TD 17 : SÉRIES ENTIÈRES

PSI 1 2025-2026 **vendredi 23 janvier 2026**

17.1 Comme $\dfrac{x^n}{n(n+1)(2n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^n}{2n^3}$ si $x \neq 0$, par croissances comparées, la suite $\left(\dfrac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée si et seulement si $x \in [-1;1]$ donc le rayon de convergence de cette série entière vaut $R = 1$. Si $x = \pm 1$, $\dfrac{x^n}{n(n+1)(2n+1)} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}$ converge absolument par Riemann. Ainsi, l'ensemble de définition de f est $I = [-1;1]$.

La fraction $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ se décompose en éléments simples $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$.

En réduisant au même dénominateur, $a(n+1)(2n+1) + bn(2n+1) + cn(n+1) = 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ ce qui donne, par identification, $2a + 2b + c = 3a + b + c = a - 1 = 0$ donc $a = 1$, $b = 1$ et $c = -4$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{4}{2n+1}$. Pour tout $x \in]-1;1[$, comme $|x| < R$ et que les trois séries convergent, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)(2n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+1} - 4\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{2n+1}$.

On reconnaît des développements en série entière classiques du cours : $\forall x \in]-1;1[$, $\ln(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$ et $\forall x \in]0;1[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{2n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Big(\ln(1+\sqrt{x}) - \ln(1-\sqrt{x}) - 2\sqrt{x}\Big) = \dfrac{\text{Argth}\,(\sqrt{x}) - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ et $\forall x \in]-1;0[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{2n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{-x}} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n(\sqrt{-x})^{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{\text{Arctan}(\sqrt{-x}) - \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$. Ainsi, $f(0) = 0$ et :

- Si $x \in]0;1[$, $f(x) = -\ln(1-x) + \dfrac{1}{x}\Big(-\ln(1-x) - x\Big) - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\left(\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) - 2\sqrt{x}\right)$.
- Si $x \in]-1;0[$, $f(x) = -\ln(1-x) + \dfrac{1}{x}\Big(-\ln(1-x) - x\Big) - \dfrac{4}{\sqrt{-x}}\Big(\text{Arctan}(\sqrt{-x}) - \sqrt{-x}\Big)$.

De plus, en notant $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}$, $||u_n||_{\infty,[-1;1]} = \dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^3}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^3}$ converge par Riemann donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur $[-1;1]$ d'où la continuité de f sur le segment $[-1;1]$.

Pour $x \in]0;1[$, en écrivant $1 - x = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$ et avec les propriétés de $\ln$, on trouve la nouvelle expression $f(x) = 3 - \dfrac{(1+\sqrt{x})^2}{x}\ln(1+\sqrt{x}) - \dfrac{(1-\sqrt{x})^2}{x}\ln(1-\sqrt{x})$. Puisque $\lim\limits_{y\to 0^+} y^2\ln(y) = 0$, et comme on sait que $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, on trouve $f(1) = 3 - 4\ln(2) \sim 0,23$. Pour obtenir cette valeur, en notant $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, on aurait pu transformer $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(2k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} - 4\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k+1}$ ce qui donne en rajoutant et en enlevant les termes pairs, $S_n = H_n + H_{n+1} - 1 - 4\left(\sum\limits_{k=1}^{2n+1} \dfrac{1}{k} - 1\right) + 4\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}$ et $S_n = 3 + 4H_n - 4H_{2n} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{4}{2n+1}$ et on termine en sachant que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

De même, $f(-1) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -1 - \pi + 4 = 3 - \pi \sim -0,14$ avec la relation ci-dessus.

17.2 **a.** Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(n)$ diverge donc $R \leqslant 1$ car $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(n)x^n$ diverge pour $x = 1$. Si $|x| < a < 1$, par croissances comparées, on a $\ln(n)x^n \underset{+\infty}{=} o(a^n)$ et la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1} a^n$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(n)x^n$ converge par comparaison et $R \geqslant 1$. Ainsi $R = 1$.

Comme $\forall n \geqslant 2,\ \ln(n) \geqslant \ln(2)$, pour $x \in [0;1[$, $\ln(n)x^n \geqslant \ln(2)x^n$ donc $S(x) \geqslant \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \ln(2)x^n = \dfrac{\ln(2)x^2}{1-x}$ en sommant. Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(2)x^2}{1-x} = +\infty$, on a par minoration la limite $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = +\infty$.

Une preuve plus générale en se servant seulement du fait que $\forall n \geqslant 1,\ \ln(n) \geqslant 0$ et que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(n)$ diverge : toutes les $x \mapsto \ln(n)x^n$ sont croissantes sur $[0;1[$ donc S est aussi croissante sur $[0;1[$. Par le théorème de la limite monotone, la fonction S admet donc une limite ℓ en 1^- qui est finie ou qui vaut $+\infty$.

