)!} = 1$, $d_2 = \frac{(2.2)!}{2!(2+1)!} = 2$ et $d_3 = \frac{(2.3)!}{3!(3+1)!} = 5$ qui confirme les calculs de la question **b.**. Et on a $d_4 = \frac{(2.4)!}{4!(4+1)!} = 14$ et $d_5 = \frac{(2.5)!}{5!(5+1)!} = 42$.

h. Cette probabilité, avec les données de l'énoncé, vaut $p_n = \frac{d_n}{c_n} = \frac{1}{n+1}$.

10.121 a. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suit une récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants et l'équation car-

actéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$. Ainsi, d'après le cours, il existe deux constantes A et B telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = A + B \cdot 2^n$. Comme $a_0 = A + B = 1$ et $a_1 = 3 = A + 2B$, on trouve sans peine $A = -1$ et $B = 2$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^{n+1} - 1$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| = a_n = 2^{n+1} - 1 \leq 2^{n+1} \leq 2^{2n} = 4^n$ car $n+1 \leq 2n$. Comme on a aussi $a_0 = 1 \leq 4^0 = 1$, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq 4^n$.

c. D'après le cours, le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum_{n \geq 0} 4^n x^n$ qui vaut $\frac{1}{4}$ car $(4^n x^n)_{n \geq 0}$ est bornée si et seulement si $|x| \leq \frac{1}{4}$. Par conséquent $R \geq \frac{1}{4}$. Comme $a_n \underset{+\infty}{\sim} 2^{n+1}$ et que le rayon de $\sum_{n \geq 0} 2^{n+1} x^n$ vaut $\frac{1}{2}$ pour les mêmes raisons, on peut conclure tout de suite que $R = \frac{1}{2}$.

d. Pour $x \in]-R; R[\supset]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, $\sum_{n=2}^{+\infty} (a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2})x^n = 0$ par hypothèse donc, comme les trois séries convergent, $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n - 3 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n = 0$. Posons $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour des x convenables, ce qui donne $(S(x) - a_1 x - a_0) - 3(xS(x) - a_0 x) + 2x^2 S(x) = 0$ ou encore $S(x) - 3x - 1 - 3xS(x) + 3x + 2x^2 S(x) = 0$ et on a la relation $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{2x^2 - 3x + 1}$ comme attendu.

e. Méthode 1 : comme $P = 2X^2 - 3X + 1 = (2X-1)(X-1)$, la fraction rationnelle $F = \frac{1}{P}$ se décompose en éléments simples sous la forme $F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{2X-1} = \frac{a(2X-1) + b(X-1)}{(2X-1)(X-1)}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifie donc le système linéaire $(2a+b=0 = a+b+1) \iff (a=1, b=-2)$. Ainsi, $\forall x \in]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, $S(x) = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$ donc $S(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et on a bien $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2^{n+1} - 1)x^n$. Par unicité des coefficients du développement en série entière d'une fonction, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^{n+1} - 1$ donc $a_n \underset{+\infty}{\sim} 2^{n+1}$ et on conclut, comme on l'a déjà fait, que $R = \frac{1}{2}$.

Méthode 2 : comme $P = 2X^2 - 3X + 1 = (2X-1)(X-1)$, on a $\forall x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$, $S(x) = \frac{1}{1-2x} \times \frac{1}{1-x}$ donc, par produit de CAUCHY, $S(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n 2^k \right) x^n$. Par unicité des coefficients du développement en série entière d'une fonction, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=0}^n 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$ et on conclut à nouveau que $R = \frac{1}{2}$.

10.122 La fonction f est définie sur \mathbb{R}^* où elle est de classe C^∞ par opérations.

Comme on sait que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, on a $f(x) = \frac{1}{2} + o(1)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$ et on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = \frac{1}{2}$. la fonction f ainsi prolongée est maintenant continue sur \mathbb{R} .

Pour $x \neq 0$, on a $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1 - \cos(x) - \frac{x^2}{2}}{x^3}$ mais on sait aussi que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ ce qui donne $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = o(1)$ et on a donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ donc f est dérivable sur \mathbb{R} et on a $f'(0) = 0$ ce qui logique car f est paire donc f' (quand elle existe) est impaire.

Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = \frac{x^2 \sin(x) - 2x(1 - \cos(x))}{x^4} = \frac{x \sin(x) - 2(1 - \cos(x))}{x^3}$ mais on a le développement

limité $x \sin(x) - 2(1 - \cos(x)) = x(x + o(x^2)) - 2\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\right) \underset{0}{\sim} x^2 - x^2 + o(x^3) = o(x)$ donc $f'(x) \underset{0}{=} o(1)$ ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$ donc que f' est continue en 0. Ainsi, f est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Mais on sait que \cos est développable en série entière sur \mathbb{R} avec $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+2)!}$. En prenant $x = 0$ dans cette somme, on obtient $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 0^{2k}}{(2k+2)!} = \frac{(-1)^0}{(2 \cdot 0 + 2)!} = \frac{1}{2}$ donc on retrouve la valeur de $f(0)$ trouvée ci-dessus. Par conséquent, f est en fait développable en série entière sur \mathbb{R} avec $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+2)!}$ et f est donc de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence \mathbb{R} .

10.123 a. Si $R = 0$, il n'y a rien à démontrer car $] - R; R[$ est vide.

Si $R > 0$, par produit de CAUCHY, comme $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est de rayon R donc que $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ converge absolument pour $x \in] - R; R[$ par le lemme d'ABEL, $S(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) x^n = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$ par hypothèse, ce qui donne $S(x)^2 = S(x) - x$ ou encore $S(x) = x + S(x)^2$.

b. À nouveau, si $R = 0$, il n'y a pas d'expression de $S(x)$ à trouver car $] - R; R[$ est vide.

Sinon, pour $x \in] - R; R[$, $S(x)^2 - S(x) + x = 0$ donc $S(x)$ est une racine réelle du polynôme $P_x = X^2 - X + x$. Comme le discriminant Δ_x du polynôme P_x vaut $\Delta_x = 1 - 4x$, et que $S(x)$ est un réel par construction, on a forcément $1 - 4x \geq 0$ donc $R \leq \frac{1}{4}$ et $\forall x \in] - R; R[$, $S(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$ ou $S(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2}$. Comme $f : x \mapsto 2S(x) - 1$ est développable en série entière sur $] - R; R[$, elle y est continue et on sait d'après ce qui précède que $\forall x \in] - R; R[$, $f(x) = \pm \sqrt{1 - 4x}$. La continuité de f et le fait que f ne s'annule pas sur $] - R; R[$ montre que l'on a soit $\forall x \in] - R; R[$, $f(x) = \sqrt{1 - 4x}$ soit $\forall x \in] - R; R[$, $f(x) = -\sqrt{1 - 4x}$. Mais comme f vaut -1 en 0, elle est négative sur $] - R; R[$ et on a donc $\forall x \in] - R; R[$, $f(x) = -\sqrt{1 - 4x}$ donc $S(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$.

