PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 17

PSI 1 2025-2026 **du lundi 02/02 au vendredi 06/02**

1 Rayon de convergence d'une série entière : voir programme précédent

2 Calcul du rayon d'une série entière : voir programme précédent

3 Somme d'une série entière :

- convergence normale sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence ;
- unicité des coefficients d'une série entière si le rayon de convergence est non nul ;
- somme d'une somme, d'un produit de CAUCHY de séries entières sur l'intersection des disques ouverts ;
- dérivation et intégration terme à terme de la somme f d'une série entière de la variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence : aspect C^∞ de f et relation $n!a_n = f^{(n)}(0)$;

4 Fonctions développables en série entière :

- définition d'une fonction développable en série entières (DSE) au voisinage de 0 ;
- stabilité des fonctions DSE par multiplication par un scalaire, somme, produit de CAUCHY ;
- séries de TAYLOR d'une fonction de classe C^∞ au voisinage de 0 ;
- caractérisation des fonctions DSE par la limite du reste intégral : conditions suffisantes ;
- développements en séries entières des fonctions usuelles de la variable réelle ;
- exponentielle complexe sous forme de série = exponentielle complexe vue en sup ;

5 Variables aléatoires :

- définition d'une variable aléatoire discrète, notations classiques $(X \leqslant a)$, $(X = x)$, $(X \in A)$;
- loi d'une variable aléatoire discrète, elle ne caractérise pas la variable aléatoire ;
- couple de variables aléatoires, loi conjointe et lois marginales ;
- loi conditionnelle de Y sachant B, indépendance de VA, calcul de $P(X \in A,\ Y \in B)$;
- variables aléatoires indépendantes 2 à 2 ou dans leur ensemble, relations ;
- lois sur un univers fini : uniforme, BERNOULLI, binomiale (somme de BERNOULLI indépendantes), hypergéométrique (hors programme) ;
- lois sur un univers dénombrable : géométrique (loi du premier succès) ;
- lois sur un univers dénombrable : POISSON, la somme de deux VA indépendantes suivant $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$ suit $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$, avec condition, la "limite" d'une loi binomiale est une loi de POISSON ;

QUESTIONS DE COURS :

1 définir une variable aléatoire discrète (déf. 11.1)
2 définir la loi d'une variable aléatoire discrète (déf. 11.3)
3 définir des variables aléatoires discrètes indépendantes (déf. 11.6)
4 définir une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes (déf. 11.7 et 11.18)
5 énoncer le lemme des coalitions et le transport d'indépendance (prop. 11.6 et 11.8)
6 énoncer les espérances de variables aléatoires suivant l'une des 5 lois usuelles (th. 11.13)
7 énoncer le théorème donnant une autre expression de l'espérance (th. 11.14)
8 prouver que $\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit $\mathcal{B}(n,p)$ si les $X_1, \cdots, X_n$ suivent $\mathcal{B}(p)$ et sont indépendantes (prop. 11.9)
9 prouver que la variable aléatoire de premier succès dans une répétition de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(p)$ suit la loi géométrique de paramètre p (prop. 11.10)
10 prouver que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ avec X et Y indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$ (rem. 11.17)

Prévision pour la prochaine semaine : variables aléatoires