Posons $S_n : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k)x^k$ les sommes partielles qui sont polynomiales donc continues. Comme $S_n \leqslant S$ sur $[0;1[$, $\lim\limits_{x\to 1} S_n(x) = S_n(1) \leqslant \ell$ (même si cette limite est infinie). Or $S_n(1) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(1) = +\infty$. Ainsi l'inégalité $S_n(1) \leqslant \ell$ montre que ℓ ne peut pas être finie. Au final : $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = +\infty$.

b. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a les inégalités $\forall k \geqslant 1,\ \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$ (1) et $\forall k \geqslant 2,\ \dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$ (2). En sommant (1) pour $k \in [\![1;n]\!]$ et (2) pour $k \in [\![2;n]\!]$, on obtient l'encadrement $\ln(n+1) \leqslant H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leqslant \ln(n) + 1$ par CHASLES. En multipliant par x^n pour $x \in [0;1[$ et en sommant ces inégalités, on trouve $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(n+1)x^n \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} H_n x^n \leqslant \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n$. Or, par produit de CAUCHY, $\forall x \in]-1;1[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}x^n\right) \times \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x} = \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$. Ce qui donne, puisque $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln(n+1)x^n = \dfrac{S(x)}{x}$, l'encadrement $\dfrac{\ln(1-x)}{x-1} - \dfrac{1}{1-x} \leqslant S(x) \leqslant \dfrac{x\ln(1-x)}{x-1}$. Par théorème d'encadrement, puisque $\dfrac{\ln(1-x)}{x-1} - \dfrac{1}{1-x} \underset{1^-}{\sim} \dfrac{x\ln(1-x)}{x-1} \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$, nous avons établi que $S(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$.

17.3 Puisque la fonction $\sin$ est 1-lipschitzienne car $|\sin'| = |\cos| \leqslant 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)| \leqslant |a|^n|x|$. Comme $|a| < 1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a^n||x|$ converge donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge absolument et la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Ainsi F_a est définie sur $\mathbb{R}$.

- (H_1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers F_a.
- (H_2) Toutes les fonctions f_n sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- (H_3) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n^{(p)}(x) = a^{np} \sin\left(a^n x + p\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc $f_n^{(p)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et $||f_n^{(p)}||_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant |a|^{np}$ (on a même égalité). Or la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a|^{np}$ converge car $|a| < 1$, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n^{(p)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Par un théorème du cours, F_a est de classe C^∞ et $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_a^{(p)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^{np} \sin\left(a^n x + p\dfrac{\pi}{2}\right)$.

On en déduit que $F_a^{(p)}(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^{np} \sin\left(p\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc $F_a^{(p)}(0) = 0$ si p est pair et, si $p = 2k+1$, on trouve $F_a^{(2k+1)}(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^{n(2k+1)} \sin\left((2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^k a^{n(2k+1)} = \dfrac{(-1)^k}{1-a^{2k+1}}$.

D'après le cours, F_a est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ si et seulement si le reste intégral d'ordre k, à savoir $\frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k F_a^{(k+1)}(t)dt$, tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$ pour tout réel x. Or, par inégalité de la moyenne, $\left|\frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k F_a^{(k+1)}(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{k!}\left|\int_0^x |x-t|^k |F_a^{(k+1)}(t)|dt\right|$. Avec l'expression de $F_a^{(k+1)}(t)$ vue avant, et $|F_a^{(k+1)}(t)| = \left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^{n(k+1)} \sin\left(a^n t + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a|^{n(k+1)} = \frac{1}{1-|a|^{k+1}}$. On arrive donc à la majoration $\left|\frac{1}{k!}\int_0^x (x-t)^k F_a^{(k+1)}(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{k!(1-|a|^{k+1})}\left|\int_0^x |x-t|^k dt\right| = \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!(1-|a|^{k+1})}$ car, $x-t$ étant de signe constant sur $\widetilde{[0;x]}$, on a $\left|\int_0^x |x-t|^k dt\right| = \left|\int_0^x (x-t)^k dt\right| = \left|\left[-\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1}\right]_0^x\right| = \frac{|x|^{k+1}}{k+1}$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!(1-|a|^{k+1})} = 0$, donc F_a est bien développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et, étant égale à sa série de Fourier, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ F_a(x) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!(1-a^{2p+1})}$ grâce à ce qui précède.

Comme la fonction $\sin$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, $F_a(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k a^{n(2k+1)} x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)$.

Or la famille $\left(\frac{(-1)^k a^{n(2k+1)} x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable car, par sommation par paquets, on a le calcul $\sum\limits_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} \frac{|a|^{n(2k+1)}|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{|a|^{n(2k+1)}|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!(1-|a|^{2k+1})} < +\infty$ car si $x \neq 0$, $\frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!(1-|a|^{2k+1})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$ et que $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!} = \mathrm{sh}\,(|x|) < +\infty$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, on peut développer en série entière $F_a(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^{n(2k+1)}\right)\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!(1-a^{2k+1})}$.

17.4 **a.** Posons $u_n = n^{(-1)^n}$, alors $\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant n$ et les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} nx^n$ ont classiquement pour rayon 1 donc le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n} x^n$ est $R = 1$ par encadrement.