D'après le cours, on sait que $x \mapsto \sqrt{1 - 4x}$ est développable en série entière sur $] - \frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$ car $u \mapsto \sqrt{1 - u}$ l'est sur $] - 1; 1[$. Ainsi, il existe une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in] - \frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, $T(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

On a bien sûr $\forall x \in] - \frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, $T(x)^2 - T(x) + x = \frac{1 - 2\sqrt{1 - 4x} + (1 - 4x)}{4} - \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} + x = 0$. En effectuant un produit de CAUCHY sur $] - \frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, et en identifiant les coefficients (les calculs ont déjà été faits ci-dessus),

on trouve que $v_0 = T(0) = 0$, $v_1 = T'(0) = 1$ et $\forall n \geq 2$, $b_{n+1} = \sum_{k=0}^n b_k b_{n-k}$. Ainsi, les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient les mêmes conditions initiales et la même relation de récurrence donc, par récurrence forte, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$. Ainsi, $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ est bien de rayon $R = \frac{1}{4}$ comme $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$.

c. D'après le cours $\forall u \in] - 1; 1[$, $\sqrt{1 + u} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n)! u^n}{(2n-1)(n!)^2 4^n}$ (on le retrouve assez vite avec le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$) donc $\forall x \in] - \frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, $\sqrt{1 - 4x} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)! x^n}{(2n-1)(n!)^2}$ ce qui montre que $\forall x \in] - \frac{1}{4}; \frac{1}{4}[$, $S(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)! x^n}{2(2n-1)(n!)^2}$. Comme $R = \frac{1}{4} > 0$ et que

$\forall x \in]-R; R[, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)! x^n}{2(2n-1)(n!)^2}$, par unicité des coefficients d'une fonction développable en série entière, on a a_0 (on le savait déjà) et $\forall n \geq 1, a_n = \frac{(2n)!}{2(2n-1)(n!)^2} = \frac{(2n)(2n-2)!}{2n^2((n-1)!)^2} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$.
Il vient $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 5, a_5 = 14, a_6 = 42$: ce sont les nombres de CATALAN.

10.8 Officiel de la Taupe

10.124 Par D'ALEMBERT (ou comparaison) par exemple, le rayon de convergence de cette série entière est égal à $R = 1$. De plus, par RIEMANN, il y a convergence en $x = 1$ et $x = -1$ donc $D = [-1; 1]$.

On sait de plus, même si ce n'est pas demandé, que $S(1) = \frac{\pi^2}{6}$ et $S(-1) = -\frac{\pi^2}{12}$. On a aussi $S(0) = 0$.

S est dérivable sur l'intervalle ouvert de convergence et $\forall x \in [0; 1[, S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{k} > 0$ donc S est strictement croissante sur $[0; 1[$. De plus, la convergence de cette série de fonctions est normale sur $[0; 1]$ car en notant $u_k : x \mapsto \frac{x^k}{k^2}$, on a $\|u_k\|_{\infty, [0; 1]} = \frac{1}{k^2}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge.

Comme les u_k sont continues, par théorème, la fonction S est continue sur $[0; 1]$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = S(1) = A$. Tout ce qui précède justifie que S réalise une bijection strictement croissante entre $[0; 1]$ et $[0; A]$.

Posons $S_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k^2}$, cette fonction S_n est strictement croissante (par dérivée) sur \mathbb{R}_+ , elle y est continue et elle admet les limites 0 et $+\infty$ aux bornes de \mathbb{R}_+ . Par le théorème de la bijection, l'équation (E_n) possède une unique solution sur \mathbb{R}_+ : on la note $x_n = S_n^{-1}(a) > 0$.

- La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante car $S_n(x_n) = a = S_{n+1}(x_{n+1}) > S_n(x_{n+1})$ et on se sert de la stricte croissance de S_n pour avoir $x_n > x_{n+1}$ si $n \geq 1$: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge car elle est minorée par 0.

- Supposons que $a > A$, alors comme $S_n(x_n) = a > A = S(1) > S_n(1)$, on a $x_n > 1$. Si on avait $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell > 1$, on aurait $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\ell) = +\infty$ car $\ell > R$; mais on aurait aussi $S_n(x_n) > S_n(\ell)$ ce qui montrerait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x_n) = +\infty$ et ceci est contraire à la construction de x_n : d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$.

- Supposons que $a \leq A$, alors pour $n \geq 1$, on a $S_n(x_n) = a = S(S^{-1}(a)) > S_n(S^{-1}(a))$ donc $x_n > S^{-1}(a)$. Supposons que $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n > S^{-1}(a)$, alors comme précédemment, on ne peut avoir que $\ell \leq 1$ et alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\ell) = S(\ell) > S(S^{-1}(a)) = a$. Mais comme $S_n(x_n) > S_n(\ell)$, on aurait aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x_n) > a$ ce qui contredit le fait que $S_n(x_n) = a$. Par conséquent, on ne peut avoir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = S^{-1}(a)$.

10.125 Cette série converge car $u_n > 0$ et $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(2n-1)}$ a $R = 1$ pour rayon de convergence par D'ALEMBERT par exemple, on note f sa fonction somme de la variable réelle définie sur $[-1; 1]$. En notant $u_n : x \mapsto \frac{x^n}{n(2n-1)}$, $\|u_n\|_{\infty, [-1; 1]} = \frac{1}{n(2n-1)} \sim \frac{1}{2n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^2}$ converge par RIEMANN donc la convergence est uniforme sur $[-1; 1]$ et f est continue sur $[-1; 1]$.

On décompose $\frac{1}{n(2n-1)}$ en éléments simples : $\forall n \geq 1, \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{n}$ donc, en faisant attention

au fait que les séries entières suivantes divergent en 1 : $\forall x \in]-1; 1[, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^n}{2n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

On connaît ces développements : $\forall x \in]0; 1[, f(x) = 2\sqrt{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n-1}}{2n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = 2\sqrt{x} \operatorname{Argth}(\sqrt{x}) + \ln(1-x)$

puis $\forall x \in]-1; 0[, f(x) = 2\sqrt{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{-x})^{2n-1}}{2n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -2\sqrt{-x} \operatorname{Arctan}(\sqrt{-x}) + \ln(1-x)$.

Dans l'énoncé, il est demandé $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n(2n-1)} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \operatorname{Argth}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \ln 2 = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1) - \ln 2$.

Mais par continuité de f en 1 et -1 , on a aussi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(2\sqrt{x} \operatorname{Argth}(\sqrt{x}) + \ln(1-x) \right)$ et aussi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(-2\sqrt{-x} \operatorname{Arctan}(\sqrt{-x}) + \ln(1-x) \right) = \ln(2) - \frac{\pi}{2}$.

$$2\sqrt{x} \operatorname{Argth}(\sqrt{x}) + \ln(1-x) = \sqrt{1-t} \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{1-t}} \right) + \ln(t) = 2\sqrt{1-t} \ln(1+\sqrt{1-t}) + \ln(t) \left(1 - \sqrt{1-t} \right)$$

en posant $x = 1 - t$. Or $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(1 - \sqrt{1-t} \right) \ln(t) = 0$ par DL et croissance comparée et $f(1)$ est trouvé (on peut le faire avec l'équivalent classique de la série harmonique grâce aux sommes partielles de cette série).

Au final : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n-1)} = \ln(2) - \frac{\pi}{2}$; $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)} = \ln(4)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n(2n-1)} = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2}+1) - \ln 2$.

10.126 Comme $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ est de degré $p \geq 1$ ($a_p \neq 0$), en écrivant $P(x) = a_p x^p \left(1 + \frac{a_{p-1}}{a_p x} + \dots + \frac{a_0}{a_p x^p} \right)$ pour $x \neq 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} |P(x)| = +\infty$ donc il existe bien $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|P(n)| \geq 1$.

Dès que $n \geq n_0$, on a donc $|P(n)a_n| \geq |a_n|$ et on sait qu'alors on peut conclure que $R' \leq R$.

La famille proposée est une famille de $p+1$ polynômes de degrés échelonnés donc elle est libre et comme $\dim(\mathbb{R}_p[X]) = p+1$, c'est une base de $\mathbb{R}_p[X]$. On décompose alors le polynôme P dans cette base $P = \sum_{k=0}^p \alpha_k P_k$

en notant $P_0 = 1$ et $P_k = \prod_{i=1}^k (X-i+1)$ si $k \geq 1$; alors $P(n)a_n x^n = \alpha_0 a_n x^n + \sum_{k=1}^p \alpha_k a_n n(n-1) \dots (n-k+1) x^n$.