De plus, comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée, les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ divergent grossièrement et l'intervalle de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^{(-1)^n} x^n$ est $]-1;1[$.

b. En séparant termes pairs et impairs, on a $\forall x \in]-1;1[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2nx^{2n} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Comme $\forall x \in]-1;1[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, en dérivant et en multipliant par x, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2nx^{2n} = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}$ car $x^2 \in]-1;1[$. On sait que $\forall x \in]-1;1[,\ \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x)$ et que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$. En sommant, on obtient $\forall x \in]-1;1[,\ 2\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\left(= \mathrm{Argth}\,(x)\right)$. Ainsi, $\forall x \in]-1;1[,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

17.5 **a.** Pour tout réel x, la fonction $h_x : t \mapsto e^{-t^2}\mathrm{sh}\,(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathrm{sh}\,(xt) = \dfrac{e^{xt} - e^{-xt}}{2} \underset{+\infty}{=} O(e^{|x|t})$ donc $e^{-t^2}\mathrm{sh}\,(xt) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t^2+|x|t}) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t})$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t^2+|x|t+t} = 0$ donc, par comparaison, la fonction h_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. $\forall t \geqslant 0,\ \mathrm{sh}\,(xt) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}t^{2n+1}}{(2n+1)!}$, donc $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\Big)dt$ avec $f_n : t \mapsto \dfrac{x^{2n+1}t^{2n+1}}{(2n+1)!}e^{-t^2}$.

- La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers h_x sur $\mathbb{R}_+$ (on en vient).
- Les fonctions f_n et la fonction h_x sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
- Les fonctions f_n sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ car $f_n(t) \underset{+\infty}{=} O\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées.
- Posons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n+1}e^{-t^2}dt$, en posant $u : t \mapsto t^{2n}$ et $v : t \mapsto -\dfrac{e^{-t^2}}{2}$, u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, $u(0)v(0) = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, pour tout $n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = n\int_0^{+\infty} t^{2n-1}e^{-t^2}dt = nI_{n-1}$. Comme $I_0 = \Big[-\dfrac{e^{-t^2}}{2}\Big]_0^{+\infty} = \dfrac{1}{2}$, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \dfrac{n!}{2}$. On aurait aussi pu poser $t = \sqrt{u} = \varphi(u)$ avec φ bijection de classe C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ ce qui donne $I_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n e^{-u^2}du = \dfrac{\Gamma(n+1)}{2} = \dfrac{n!}{2}$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n| = \dfrac{|x|^{2n+1}n!}{2(2n+1)!} = \dfrac{|x|^{2n+1}}{2(2n+1)\times\cdots\times(n+1)}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n| \leqslant \dfrac{|x|^{2n+1}}{(n+1)!}$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{|x|^{2n+1}}{(n+1)!}$ converge (série exponentielle).

Par le théorème d'intégration terme à terme, on a donc l'intégrabilité de h_x sur $\mathbb{R}_+$ (on le savait déjà) et surtout le développement en série entière de F : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}n!}{2(2n+1)!}$.

On pouvait aussi dériver sous le signe somme, soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = e^{-t^2}\mathrm{sh}\,(xt)$, alors :

- $\forall t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $h_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (on vient de le faire).
- $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = te^{-t^2}\mathrm{ch}\,(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $a > 0$, on a la majoration $\forall x \in [-a;a],\ \forall t \geqslant 0,\ \Big|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big| \leqslant te^{-t^2}\mathrm{ch}\,(at) = \varphi_a(t)$ et $\varphi_a(t) \underset{+\infty}{=} o(e^{-t})$ comme avant donc la fonction φ_a est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\mathrm{ch}\,(xt)dt$. On pose $u(t) = \mathrm{ch}\,(xt)$ et $v(t) = -\dfrac{e^{-t^2}}{2}$, alors u et v sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$, $u(0)v(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées donc, par intégration par parties, on a $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{sh}\,(xt)dt = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2}F(x)$. Ainsi, F est la solution sur $\mathbb{R}$ de $(E)\ :\ y' = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2}y$ qui vérifie la condition de Cauchy $F(0) = 0$. Comme $x \mapsto \dfrac{x^2}{4}$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ sur $\mathbb{R}_+$, on sait d'après le cours que $y_0 : x \mapsto e^{\frac{x^2}{4}}$ est un vecteur directeur de la droite des solutions de l'équation homogène $(E_0)\ :\ y' = \dfrac{x}{2}y$. Par méthode de variation de la constante, on trouve par exemple comme solution particulière de (E) la fonction $y_p : x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{\frac{x^2}{4}}\displaystyle\int_0^x e^{\frac{-t^2}{4}}dt$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = y_p + \lambda y_0$. Comme $F(0) = 0 = \lambda$, $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{\frac{x^2}{4}}\displaystyle\int_0^x e^{\frac{-t^2}{4}}dt$.

On peut à partir de là retrouver un développement en série entière de F par produit de CAUCHY car

$$e^{\frac{x^2}{4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n!} \quad \text{et} \quad \int_0^x e^{\frac{-t^2}{4}} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n t^{2n}}{4^n n!} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{4^n n!} dt \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{4^n n!(2n+1)}$$

en intégrant terme à terme sur $[0;x]$ inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $\mathbb{R}$. Comme les séries précédentes convergent absolument pour $x \in \mathbb{R}$, en notant $a_n = \dfrac{x^{2n}}{4^n n!}$ et $b_n = \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{4^n n!(2n+1)}$, par produit de CAUCHY, $2F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ si $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2n-2k}}{4^{n-k}(n-k)!} \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{4^k k!(2k+1)} = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} \dbinom{n}{k} \right) \dfrac{x^{2n+1}}{4^n n!}$.
Par unicité du développement en série entière dès lors que le rayon est strictement positif (et c'est le cas ici), on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n!}{2(2n+1)!} = \dfrac{1}{2.4^n n!} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} \dbinom{n}{k}$ ou $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} \dbinom{n}{k} = \dfrac{2.4^n (n!)^2}{2(2n+1)!} = \dfrac{2^{2n-2}}{(2n+1)\dbinom{2n}{n}}$.

17.6 **a.** Comme f est de classe C^∞ sur I, $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt$ par la formule de TAYLOR reste intégral. On constate que si $x \in [0;A[$, comme $\displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \geqslant 0$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \leqslant f(x)$ donc la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées donc elle est convergente et on peut en déduire que son terme général tend vers 0, ce qui montre que $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 \quad (L)$. Traitons maintenant deux cas :

Si $x \in]-A;0]$, $\left| \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \right| = \displaystyle\int_x^0 \dfrac{(t-x)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt$ car $f^{n+1}(t) \geqslant 0$ par hypothèse. Comme $f^{(n+2)} \geqslant 0$, $f^{(n+1)}$ est croissante donc $\forall t \in [x;0]$, $f^{(n+1)}(t) \leqslant f^{(n+1)}(0)$ ce qui montre que $\left| \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \right| \leqslant \displaystyle\int_x^0 \dfrac{(t-x)^n f^{(n+1)}(0)}{n!} dt = \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n!} \left[\dfrac{(t-x)^{n+1}}{n+1} \right]_x^0 = \dfrac{(-x)^{n+1} f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}$.
Mais comme $-x \geqslant 0$, d'après (L), on a $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} (-x)^k = 0$ donc, par encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt = 0$ et, d'après le cours, f est égale à sa série de TAYLOR sur $]-A;0[$.

Si $x \in]0;A[$, on prend r tel que $x < r < A$ et, en posant $t = xu = \varphi(u)$ avec φ C^1 sur le segment $[0;1]$, on a $\displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt = \int_0^1 \dfrac{(x-xu)^n f^{(n+1)}(xu)}{n!} x du = \dfrac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu) du$.
Comme $f^{(n+1)}$ est croissante car $f^{(n+2)} \geqslant 0$, il vient $\displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \leqslant \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ru) du$ car $\forall u \in [0;1]$, $f^{(n+1)}(xu) \leqslant f^{(n+1)}(ru)$. Avec le même calcul qu'avant avec r à la place de x, on a $\displaystyle\int_0^r \dfrac{(r-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt = \dfrac{r^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(ru) du$ donc on obtient la majoration suivante : $\displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{r^{n+1}} \int_0^r \dfrac{(r-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt = \dfrac{x^{n+1}}{r^{n+1}} \left(f(r) - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} r^k \right) \leqslant \dfrac{x^{n+1} f(r)}{r^{n+1}}$.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x^{n+1}}{r^{n+1}} = 0$ car $0 < x < r$, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt = 0$ ce qui garantit que f est égale à sa série de TAYLOR sur $]0;A[$.

Avec ces deux cas, f est égale à sa série de TAYLOR sur $]-A;A[$, donc f est développable en série entière sur $]-A;A[$: on dit que f est absolument monotone sur $]-A;A[$ quand $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geqslant 0$ sur $]-A;A[$.

b Comme f est de classe C^∞ sur I et $\exp$ l'est sur $\mathbb{R}$, par composition, g est de classe C^∞ sur I.

Initialisation : $g = e^f$ est positive sur I, $g' = f' \times e^f$ donc g' est positive sur I car f' l'est et $g'' = (f''+(f')^2)\times e^f$ est aussi positive sur I car f'' et $(f')^2$ le sont.

Hérédité : soit $n \geqslant 1$ tel que la fonction $g^{(k)}$ est positive sur I pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$, alors, par la formule de Leibniz, on a $g^{(n+1)} = (g')^{(n)} = (f' \times e^f)^{(n)} = (f' \times g)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f')^{(k)} g^{(n-k)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)}$.

Or, par hypothèse sur f et hypothèse de récurrence, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, les fonctions $f^{(k+1)}$ et $g^{(n-k)}$ sont positives sur I, donc par produit, multiplication par $\binom{n}{k} > 0$ et somme, la fonction $g^{(n+1)}$ est positive sur I.

On a bien établi par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N},\ g^{(n)}$ est positive sur I.

Ainsi, les hypothèses de la question **a.** sont vérifiées pour g qui est donc développable en série entière sur I.

c. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) = P_0(\tan(x))$ et $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = P_1(\tan(x))$ avec $P_0 = X$ et $P_1 = X^2 + 1$. Si on suppose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, que $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x))$ avec P_n un polynôme de degré $n+1$ dont les coefficients sont des entiers naturels, alors $\tan^{(n+1)}(x) = \tan'(x) P_n'(\tan(x)) = P_{n+1}(\tan(x))$ avec $P_{n+1} = (1+X^2)P_n'(X)$ qui est bien de degré $n+2$ et de coefficients entiers naturels car si $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n+1} a_k X^k$, on a $P_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} k a_k X^{k-1} + \sum\limits_{k=0}^{n+1} k a_k X^{k+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} X^k + \sum\limits_{k=1}^{n+2} (k-1) a_{k-1} X^k$ ce qui donne l'expression $P_{n+1} = (n+1) a_n X^{n+1} + n a_{n-1} X^n + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \big((k+1)a_{k+1} + (k-1)a_{k-1}\big) X^k \right) + a_1$ qui est bien à coefficients entiers naturels. On conclut que principe de récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x))$ avec $P_n \in \mathbb{N}[X]$ et $\deg(P_n) = n+1$.