On sait que la série dérivée (et par récurrence les dérivées successives) a le même rayon de convergence que la série initiale. Ainsi, si $|x| < R$, toutes les séries $\sum_{n \geq 0} a_n n(n-1) \dots (n-k+1) x^n$ convergent et on a

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n n(n-1) \dots (n-k+1) x^n = x^k \sum_{n=k}^{+\infty} a_n n(n-1) \dots (n-k+1) x^{n-k} = x^k f^{(k)}(x)$. Par somme de séries convergentes, la série $\sum_{n \geq 0} P(n)a_n x^n$ converge ce qui permet d'affirmer que $R' \geq R$ et enfin que $R = R'$.

De plus, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)a_n x^n = \alpha_0 f(x) + \sum_{k=1}^p \alpha_k \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n n(n-1) \dots (n-k+1) x^n \right) = \sum_{k=0}^p \alpha_k (x^k f^{(k)}(x))$.

Soit ici $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n!} x^n$ qui s'obtient en prenant $P = X^2 + 1$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$: le rayon est clairement $R = +\infty$. On décompose $X^2 + 1 = X(X-1) + X + 1$ et $f(x) = e^x$ donc, avec les résultats précédents : $g(x) = f(x) + x f'(x) + x^2 f''(x) = (x^2 + x + 1)e^x$ et on obtient alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 2^n + 2^n}{n!} x^n = g(2x) = (4x^2 + 2x + 1)e^{2x}$.

10.127 Si $x \neq 0$, en notant $u_n = \frac{n^2-1}{n+2} x^n$, on a $u_n \sim_n n x^n$ donc $(u_n)_{n \geq 0}$ bornée ssi $|x| < 1$ donc le rayon de convergence de cette série est $R = 1$. Comme $n^2 - 1 = (n+1)(n+2) - 3(n+2) + 3$, pour $x \in]-1; 0[\cup]0; 1[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{3}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}$ donc $S(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' - \frac{3}{1-x} - \frac{3}{x^2} (\ln(1-x) + x)$.

$$\text{Ainsi : } S(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{3}{1-x} - \frac{3}{x^2} (\ln(1-x) + x).$$

10.128 a. Si f est solution de (E), alors f est dérivable donc continue sur \mathbb{R} . Alors d'après l'équation f' l'est aussi donc f est de classe C^1 . Par une récurrence facile, on en déduit que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Soit $a > 0$, on pose le réel $M_p = \max_{x \in [-a; a]} |f^{(p)}(x)|$ (qui existe car $f^{(p)}$ est continue sur un segment). Comme on a $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, f^{(p+1)}(x) = f^{(p)}(x) + \lambda^p f^{(p)}(\lambda x)$, on a $M_{p+1} \leq 2M_p$ donc $M_p \leq 2^p M_0$ par récurrence immédiate. Par l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE, $\forall x \in [-a; a], \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{2^{n+1} M_0 |x|^{n+1}}{(n+1)!}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ par croissance comparée. Ainsi, f est développable en série entière sur \mathbb{R} .

b. Par récurrence avec la formule de la question précédente, on a $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = f(0) \prod_{i=0}^{k-1} (1 + \lambda^i) = a_k f(0)$.

Comme f solution de (E) est DSE sur \mathbb{R} , on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$ donc les solutions de (E) forment une droite (équation linéaire) engendrée par la fonction $\varphi : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \lambda^k) \frac{x^n}{n!}$.

c. Soit $v_n = \prod_{k=0}^n (1 + \lambda^k) = a_{n+1} > 0$ car $\lambda \in]-1; 1[$. Donc $\ln(v_n) = \sum_{k=0}^n \ln(1 + \lambda^k)$ avec $\ln(1 + \lambda^k) \underset{+\infty}{\sim} \lambda^k$ or $\sum_{n \geq 0} \lambda^n$ converge absolument donc $\sum_{n \geq 0} \ln(1 + \lambda^n)$ converge aussi absolument donc converge (vers ℓ) ce qui assure la convergence de la suite de l'énoncé vers un réel $K(\lambda) = e^\ell > 0$.

d. À faire.

10.129 a. La fonction $g : y \mapsto \frac{\ln(|1-y|)}{y}$ est continue sur $] -\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$ avec un prolongement par continuité en 0 avec $g(0) = -1$. Ainsi f est déjà définie sur $] -\infty; 1[$. De plus $\int_0^1 \frac{\ln(|1-y|)}{y} dy$ converge car $\varphi(y) = o\left(\frac{1}{\sqrt{1-y}}\right)$. De même $\int_1^x \frac{\ln(|1-y|)}{y} dy$ converge si $x > 1$. Par conséquent, f est définie sur \mathbb{R} .

b. Soit $x \in]-1; 1[$, alors $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-y)}{y} dy = -\int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^{n-1}}{n} dy$ et en posant $g_n(y) = \frac{y^{n-1}}{n}$, on a $\|g_n\|_{\infty, [0; x]} \leq |x|^{n-1}$ pour $n \geq 1$ avec $\sum_{n \geq 1} |x|^n$ qui converge donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge normalement sur le segment $[0; x]$ et on a donc $f(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x g_n(y) dy = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ et f est DSE.

On reprendre l'étude sur l'intervalle $[0; 1[$ mais on n'a plus convergence normale, par contre les fonctions g_n sont intégrables sur $[0; 1[$ avec g continue sur $[0; 1[$ et $\int_0^1 |g_n(y)| dy = \frac{1}{n^2}$ donc la série numérique $\sum_{n \geq 1} \int_0^1 |g_n|$ converge. Ainsi, d'après le TITT, on a $f(1) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 g_n = -\frac{\pi^2}{6}$.

10.130 a. En intégrant le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \text{Arcsin}'(x)$,

on a vu dans le cours que $\forall x \in]-1; 1[$, $\text{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n+1}$ si $b_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)}$.

b. Par produit de CAUCHY de séries numériques absolument convergentes, $f : t \mapsto (\text{Arcsin}(t))^2$ est développable en série entière sur $] -1; 1[$ mais les coefficients ne sont pas faciles à calculer avec cette méthode.

c. Par contre, $f'(t) = 2 \frac{\text{Arcsin}(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ donc $f''(t) = \frac{2}{1-t^2} + 2 \frac{t \text{Arcsin}(t)}{\sqrt{1-t^2}(1-t^2)}$ donc $(1-t^2)f''(t) = 2 + tf'(t)$ pour $t \in]-1; 1[$. Comme f est paire et $f(0) = 0$, il existe une suite réelle $(a_n)_{n \geq 0}$ telle que $a_0 = 0$ et $\forall t \in]-1; 1[$, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{2n}$. Alors $tf'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2na_n t^{2n}$, $f''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+2)(2n+1)a_{n+1} t^{2n}$ et $t^2 f''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2n(2n-1)a_n t^{2n}$. En reportant dans l'équation différentielle et en regroupant les termes, on a donc $\sum_{n=0}^{+\infty} ((2n+2)(2n+1)a_{n+1} - 2n(2n-1)a_n - 2na_n) t^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} ((2n+2)(2n+1)a_{n+1} - 4n^2 a_n) t^{2n} = 2$ et par unicité des coefficients (rayon $1 > 0$), on a $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \frac{4n^2}{(2n+2)(2n+1)} a_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{4(n-1)^2}{(2n)(2n-1)} a_{n-1} = \frac{4(n-1)^2}{(2n)(2n-1)} \times \frac{4(n-2)^2}{(2n-2)(2n-3)} a_{n-2} = \dots$ et on continue jusqu'à $a_2 = \frac{4 \times 1^2}{4 \times 3} a_1$ pour avoir $a_n = \frac{4^{n-1} (n-1)^2 \times \dots \times 1^2}{(2n) \times (2n-1) \times \dots \times 4 \times 3} a_1 = \frac{2^{2n-1} ((n-1)!)^2}{(2n)!}$. On peut bien sûr

prouver cette relation par récurrence une fois qu'on l'a conjecturée.