Comme $\tan(x) \geqslant 0$ pour $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et que $P_n \in \mathbb{N}[X]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x)) \geqslant 0$ donc, d'après la question **a.**, la fonction $\tan$ est développable en série entière sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et on peut écrire $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. Comme $\tan$ est impaire, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right]$, $\tan(x) = -\tan(-x)$ donc $\tan(x) = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}(-x)^{2n+1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. Cette relation est donc vraie pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan$ est bien développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

17.7 **a.** Comme $X^2-2\text{ch}(\alpha)X+1 = X^2-(e^{\alpha}+e^{-\alpha})X+1 = (X-e^{\alpha})(X-e^{-\alpha})$, la quantité $x^2-2\text{ch}(\alpha)x+1$ est donc strictement positive hors du segment $[e^{-\alpha};e^{\alpha}]$ reliant les deux racines. Par conséquent, l'ensemble de définition de f_{α} est $D =]-\infty;e^{-\alpha}[\cup]e^{\alpha};+\infty[$.

b. La fonction f_{α} est de classe C^1 sur D par opérations. Comme $f_{\alpha}(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2-2\text{ch}(\alpha)x+1)$ pour $x \in D$, on a $f'_{\alpha}(x) = \dfrac{x-\text{ch}(\alpha)}{(x-e^{\alpha})(x-e^{-\alpha})} = \dfrac{(x/2)-(e^{\alpha}/2)+(x/2)-(e^{-\alpha}/2)}{(x-e^{\alpha})(x-e^{-\alpha})} = -\dfrac{1}{2(e^{\alpha}-x)} - \dfrac{1}{2(e^{-\alpha}-x)}$ donc $f'_{\alpha}(x) = -\dfrac{e^{-\alpha}}{2}.\dfrac{1}{1-e^{-\alpha}x} - \dfrac{e^{\alpha}}{2}.\dfrac{1}{1-e^{\alpha}x}$. Pour tout réel $x \in]-e^{-\alpha};e^{-\alpha}[$, $|e^{-\alpha}x|<1$ et $|e^{\alpha}x|<1$ donc on a $f'_{\alpha}(x) = -\dfrac{e^{-\alpha}}{2}.\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(e^{-\alpha}x)^n - \dfrac{e^{\alpha}}{2}.\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(e^{\alpha}x)^n$ grâce aux séries géométriques. On a donc la relation suivante, $\forall x \in]-e^{-\alpha};e^{-\alpha}[$, $f'_{\alpha}(x) = -\dfrac{e^{-\alpha}}{2}.\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(e^{-\alpha}x)^n - \dfrac{e^{\alpha}}{2}.\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(e^{\alpha}x)^n$ qu'on peut regrouper et simplifier en $f'_{\alpha}(x) = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{e^{(n+1)\alpha}+e^{-(n+1)\alpha}}{2}x^n = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\text{ch}((n+1)\alpha)x^n$. Les fonctions f'_{α} et f_{α} sont développables en série entière sur $]-e^{-\alpha};e^{-\alpha}[$. En intégrant à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence, comme $f_{\alpha}(0)=0$, on a $\forall x \in]-e^{-\alpha};e^{-\alpha}[$, $f_{\alpha}(x) = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\text{ch}((n+1)\alpha)\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

17.8 **a.** Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle y est continue. Ainsi, par composition, $x \mapsto f(ax)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc f' aussi ce qui montre que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Si on suppose que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ pour un entier $n \geqslant 1$, alors $x \mapsto f(ax)$ est aussi de classe C^n sur $\mathbb{R}$ donc f' l'est encore et f est donc de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$. Par principe de récurrence, f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ donc f est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = f(ax)$ donc $f''(x) = af'(ax) = af(a^2x)$. On continue, $f'''(x) = a^3f'(a^2x) = a^3f(a^3x)$ et $f^{(4)}(x) = a^6f'(a^3x) = a^6f(a^4x)$. Supposons, pour $n \in \mathbb{N}$, qu'on ait $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}}f(a^nx)$. Alors, en dérivant cette relation, on a $f^{(n+1)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}} \times a^nf'(a^nx) = a^{\frac{n(n+1)}{2}}f(a^{n+1}x)$. Comme on a $f^{(0)}(x) = f(x) = a^{\frac{0(0-1)}{2}}f(a^0x)$, on a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n-1)}{2}}f(a^nx)$.

b. Pour $b>0$, f étant continue sur le segment $[-b;b]$, elle y est bornée et on peut poser $M_b = ||f||_{\infty,[-b;b]}$. Pour $x \in [-b;b]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} + \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^nf^{(n+1)}(t)}{n!}dt$. Pour $t \in \widetilde{[0;x]}$, comme $f^{(n+1)}(t) = a^{\frac{n(n+1)}{2}}f(a^{n+1}t)$ et que $a^nt \in \widetilde{[0;x]} \subset [-b;b]$ car $|a|<1$, on a $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant a^{\frac{n(n+1)}{2}}M_b$.
Par inégalité triangulaire, on a $\left|\displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^nf^{(n+1)}(t)}{n!}dt\right| \leqslant \left|\displaystyle\int_0^x \dfrac{|x|^na^{\frac{n(n+1)}{2}}M_b}{n!}\right| = \dfrac{|x|^{n+1}a^{\frac{n(n+1)}{2}}M_b}{n!}$ donc, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{n!} = \lim\limits_{n\to+\infty}a^{\frac{n(n+1)}{2}} = 0$ car $|a|<1$, on a $\forall x \in [-b;b]$, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$. Mais ceci étant vrai pour tout $b>0$ et comme $f^{(k)}(0) = a^{\frac{k(k-1)}{2}}f(0)$, f est bien égale à sa série de TAYLOR sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0)\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k}{k!}$.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et la fonction $g_{\lambda} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_{\lambda}(x) = \lambda\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k}{k!}$. Si on pose $a_k = \dfrac{a^{\frac{k(k-1)}{2}}}{k!} > 0$, on a $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{a^k}{k+1}$ donc, comme $0<a<1$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = 0$ donc, par D'ALEMBERT, le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}a_kx^k$ vaut $R=+\infty$ ce qui justifie que la fonction g_{λ} est bien définie et de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R},\ g_\lambda'(x) = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{a^{\frac{k(k+1)}{2}} x^k}{k!} = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} (ax)^k}{k!} = g_\lambda(ax)$. Avec ce qui précède, les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = g(ax)$ sont les fonctions proportionnelles à $g_1 : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{a^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k}{k!}$, elles constituent donc la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(g_1)$.

17.9 **a.** f est définie comme la somme de la série entière lacunaire $\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ où $b_n = 1$ si n est un carré et $b_n = 0$ sinon. Comme $(b_n x^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée si et seulement si $(b_{n^2} x^{n^2})_{n\geqslant 0} = (x^{n^2})_{n\geqslant 0}$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si $|x| \leqslant 1$, le rayon de convergence R de cette série entière vaut $R = 1$. Pour $x = \pm 1$, cette série est grossièrement divergente donc le domaine de définition de f vaut $I =]-1;1[$.

En tant que somme d'une série entière de rayon 1, d'après le cours, f est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence, donc a fortiori dérivable sur $I =]-1;1[$.

b. Comme on étudie f au voisinage de 1, on peut se contenter de prendre $x \in]0;1[$, et de poser la fonction $h_x : t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln(x)}$ qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de Riemann car $h_x(t) = e^{t^2\ln(x)} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées ($\ln(x) < 0$).

Comme la fonction h_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $\forall k \geqslant 1,\ \int_k^{k+1} h_x(t)dt \leqslant x^{k^2} = h_x(k) \leqslant \int_{k-1}^k h_x(t)dt$.

On somme pour k allant de 0 à $+\infty$ à gauche et de 1 à $+\infty$ à droite (l'intégrale et la série convergent) ce qui donne par Chasles l'encadrement $\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt + h_x(0) = \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt + 1$.

En posant $t = \dfrac{u}{\sqrt{-\ln(x)}} = \varphi(u)$, φ étant une bijection strictement croissante de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, par changement de variable, on a $\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2\ln(x)}dt = \dfrac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-\pi}{\ln(x)}}$.

Par encadrement, comme $1 \underset{1^-}{=} o\left(\sqrt{\dfrac{1}{-\ln(x)}}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-\pi}{\ln(x)}} = +\infty$, on a l'équivalent $f(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-\pi}{\ln(x)}}$.

c. Comme il existe une infinité de termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont supérieurs ou égaux à 1 (il y a une infinité de carrés parfaits), on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ diverge, ce qui prouve que $R' \leqslant 1$. Comme $a_n = \mathrm{card}\,\{k \in [\![0;\lfloor\sqrt{n}\rfloor]\!] \mid n-k^2 \text{ est un carré parfait}\}$, on a $a_n \leqslant \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1 \leqslant \sqrt{n}+1 \leqslant n+1$ et comme la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n$ est de rayon 1, on a $R' \geqslant 1$. Par conséquent, $R' = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum\limits_{\substack{(u,v)\in[\![0;\lfloor\sqrt{n}\rfloor]\!]^2 \\ u^2+v^2=n}} 1 = \sum\limits_{\substack{(i,j)\in[\![0;n]\!] \\ i+j=n}} b_i b_j$ (en posant $i = u^2$ et $j = v^2$) par définition des b_n. Par exemple, $a_5 = b_0b_5 + b_1b_4 + b_2b_3 + b_3b_2 + b_4b_1 + b_5b_0 = 2$ car $b_2 = b_3 = b_5 = 0$ et $b_0 = b_1 = b_4 = 1$ ce qui correspond aux deux écritures $5 = 1 + 4 (= 1^2 + 2^2 = 2^2 + 1^1 =) 4 + 1$. Par produit de Cauchy de deux séries entières, pour $x \in]-R';R'[=]-1;1[$, on a $f(x)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k} = \sum\limits_{\substack{(i,j)\in[\![0;n]\!]^2 \\ i+j=n}} b_i b_j = a_n$. Ainsi, $f(x)^2 = g(x)$ ce qui prouve que $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge pour $x \in]-1;1[$ donc que $R' \geqslant 1$ indépendamment de ce qui précède. On trouve à nouveau que $R' = 1$. D'après la question **c.**, on a même $g(x) = f(x)^2 \underset{1^-}{\sim} \dfrac{-\pi}{4\ln(x)}$.