Ainsi, $\forall t \in]-1; 1[$, $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n-1}(n-1)!^2}{(2n)!} t^{2n}$. Comme dit plus haut, on peut aussi calculer, par produit de CAUCHY, $f(t)^2 = f(t) \times f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2(2k+1)} \times \frac{(2(n-k-1))!}{4^{n-k-1}((n-k-1)!)^2(2n-2k-1)} \right) x^{2n}$ car le terme en x^{2n} provient du produit des termes en $b_k x^{2k+1}$ et $b_{n-k-1} x^{2n-2k-1}$ (pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$) de la série entière de la question a.. En simplifiant et en identifiant par unicité du développement en série entière, on obtient la relation bizarre : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{2^{2n-1}(n-1)!^2}{(2n)!} = \frac{1}{4^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{2k}{k} \binom{2n-2k-2}{n-k-1}}{(2k+1)(2n-2k-1)}$.

10.131 a. $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ est clairement strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , $f_n(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(x_n) = 1$ car $1 \in [0; +\infty[$.

b. $\forall t \geq 0$, $f_{n+1}(t) \geq f_n(t)$ donc $1 = f_{n+1}(x_{n+1}) \geq f_n(x_{n+1})$ donc $f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n) = 1 \implies x_{n+1} \leq x_n$ car f_n est strictement croissante. Ainsi $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante minorée par 0 donc elle converge vers $\ell \geq 0$.

$\forall n \geq 1$, $f_n(x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{x_n^k}{k} = 1 \leq -\ln(1-x_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_n^k}{k}$ donc $x_n \geq 1 - \frac{1}{e}$. En passant à la limite, $\ell \geq 1 - \frac{1}{e}$.

Si on avait $\ell > 1 - \frac{1}{e}$, alors on aurait $-\ln(1-\ell) > 1$ donc il existe un entier n tel que la somme partielle

$\sum_{k=1}^n \frac{\ell^k}{k} > 1$. Mais par stricte décroissance de la suite, $x_n > \ell$ donc, comme f_n est strictement croissante :

$f_n(x_n) = \sum_{k=1}^n \frac{x_n^k}{k} > \sum_{k=1}^n \frac{\ell^k}{k} = f_n(\ell) > 1$ ce qui est impossible. Par conséquent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1 - \frac{1}{e}$.

10.132 f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* et par le développement limité $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, f est continue en 0.

Mais on a mieux, \cos est DSE sur \mathbb{R} et on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ donc si $x \neq 0$, on a

$f(x) = \frac{1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n)!}}{x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$. Cette relation étant aussi valable en 0 car

$f(0) = \frac{1}{2} = \frac{(-1)^0}{(2 \cdot 0 + 2)!}$, on a donc f développable en série entière sur \mathbb{R} donc de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$ et $f^{(2n)}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

10.133 a. On sait que $\forall x \in]-1; 1[$, $\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ avec rayon 1 et convergence sur $[-1; 1[$.

b. Les coefficients de cette série entière sont $a_{2n} = -\frac{1}{4n}$ si $n \geq 1$ et $a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n+2} = \frac{1}{4n+2}$ si $n \geq 0$. Par croissance comparée ou d'ALEMBERT, le rayon de cette série est donc $R = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1; 1[$, on a $S_{2n-2} = \sum_{k=0}^{2n-2} \left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \frac{x^{k+1}}{2k+2} \right) = \sum_{k=0}^{2n-2} \left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \frac{x^{2k+2}}{2k+2} - \frac{x^{2k+2}}{2k+2} - \frac{x^{k+1}}{2k+2} \right)$

et on sépare pour avoir $S_{2n-2} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{x^j}{j} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \frac{(x^2)^m}{m} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{x^p}{p}$. Il suffit ensuite de faire tendre n vers

$+\infty$ pour avoir $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right) = -\ln(1-x) + \frac{1}{2} \ln(1-x^2) - \frac{1}{2} \ln(1-x) = \frac{1}{2} \ln(1+x)$.

10.134 a. Soit $R > 0$ et f une fonction DSE sur $] -R; R[: \forall x \in] -R; R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On sait qu'on peut dériver

terme à terme sur $] - R; R[$ et avoir $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ donc $x f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$.

De même, $f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1}$ donc $x f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n$. Si f est solution de (E), on

remplace dans l'équation et on regroupe les termes : $\sum_{n=0}^{+\infty} (n(n+1) a_{n+1} + (n+1) a_{n+1} + n a_n - p a_n) x^n = 0$

et par unicité des coefficients dans un DSE, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)^2 a_{n+1} = (p-n) a_n$ (R).

Réciproquement, soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)^2 a_{n+1} = (p-n) a_n$, alors soit p est un entier et la suite est nulle à partir d'un certain rang, soit $p \notin \mathbb{N}$ et alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ donc le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vaut $R = +\infty$ dans les deux cas (par le critère de D'ALEMBERT. En

reportant dans l'équation, f donnée par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution non nulle de (E).

b. Si $p \in \mathbb{N}$, et si f est la solution DSE de (E) avec $a_0 = 1$ (celle de la question **a.**), on a $a_{p+1} = 0$ d'après la relation de récurrence (R). La même relation montrer alors que $\forall n \geq p, a_n = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k$ et f est une fonction polynomiale de degré p (car $a_p \neq 0$) de l'équation (E).

10.135 Comme $((-1)^n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leq 1$, le rayon de cette série est $R = 1$. On sait que

$$\forall x \in]-1; 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{2}.$$

Si $\sum_{n \geq 0} b_n$ converge, on a convergence de $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ pour $x = 1$ donc le rayon de R de cette série vérifie $R \geq 1$.

Supposons $R = 1$ et posons $f(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ pour $x \in]-1; 1[$. Posons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$ (reste d'une série convergente). En posant $R_{-1} = f(1)$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = R_{n-1} - R_n$.

On effectue une transformation d'ABEL (c'est hors programme mais je ne vois pas comment faire sans) :

$$\forall x \in [0; 1], f(x) - f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x^n - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n b_k (x^k - 1).$$

Or $\sum_{k=0}^n b_k (x^k - 1) = \sum_{k=0}^n (R_{k-1} - R_k) (x^k - 1) = \sum_{k=0}^n R_{k-1} (x^k - 1) - \sum_{k=0}^n R_k (x^k - 1)$. On change d'indice dans

la première somme et $f(x) - f(1) = \sum_{k=-1}^{n-1} R_k (x^{k+1} - 1) - \sum_{k=0}^n R_k (x^k - 1) = R_n (1 - x^{n+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} R_k (x^k - x^{k+1})$.

Il vient donc en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$: $f(x) - f(1) = - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n (x^n - x^{n+1})$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$, pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, |R_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Or $x \mapsto \sum_{n=0}^{n_0} R_n (x^n - x^{n+1})$ est

continue en 1 et vaut 0 en 1, $\exists \alpha > 0, \forall x \in [1-\alpha; 1], \left| \sum_{n=0}^{n_0} R_n (x^n - x^{n+1}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, $\forall n \geq n_0, \forall x \in [1-\alpha; 1] :$

$$|f(x) - f(1)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} R_n (x^n - x^{n+1}) \right| \leq \left| \sum_{n=0}^{n_0} R_n (x^n - x^{n+1}) \right| + \left| \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} R_n (x^n - x^{n+1}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

car $\forall x \in [0; 1], 0 \leq x^n - x^{n+1} \leq 1$ donc $\left| \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} R_n (x^n - x^{n+1}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} (x^n - x^{n+1}) = \frac{\varepsilon}{2} x^{n_0+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Par conséquent $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [1-\alpha; 1], |f(x) - f(1)| \leq \varepsilon$ et f est bien continue en 1.

10.136 Comme $\left(\frac{x^n}{3n+2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leq 1$ par croissances comparées, le rayon de

$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{3n+2}$ vaut $R = 1$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{3n+2}$ pour $x \in [-1; 1[$. En effet, la série converge si $x \in]-1; 1[$

d'après le cours et $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+2}$ converge aussi par le critère spécial des séries alternées car $\left(\frac{1}{3n+2}\right)_{n \geq 0}$ est décroissante et tend vers 0. Par contre, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{3n+2}$ diverge car $\frac{1}{3n+2} \sim \frac{1}{3n}$ et que la série harmonique diverge.

Posons $g(x) = x^2 f(x^3)$, alors $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$. Le rayon de cette série entière est aussi 1, on sait donc que g est dérivable sur $] -1; 1[$ et que $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} = \frac{x}{1-x^3}$. Ainsi, puisque $g(0) = 0$, par le théorème fondamental de l'intégration, $\forall x \in] -1; 1[$, $g(x) = \int_0^x g'(t) dt = \int_0^x \frac{t dt}{1-t^3}$.

Or, comme $(1-x^3) = (1-x)(1+x+x^2)$, on peut décomposer $\frac{x}{1-x^3} = \frac{a}{(1-x)} + \frac{bX+c}{1+x+x^2}$ avec a, b, c des réels. En réduisant au même dénominateur, en identifiant et en résolvant le système, on trouve sans peine $\frac{x}{1-x^3} = \frac{1}{3(1-x)} + \frac{x-1}{3(1+x+x^2)}$. Ainsi, pour $x \in] -1; 1[$, en faisant apparaître des dérivées usuelles,

$g(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{3(1-t)} + \frac{t-1}{3(1+t+t^2)} \right) dt = \frac{1}{3} \int_0^x \frac{dt}{1-t} + \frac{1}{6} \int_0^x \frac{(2t+1)dt}{1+t+t^2} - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2}$. En mettant sous forme canonique, $\frac{1}{1+t+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{(2/\sqrt{3})}{1 + \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$, on a l'expression de $g(x)$ à l'aide des fonctions usuelles

$g(x) = \left[-\frac{\ln(1-t)}{3} + \frac{\ln(1+t+t^2)}{6} - \frac{\text{Arctan}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} \right]_0^x = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{1+x+x^2}{(1-x)^2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \text{Arctan} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$ car $\text{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{6}$. On peut maintenant revenir à l'expression de $f(x)$.

Si $x = 0$, $f(x) = \frac{1}{2}$. Si $x \neq 0$, soit $\sqrt[3]{x}$ l'antécédent de x par la bijection $y \mapsto y^3$ de $] -1; 1[$ dans $] -1; 1[$, alors

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} g(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{6(\sqrt[3]{x})^2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2}{(1 - \sqrt[3]{x})^2} \right) - \frac{\sqrt{3}}{3(\sqrt[3]{x})^2} \text{Arctan} \left(\frac{2\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\sqrt{3}\pi}{18(\sqrt[3]{x})^2}.$$

10.137 Soit $r \in]0; 1]$, alors $(na_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée puisque $(na_n)_{n \geq 0}$ tend vers 0. Le rayon de convergence R de

$\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vérifie donc $R \geq 1$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $|na_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, si

$n \geq n_0$ et $x \in]0; 1[$, il vient $|f(x)| = \left| \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n x^n \right| \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. On en déduit que $|f(x)| \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{x^n}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. De plus, comme $\varphi : x \mapsto \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n| x^n - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{x^n}{n}$ est continue en 1, elle est bornée et on a $\varphi(x) = o(\ln(1-x))$. Il existe donc $n_1 \geq n_0$ tel que $\forall n \geq n_1$, $|\varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |\ln(1-x)|$.

En combinant ces deux renseignements, $\forall n \geq n_1$, $|f(x)| \leq \varepsilon |\ln(1-x)|$ et on a bien $f(x) = o(\ln(1-x))$.

Soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Alors (na_n) ne tend pas vers 0 alors que $f(x) = \text{Arctan}(x)$ (rayon de convergence 1) est bornée donc on a bien $f(x) = o(\ln(1-x))$.

Si on impose que tous les a_n sont positifs, il suffit de prendre $a_n = \frac{1}{n}$ si n est une puissance de 2 et

$a_n = 0$ sinon, alors la série entière est $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2^n}}{2^n}$ dont le rayon vaut 1 par croissance comparée. En notant

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{2^n}$, on a convergence normale sur $[-1; 1]$ donc f est continue sur $[-1; 1]$ donc bornée au voisinage de 1 ce qui garantit que $f(x) = o(\ln(1-x))$.

Conclusion : si, au voisinage de 1^- , $f(x) = o(\ln(1-x))$, on ne peut pas conclure que (na_n) tend vers 0.

10.138 • Avec cette hypothèse $\sum |a_n| R^n$ converge, la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon R converge normalement sur

$[-R; R]$ car en posant $u_n(x) = a_n x^n$, on a $\|u_n\|_{\infty, [-R; R]} = |a_n| R^n$. Comme toutes les u_n sont continues sur $[-R; R]$, la somme f de cette série est continue sur $[-R; R]$ donc a fortiori elle est continue en R .

• La fonction f est prolongeable par continuité (faire un DL) en 0 en posant $f(0) = -2$, elle est continue et strictement négative sur $] -1; 1[$. On a $f(t) \underset{1}{\sim} \ln(1-t)$ or \ln est intégrable sur $]0; 1]$ donc $t \mapsto \ln(1-t)$ l'est sur $]0; 1[$. De même $f(t) \underset{-1}{\sim} \ln(1+t)$ or \ln est intégrable sur $]0; 1]$ donc $t \mapsto \ln(1+t)$ l'est sur $] -1; 0]$. Ainsi f est intégrable sur $] -1; 1[$. Ensuite, on constate que $f(t) = -2 \frac{\text{Argth}(t)}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = -2$ donc f est

développable en série entière en $\forall t \in] -1; 1[$, $f(t) = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1}$.

Soit F la primitive de f qui s'annule en 0, on a $\forall t \in] -1; 1[$, $F(t) = -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2}$. L'intégrale à calculer

vaut $\lim_{t \rightarrow 1^-} F(t) - \lim_{t \rightarrow -1^+} F(t) = 2 \lim_{t \rightarrow 1^-} F(t) = -4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ (par imparité de F et convergence normale sur $[-1; 1]$ de la série associée). Alors $\int_{-1}^1 f(t) dt = -\frac{\pi^2}{2}$.

10.139 Par croissance comparée, la suite $\left(\frac{(-1)^n t^n}{\sqrt{1+n^2}} \right)_{n \geq 0}$ est bornée si et seulement si $t \in [-1; 1]$ donc le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n$ vaut $R = 1$. Par théorème, on a donc convergence normale sur tout

segment inclus dans $] -1; 1[$ donc en particulier sur tout segment de $]0; 1[$. La somme f est donc de classe C^∞ puisque la somme d'une série entière. $(v_n)_{n \geq 0}$ est clairement alternée et la suite $|v_n|$ est décroissante donc

$\sum_{n \geq 0} v_n$ converge par le CSSA. De plus, $|v_n| = \int_0^1 \frac{(-1)^n t^n}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{(n+1)\sqrt{1+n^2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge même absolument. Exercice trop facile, ce ne doit pas être le bon énoncé.

10.140 On sait que $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ converge absolument pour $x \in] -R; R[$. Mais il n'y a pas convergence normale ni uniforme de $\sum_{n \geq 0} u_n$ en général sur $] -R; R[$ (si $u_n : x \mapsto b_n x^n$ (exemple de la série géométrique de rayon $R = 1$)). Par contre, il y a convergence normale de $\sum_{n \geq 0} u_n$ sur tout segment inclus dans $] -R; R[$.

Soit $n \geq 1$ et \mathcal{P}_n l'ensemble de toutes les partitions de $\llbracket 1; n \rrbracket$ de sorte que $p_n = \text{card}(\mathcal{P}_n)$.

Si $n = 1$, $\mathcal{P}_1 = \{\{\{1\}\}\}$ donc $p_1 = 1$.

Si $n = 2$, $\mathcal{P}_2 = \{\{\{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}\}$ donc $p_2 = 2$.