17.10 Déjà, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie car u_0 est donné et la relation $u_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_ku_{n-k}$ définit bien u_{n+1} connaissant les termes $u_0,\cdots,u_n$. On peut montrer facilement par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in\mathbb{N}$.

a. Comme $u_0=3$, on a $u_1=u_0^2=9$ et $u_2=2u_0u_1=54$. Ainsi, on a bien $0\leqslant\dfrac{u_0}{0!}=3\leqslant 4=4^{0+1}$, $0\leqslant\dfrac{u_1}{1!}=9\leqslant 16=4^{1+1}$ et $0\leqslant\dfrac{u_2}{2!}=27\leqslant 64=4^{3+1}$. Soit $n\geqslant 3$ tel que $\forall k\in[\![0;n]\!],\ 0\leqslant\dfrac{u_k}{k!}\leqslant 4^{k+1}$, alors $u_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_ku_{n-k}\geqslant 0$ car $u_0,\cdots,u_n$ sont positifs. De plus, par hypothèse de récurrence, $u_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_ku_{n-k}=n!\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{u_ku_{n-k}}{k!(n-k)!}\leqslant n!\sum\limits_{k=0}^{n}4^{k+1}4^{n+1-k}=(n+1)!4^{n+2}$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{(n+1)!}\leqslant 4^{n+2}$.
Par principe de récurrence forte, on a établi que $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant\dfrac{u_n}{n!}\leqslant 4^{n+1}$.
Comme $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant\dfrac{u_n}{n!}\leqslant 4^{n+1}$ d'après **a.**, et puisque le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}4^{n+1}x^n$ vaut $\dfrac14$ car $(4^{n+1}x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x|\leqslant\dfrac14$, on en déduit que le rayon R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{u_n}{n!}x^n$ vérifie $R\geqslant\dfrac14$. Ainsi, la fonction f, qui est la somme de cette série entière, est bien définie sur $I=\left]-\dfrac14;\dfrac14\right[\subset]-R;R[$.

b. On dérive terme à terme donc $\forall x\in I,\ f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\dfrac{u_n}{n!}x^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{n!}x^n$ à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence et après changement d'indice. On a donc $\forall x\in I,\ f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{u_k}{k!}.\dfrac{u_{n-k}}{(n-k)!}\Big)x^n$ car $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. On reconnaît un produit de CAUCHY, valide puisque $I\subset]-R;R[$, et on a $f'(x)=f(x)^2$.
Par conséquent, f est bien solution sur I de l'équation $(E)\ :\ y'=y^2$.
Analyse : supposons que f ne s'annule pas sur I, alors $\forall x\in I,\ \dfrac{f'(x)}{f(x)^2}=1\iff\Big(\dfrac{1}{f(x)}+x\Big)'=0$ donc $x\mapsto\dfrac{1}{f(x)}+x$ est constante sur l'intervalle I. Or $f(0)=3$ donc $\forall x\in I,\ \dfrac{1}{f(x)}+x=\dfrac13$ et $f(x)=\dfrac{3}{1-3x}$.
Synthèse : soit $g:\left]-\dfrac13;\dfrac13\right[\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=\dfrac{3}{1-3x}$. g ne s'annule pas sur I, $g(0)=\dfrac13$ et $g'(x)=\dfrac{9}{(1-3x)^2}=g(x)^2$. Ainsi, f et g sont solutions du même problème de CAUCHY (non linéaire donc hors programme) et sont donc égales sur I. Si on veut rester dans le programme, on décompose $\forall x\in\left]-\dfrac13;\dfrac13\right[,\ g(x)=3\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(3x)^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}3^{n+1}x^n$. Posons, $v_n=n!3^{n+1}$ pour $n\in\mathbb{N}$.
Par produit de CAUCHY dans $\left]-\dfrac13;\dfrac13\right[$, on a $g'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)\dfrac{v_{n+1}}{(n+1)!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{v_k}{k!}\,\dfrac{v_{n-k}}{(n-k)!}\Big)x^n$. Par unicité du développement en série entière, il vient $\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{v_{n+1}}{n!}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{v_k}{k!}\,\dfrac{v_{n-k}}{(n-k)!}=\dfrac{1}{n!}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}v_kv_{n-k}$.
Par récurrence forte, on montre facilement que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=v_n=n!\,3^{n+1}$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont le même premier terme et la même relation de récurrence, à savoir $v_0=3$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}v_kv_{n-k}$.

17.11 **a.** La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est alternée et la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 donc, par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, ce qui justifie l'existence de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

b. La suite $(|u_n x^{n+1}|)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{|x|^n}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|x| \leqslant 1$ donc, par définition du rayon de convergence d'une série entière, le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ vaut $R = 1$. Bien sûr, on aurait pu utiliser le critère de D'ALEMBERT. Ainsi, le domaine de définition D de I vérifie $]-1;1[\subset D \subset [-1;1]$.
$I(1)$ est bien définie car S existe d'après la question **a.**. Par contre, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2n+1}$ diverge car $\frac{1}{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} > 0$ et la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. Ainsi, $I(-1)$ n'existe pas et on a $D =]-1;1]$.

c. <u>Soit $x \in]0;1[$</u> : on pose $y = \sqrt{x} \in]0;1[$ donc $I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n y^{2n+2} = y \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n+1}$ et on reconnaît une série entière classique, à savoir $f(x) = y\,\mathrm{Arctan}(y) = \sqrt{x}\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})$.