Si $n = 3$, $\mathcal{P}_3 = \{\{\{1, 2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{1\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}\}$ donc $p_3 = 5$.

Pour $n \geq 1$, $\mathcal{P}_{n+1} = \bigcup_{j=0}^n \mathcal{P}_{n+1,j}$ avec $\mathcal{P}_{n+1,j} = \{\{u_1, \dots, u_p\} \in \mathcal{P}_{n+1} \mid \text{card}(u_i) = j+1 \text{ si } n+1 \in u_i\}$.

En effet, l'élément $n+1$ appartenant à $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$, il appartient à une seule partie u_i (avec $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$) de la partition $\{u_1, \dots, u_p\}$ de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ et le cardinal de u_i est au moins égal à 1 et au maximum égal à $n+1$ donc $\text{card}(u_i) = j+1$ avec $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Cette réunion est disjointe donc $\{\mathcal{P}_{n+1,0}, \dots, \mathcal{P}_{n+1,n}\}$ est une

partition de \mathcal{P}_{n+1} (mise en abîme) donc $p_{n+1} = \sum_{j=0}^n \text{card}(\mathcal{P}_{n+1,j})$.

Pour $j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ et pour construire un élément de $\mathcal{P}_{n+1,j}$, protocole de choix :

- on choisit les j éléments qui vont être avec $n+1$ dans la partie u_i de la partition : $\binom{n}{j}$ choix.

- il reste $n + 1 - (j + 1) = n - j$ entiers dans $\llbracket 1; n + 1 \rrbracket \setminus \mathcal{U}_p$ qu'il faut partitionner : on peut le faire de p_{n-j} façons par construction (seul le nombre de termes à partitionner compte).

Par conséquent, $\text{card}(\mathcal{P}_{n+1,j}) = \binom{n}{j} p_{n-j}$. C'est aussi vrai pour $j = n$ par convention car $p_0 = 1$ et

$\mathcal{P}_{n+1,n} = \{\{\llbracket 1; n + 1 \rrbracket\}\}$ donc $\text{card}(\mathcal{P}_{n+1,n}) = 1 = \binom{n}{n} p_0$. Alors, $\forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\text{card}(\mathcal{P}_{n+1,j}) = \binom{n}{j} p_{n-j}$.

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, il vient $p_{n+1} = \sum_{j=0}^n \text{card}(\mathcal{P}_{n+1,j}) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p_{n-j} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k$ en posant $k = n - j$.

On a même $p_1 = 1 = \binom{0}{0} p_0$ par convention d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k$.

On a $p_0 = p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 5$, $p_4 = 15 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} p_k = p_0 + 3p_1 + 3p_2 + p_3$. On constate que

$0 \leq p_n \leq n!$ pour $n \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$. Soit $n \geq 2$ tel que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $0 \leq p_k \leq k!$, alors $p_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k$ donc

$0 \leq p_{n+1} \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \leq n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e n! \leq (n+1)!$ car $e \sim 2,7 \leq n+1$.

Par principe de récurrence forte, on en déduit que $\forall n \geq 0$, $0 \leq p_n \leq n!$, c'est-à-dire que $0 \leq \frac{p_n}{n!} \leq 1$. Comme

le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} x^n$ est égal à 1, par comparaison, on trouve $R \geq 1$.

$\forall x \in]1; 1[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_{n+1}}{n!} x^n$ après changement d'indice. Ainsi, avec la relation

de récurrence trouvée ci-dessus, ceci se transforme en $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{p_k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n$. Par produit

de CAUCHY, puisque le rayon de $\sum_{n \geq 0} \frac{p_k}{k!} x^k$ est au moins égal à 1 et que celui de $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$ vaut $+\infty$, on a

$\forall x \in]-1; 1[$, $f'(x) = e^x f(x)$. On intègre classiquement, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in]-1; 1[$, $f(x) = \lambda e^{e^x}$. Or $f(0) = p_0 = 1$ donc $\lambda = \frac{1}{e}$. Par conséquent $\forall x \in]-1; 1[$, $f(x) = e^{e^x - 1}$. Puisque la fonction f est développable en série entière

(au moins sur $] -1; 1[$ mais certainement sur \mathbb{R}), on sait que $\forall x \in]1; 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_n}{n!} x^n$ ce qui donne, en identifiant les coefficients de cette série entière : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = f^{(n)}(0)$.

10.141 L'ensemble des $n!$ permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ se partitionne selon le nombre de points fixes. Notons $D_{n,k}$ le

nombre de permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ avec exactement k points fixes. Alors $n! = \sum_{j=0}^n D_{n,j}$. Or pour avoir une

permutation de $\llbracket 1; n \rrbracket$ avec j points fixes, il faut d'abord choisir ces j points fixes : $\binom{n}{j}$ possibilités ; puis construire pour les $n - j$ entiers restants une permutation sans nouveau point fixe : D_{n-j} possibilités.

Par "indépendance" de ces choix, on a donc $D_{n,j} = \binom{n}{j} D_{n-j}$ donc $n! = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} D_{n-j}$ ce qui donne bien

$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k = n!$ en effectuant le changement d'indice $k = n - j$.

Comme $D_n \leq n!$, on a $0 \leq \frac{D_n}{n!} \leq 1$ et le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} x^n$ vaut 1. On sait qu'alors on a $R \geq 1$.

$\forall x \in]-1; 1[$, $e^x S(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \times \frac{D_k}{k!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k \right) x^n$

par produit de CAUCHY. Ainsi $e^x S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ d'après le calcul combinatoire précédent et on

conclut que $\forall x \in]-1; 1[$, $S(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$. Par conséquent $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = +\infty$ donc $R = 1$.

Par produit de CAUCHY : $S(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$ pour $x \in]-1; 1[$. Par unicité des coefficients : $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d_n}{n!} = \frac{1}{e}$.

10.142 Posons $f_n : t \mapsto \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n$, alors comme $0 < \left| \frac{1+t^2}{2} \right| < 1$ si $t \in [0; 1[$ la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0; 1[$ et on a la domination $|f_n| \leq 1$ où $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0; 1[$. Par le théorème de convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

$\forall t \in [0; 1]$, on a $0 \leq t \leq \frac{1+t^2}{2}$ donc $\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \leq a_n$. Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge par RIEMANN et $R \leq 1$. Par le CSSA, $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge d'après ce qui précède donc $R \geq 1$. Ainsi : $R = 1$.

L'intervalle de convergence est $[-1; 1[$ comme on vient de le voir.

On peut continuer l'exercice en exprimant, pour $x \in]-1; 1[$, $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ sous forme d'une seule intégrale pour le calculer explicitement et en profiter pour avoir $f(-1)$; en effet :

Pour $x \in]-1; 1[$, la convergence de la série de fonctions $u_n(t) = x^n \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n$ est normale sur $[0; 1]$ car $\|u_n\|_\infty = |x|^n$ donc $f(x) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x(1+t^2)}{2} \right)^n \right) dt = \int_0^1 \frac{2dt}{2-x-xt^2}$ (série géométrique). Si $x \in]-1; 0[$, $f(x) = \frac{2}{2-x} \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{x}{x-2} t^2} dt = \left[\frac{2}{\sqrt{x(x-2)}} \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} t \right) \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{x(x-2)}} \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} \right)$.

Le critère spécial des séries alternées permet de majorer : $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \leq a_{n+1} |x|^{n+1} \leq a_{n+1}$. Ainsi, avec les notations habituelles : $\|R_n\|_{\infty, [-1; 0]} \leq a_{n+1}$. Or on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ donc on a convergence uniforme de la série entière sur $[-1; 0]$. Alors f est continue sur $[-1; 0]$:

$$f(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \text{ car } \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

10.143 Posons $u_n = \frac{2n^2+3n+1}{2^{n+1}}$, par croissance comparée, $u_n \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. D'ALEMBERT

montre que le rayon de $\sum_{n \geq 0} (2n^2+3n+1)x^n$ vaut $R = 1$. Posons donc $\forall x \in]-1; 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n^2+3n+1)x^n$.

On écrit $2n^2+3n+1 = 2(n+2)(n+1) - 3(n+1)$ pour avoir $f(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)x^n - 3 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$ donc $f(x) = 2 \left(\frac{1}{1-x} \right)'' - 3 \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{4}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} = \frac{1+3x}{(1-x)^3}$. Enfin, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) = 10$.

10.144 Posons $u_n = n^{(-1)^n}$, alors $\frac{1}{n} \leq u_n \leq n$ et les séries entières $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ et $\sum_{n \geq 0} nx^n$ ont classiquement pour rayon 1 donc le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} n^{(-1)^n} x^n$ est $R = 1$ par encadrement.

De plus, comme $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas bornée, l'intervalle de convergence est $] -1; 1[$.

En séparant termes pairs et impairs, on a $\forall x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2nx^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Comme $\forall x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, en dérivant et en multipliant par x : $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} 2nx^{2n} = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}$. On sait que $\forall x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$ et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x)$.

En sommant : $\forall x \in]-1; 1[$, $2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) (= \operatorname{Argth}(x))$.

Ainsi, $\forall x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.

10.145 Il est bien connu que $\forall x \in]-1; 1[$, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n x^n$. Or, classiquement en introduisant les termes pairs manquants $\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1/2)(-3/2) \cdots (-1/2 - n + 1)}{n!} = (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ donc

$\forall x \in]-1; 1[$, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)! x^n}{4^n (n!)^2}$. On dérive et on obtient :

$\forall x \in]-1; 1[$, $\frac{1}{2}(1-x)^{-3/2} = \frac{1}{2(1-x)^{3/2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(2n)! x^{n-1}}{4^n (n!)^2}$ donc $\frac{1}{(1-x)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(n+1)(2(n+1))! x^n}{4^{n+1} ((n+1)!)^2}$

qui se transforme en $\frac{1}{(1-x)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)(2n)! x^n}{4^n (n!)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) \binom{2n}{n} \frac{x^n}{4^n}$.

Par produit de CAUCHY, $\forall x \in]-1; 1[$, $\frac{1}{(1-x)^{3/2}} = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{(1-x)^{3/2}} = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(2j)! x^j}{4^j (j!)^2} \right)$

qui vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} \right) x^n$. En identifiant (les rayons sont strictement positifs)

les coefficients dans ces deux formes de $(1-x)^{-3/2}$, on trouve bien : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n} \binom{2n}{n}$.

10.146 La fonction $g : t \mapsto \frac{\ln(|1-t|)}{t}$ est continue sur $] -\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$ avec un prolongement par continuité en 0 avec $g(0) = -1$. Ainsi f est déjà définie sur $] -\infty; 1[$. De plus $\int_0^1 \frac{\ln(|1-t|)}{t} dt$ converge car $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$. De même $\int_1^x \frac{\ln(|1-t|)}{t} dt$ converge si $x > 1$. Par conséquent, f est définie sur \mathbb{R} .

Soit $x \in]-1; 1[$, alors $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = - \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n} dt$ et en posant $g_n(t) = \frac{t^{n-1}}{n}$, on a $\|g_n\|_{\infty, [0; x]} \leq |x|^{n-1}$ pour $n \geq 1$ avec $\sum_{n \geq 1} |x|^n$ qui converge donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge

normalement sur le segment $[0; x]$ et on a donc $f(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x g_n(t) dt = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ et f est DSE.

Le rayon de convergence est $R = 1$ en utilisant le critère de D'ALEMBERT par exemple.

On reprendre l'étude sur l'intervalle $[0; 1[$ mais on n'a plus convergence normale, par contre les fonctions g_n sont intégrables sur $[0; 1[$ avec g continue sur $[0; 1[$ et $\int_0^1 |g_n(y)| dy = \frac{1}{n^2}$ donc la série numérique $\sum_{n \geq 1} \int_0^1 |g_n|$

converge. Ainsi, d'après le TITT, on a $f(1) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 g_n = -\frac{\pi^2}{6}$.

10.147 Soit $n \geq 1$, pour faire une partition de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$, il faut choisir la partie U_p (p est quelconque) de cette partition qui contient $n+1$. On fixe donc $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$ tel que $\text{card}(U_p) = j+1$ et on choisit j entiers dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ pour tenir compagnie à $n+1$ dans U_p : $\binom{n}{j}$ choix. Ensuite, il reste $n+1 - (j+1) = n-j$ entiers dans $\llbracket 1; n+1 \rrbracket \setminus U_p$ qu'il faut partitionner : on peut le faire de p_{n-j} façons par construction. Ainsi, $p_{n+1} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p_{n-j} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k$ en posant $k = n-j$. On a même $p_1 = 1 = \binom{0}{0} p_0$ par convention.

On a $p_0 = p_1 = 1$, $p_2 = 2$ ("deux singletons" ou "paire"), $p_3 = 5$ ("trois singletons", 3 fois "singleton + paire" et "triplet"), $p_4 = 15$. Ainsi $0 \leq p_n \leq n!$ pour $n \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$. Soit $n \geq 4$ tel que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $0 \leq p_k \leq k!$,

alors $p_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k$ donc $0 \leq p_{n+1} \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \leq n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e \cdot n! \leq (n+1)!$.

Par récurrence forte : $\forall n \geq 0$, $0 \leq p_n \leq n!$. Comme le rayon de $\sum_{n \geq 0} x^n$ est égal à 1, d'après le cours : $R \geq 1$.

$\forall x \in]-1; 1[, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_{n+1}}{n!} x^n$ qui se transforme avec la relation de récurrence précédente en $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{p_k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n$. Par produit de CAUCHY : $\forall x \in]-1; 1[, f'(x) = e^x f(x)$. On intègre : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1; 1[, f(x) = \lambda e^{e^x}$. Or $f(0) = p_0 = 1$ donc $\lambda = \frac{1}{e}$. Par conséquent $\forall x \in]-1; 1[, f(x) = e^{e^x - 1}$.

10.148 Comme $\left(\frac{x^n}{3n+2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leq 1$ par croissance comparée, le rayon de cette série est $R = 1$. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{3n+2}$ pour $x \in [-1; 1[$ (il y a convergence pour $x = -1$ par CSSA et divergence pour $x = 1$ d'après RIEMANN).

Posons $g(x) = x^2 f(x^3)$, alors $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{3n+2}$. Le rayon de cette série entière est aussi 1, on sait donc que g est dérivable sur $] - 1; 1[$ et que $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} = \frac{x}{1-x^3}$.

On peut continuer cette méthode en intégrant à partir de $g(x) = \int_0^x g'(t) dt$ puisque $g(0) = 0$.

Autre méthode : on peut aussi écrire que pour $x \in]-1; 1[$, on a $\frac{x^n}{3n+2} = \int_0^1 x^n t^{3n+1} dt$ donc il vient $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n t^{3n+1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt$ en posant $u_n(t) = x^n t^{3n+1}$. La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur $[0; 1]$ car $\|u_n\|_{\infty, [0; 1]} = |x|^n$ et $\sum_{n \geq 0} |x|^n$ converge (série géométrique). Comme on

intègre sur un segment, on peut intervertir pour avoir $f(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n t^{3n+1} dt = \int_0^1 \frac{t dt}{1 - xt^3} dt$.

Si $x = 0$, $f(x) = \frac{1}{2}$. Si $x \neq 0$, soit $\sqrt[3]{3x}$ l'antécédent de x par la bijection $y \mapsto y^3$ sur $] - 1; 1[$, on effectue le

changement $u = \sqrt[3]{xt}$: $f(x) = \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} \int_0^{\sqrt[3]{x}} \frac{u du}{1 - u^3}$. Or $\frac{x}{1-x^3} = \frac{1}{3(1-x)} + \frac{x-1}{3(1+x+x^2)}$ par identification par exemple donc $f(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2} \int_0^{\sqrt[3]{x}} \frac{du}{1-u} + \frac{1}{6(\sqrt[3]{x})^2} \int_0^{\sqrt[3]{x}} \frac{(2u+1)du}{1+u+u^2} - \frac{1}{2(\sqrt[3]{x})^2} \int_0^{\sqrt[3]{x}} \frac{du}{1+u+u^2}$.

On obtient $f(x) = \frac{1}{6(\sqrt[3]{x})^2} \left[-2 \ln(1-u) + \ln(1+u+u^2) - 2\sqrt{3} \operatorname{Arctan} \left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^{\sqrt[3]{x}}$ car on a classiquement

$$\frac{1}{1+u+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \left(\frac{2u+1}{\sqrt{3}} \right)^2} \text{ en mettant sous forme canonique.}$$

10.149 Par récurrence immédiate, puisque $u_0 = 1 > 0$ et que $a > 0, b > 0$, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ ce qui justifie bien la définition de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par définition de v_n , on peut simplifier $v_{n+1} - v_n$: $v_{n+1} - v_n = \ln((n+1)^{b-a} u_{n+1}) - \ln(n^{b-a} u_n) = (b-a) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$. Ainsi, d'après l'hypothèse faite sur $(u_n)_{n \geq 0}$, $v_{n+1} - v_n = (b-a) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(\frac{n+a}{n+b} \right) = (b-a) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{a}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{b}{n} \right)$. On effectue un développement limité à l'ordre 2 et $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{=} \frac{(b-a)}{n} + \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, par comparaison et RIEMANN, la série $\sum_{n \geq 0} (v_{n+1} - v_n)$ converge. La dualité suite-série nous montre alors que $(v_n)_{n \geq 0}$ converge, disons vers $\ell \in \mathbb{R}$. Par continuité de \exp , comme $n^{b-a} u_n = e^{v_n}$, la suite $(n^{b-a} u_n)_{n \geq 0}$ converge donc vers $k = e^\ell > 0$. Alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{k}{n^{b-a}}$. Ainsi, $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si $b-a > 1$ par équivalence et critère de RIEMANN.

Si $x \neq 0$, $\left| \frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n} \right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{kn^{b-a}|x|}{k(n+1)^{b-a}} \underset{+\infty}{\sim} |x|$ d'après ce qui précède. Ainsi, si $|x| > 1$, $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ diverge grossièrement donc $R \leq 1$ et, si $|x| < 1$, $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ converge absolument d'après D'ALEMBERT donc $R \geq 1$.

Par conséquent, $R = 1$. Comme $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et que $u_n > 0$. Les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ convergent absolument. Ainsi, le domaine de définition de f est $I = [-1; 1]$. On a $f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Pour $n \geq 0$, comme $(n+b)u_{n+1} - (n+a)u_n = 0 \iff nu_{n+1} - nu_n = au_n - bu_{n+1}$ par hypothèse, on a la relation $(n+1)u_{n+1} - nu_n = u_{n+1} + au_n - bu_{n+1} = (1-b)u_{n+1} + au_n$ (R). Comme la suite $(nu_n)_{n \geq 0}$ tend vers 0 car $nu_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{b-a+1}}$ avec $b-a+1 > 0$, la dualité suite-série nous montre que $\sum_{n \geq 0} (n+1)u_{n+1} - nu_n$

converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)u_{n+1} - nu_n = -0.u_0 = 0$. Ainsi, en sommant la relation (R) pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient $(1-b)(f(1) - u_0) + af(1) = 0$. Par conséquent, il vient $f(1) = \frac{b-1}{b-a+1}$ car $u_0 = 1$.

10.150 Comme la suite $\left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right)_{n \geq 0}$ ne tend vers 0 car par exemple $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin\left(\frac{(6n+1)\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, la série

$\sum_{n \geq 0} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ diverge donc le rayon R de $\sum_{n \geq 0} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)x^n$ vérifie $R \leq 1$ car cette série diverge pour $x = 1$.

Mais comme $\left| \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right| \leq 1$ et que le rayon de $\sum_{n \geq 0} x^n$ vaut 1, on a aussi $R \geq 1$ d'après le cours. Ainsi $R = 1$.

Soit $x \in]-1; 1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)x^n = \text{Im} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{\frac{in\pi}{3}} x^n \right) = \text{Im} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-j^2 x)^n \right)$ car $e^{\frac{j\pi}{3}} = -j^2$. Ainsi, il vient $\text{Im} \left(\frac{1}{1+j^2 x} \right) = \text{Im} \left(\frac{1+jx}{1+jx+j^2 x+x^2} \right) = \frac{\sqrt{3}x}{2(1-x+x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)x^n$.

10.151 a. Posons $f_n : t \mapsto \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n$, alors comme $0 < \left| \frac{1+t^2}{2} \right| < 1$ si $t \in [0; 1[$ la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$

converge simplement vers la fonction nulle sur $[0; 1[$ et on a la domination $|f_n| \leq 1$ où $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0; 1[$. Par le théorème de convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = 0$.

b. Puisque $\forall t \in [0; 1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n \geq \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^{n+1}$, par croissance de l'intégrale, on a $a_n \geq a_{n+1}$ donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0. Par le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge.

c. $\forall t \in [0; 1]$, $0 \leq t \leq \frac{1+t^2}{2}$ (car $(1-t)^2 \geq 0$) donc $\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \leq a_n$. Ainsi, $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge par comparaison à la série harmonique et $R \leq 1$. D'après b., comme $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ converge, $R \geq 1$. Ainsi, $R = 1$.

d. Pour $x \in]-1; 1[$, soit $u_n : t \mapsto x^n \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur $[0; 1]$ car $\|u_n\|_{\infty, [0; 1]} = |x|^n$ (valeur maximale en $t = 1$) donc, comme on intègre sur le segment $[0; 1]$, on peut intervertir et avoir $f(x) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt$ ce qui donne, comme $\left| \frac{x(1+t^2)}{2} \right| < 1$, $f(x) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x(1+t^2)}{2} \right)^n \right) dt = \int_0^1 \frac{1}{1 - \frac{x(1+t^2)}{2}} dt = \int_0^1 \frac{2dt}{2-x-xt^2}$ (série géométrique).

Traitons trois cas :

- Si $x = 0$, $f(0) = a_0 = 1$.

- Si $x \in]-1; 0[$, $f(x) = \frac{2}{2-x} \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{x}{x-2} t^2} dt = \left[\frac{2}{\sqrt{x(x-2)}} \text{Arctan} \left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} t \right) \right]_0^1$ car $\frac{x}{x-2} > 0$ ce

qui donne $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x(x-2)}} \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{x}{x-2}} \right)$.

• Si $x \in]0; 1[$, $f(x) = \frac{2}{2-x} \int_0^1 \frac{1}{1 - \frac{x}{2-x} t^2} dt = \left[\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\frac{2}{2-x}} t}{1 - \sqrt{\frac{2}{2-x}} t} \right) \right]_0^1$ car $\frac{x}{2-x} > 0$ ce qui

donne $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\frac{2}{2-x}}}{1 - \sqrt{\frac{2}{2-x}}} \right)$.

e. Pour $x \in [-1; 0]$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est alternée car $a_n > 0$ et la suite $(a_n |x|^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et

tend vers 0 d'après **a.** donc, par le critère spécial des séries alternées, en notant $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$, on a

$|R_n(x)| \leq a_{n+1} |x|^{n+1} \leq a_{n+1}$ donc $\|R_n\|_{\infty, [-1; 0]} \leq a_{n+1}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, on a convergence uniforme de $\sum_{n \geq 0} u_n$ sur $[-1; 0]$ en notant $u_n : x \mapsto a_n x^n$. Comme les u_n sont continues sur $[-1; 0]$, la fonction f est

continue sur $[-1; 0]$, ce qui montre que $f(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ car $\operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{6}$.