<u>Soit $x \in]-1;0[$</u> : on pose $y = \sqrt{-x} \in]0;1[$ donc $I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n (-1)^{n+1} y^{2n+2} = -y \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} y^{2n+1}$ donc $I(x) = -y\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} y^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^{2n}}{2n}\Big) = -\frac{y}{2}\big(-2\ln(1-y) + \ln(1-y^2)\big) = \frac{y}{2}\ln\left(\frac{1-y^2}{(1-y)^2}\right) = \frac{y}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ et on reconnaît $I(x) = y\,\mathrm{Argth}\,(y) = \sqrt{-x}\;\mathrm{Argth}\,(\sqrt{-x})$.

Posons $f_n : x \mapsto u_n x^{n+1}$ définie sur $[0;1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (H_1) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0;1]$.
- (H_2) Pour $n \in \mathbb{N}$, en posant $R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ sur $[0;1]$ (qui existe d'après **b.**), comme $(|f_k(x)|)_{k\geqslant 0}$ est décroissante et tend vers 0 pour tout $x \in [0;1]$, le critère spécial des séries alternées montre que $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+2}}{2n+3} \leqslant \frac{1}{2n+3}$ donc R_n est bornée sur $[0;1]$ et $||R_n||_{\infty,[0;1]} \leqslant \frac{1}{2n+3}$ donc $\lim_{n\to+\infty} ||R_n||_{\infty,[0;1]} = 0$ par encadrement : $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément (pas normalement) sur $[0;1]$.

Par théorème, $I = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[0;1]$ donc $I(1) = S = \lim_{x\to 1^-} I(x) = \lim_{x\to 1^-} \sqrt{x}\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4}$.

d. D'abord, I étant continue sur le segment $[0;1]$, l'intégrale $\int_0^1 I(x)dx$ converge.
<u>Méthode 1</u> : on pose $u : x \mapsto \frac{2}{3}x^{3/2}$ et $v : x \mapsto \mathrm{Arctan}(\sqrt{x})$ de sorte que u et v sont de classe C^1 sur $]0;1]$ et, comme $\lim_{x\to 0^+} u(x)v(x) = 0$ car $u(x)v(x) \underset{0}{\sim} \frac{2x^2}{3}$, on a $\int_0^1 I(x)dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)dx$ ce qui donne $\int_0^1 I(x)dx = \frac{2}{3}\times\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x dx}{1+x} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\big[x - \ln(1+x)\big]_0^1 = \frac{\pi}{6} - \frac{1-\ln(2)}{3} \sim 0,42$.
<u>Méthode 2</u> : comme $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur le segment $[0;1]$ d'après **c.**, on peut intégrer terme à terme et avoir $\int_0^1 I(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n x^{n+2}}{(2n+1)(n+2)}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(n+2)}$. Or on peut décomposer $\frac{1}{(2n+1)(n+2)} = \frac{2}{3(2n+1)} - \frac{1}{3(n+2)}$ et $\int_0^1 I(x)dx = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$. Or il est classique (et c'est la même méthode qu'au **c.**) que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} = 1 - \ln(2)$ et on trouve, comme avec la méthode précédente, $\int_0^1 I(x)dx = \frac{2S}{3} - \frac{1-\ln(2)}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{1-\ln(2)}{3} \sim 0,42$.

17.12 **a.** Analyse : supposons que la fonction paire $f = \frac{1}{\cos}$ est développable en série entière au voisinage de 0, il existe donc un réel $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que $\forall x \in]-r;r[,\ f(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$ (par parité). Comme le rayon R de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ vérifie $R \geqslant r > 0$ par l'existence de $f(x)$ pour $x \in]-r;r[$, et par produit de Cauchy car le rayon de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ vaut $+\infty$, on a $\forall x \in]-r;r[,\ \cos(x) \times \frac{1}{\cos(x)} = 1$ donc $a_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\frac{(-1)^k}{(2k)!} = 0$ par unicité des coefficients d'un développement en série entière, ce qui donne $a_n = -\sum_{k=1}^{n} a_{n-k}\frac{(-1)^k}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}$.

Synthèse : il existe une unique suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1,\ a_n = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}$. Calculons les premiers termes de cette suite : on a $a_1 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{a_1}{2} - \frac{a_0}{24} = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24}$ et $a_3 = \frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{24} + \frac{a_0}{720} = \frac{5}{48} - \frac{1}{48} + \frac{1}{720} = \frac{61}{720}$. Il semble que l'on ait $|a_n| \leqslant 1$.

- Initialisation : on vient de montrer que $\forall n \in [\![0;3]\!]$, on a $|a_n| \leqslant 1$.
- Hérédité : soit $n \geqslant 4$, supposons que $\forall k \in [\![0;n-1]\!],\ |a_k| \leqslant 1$. Alors, $|a_n| = \Big|\sum_{k=1}^{n} a_{n-k}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}\Big|$ donc $|a_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_{n-k}|}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} = \text{ch}\,(1) - 1 \sim 0,54 \leqslant 1$.

Par principe de récurrence, on peut conclure que $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant 1$. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^{2n}$, qui est donc supérieur, d'après le cours, à celui de $\sum_{n\geqslant 0} x^{2n}$ qui vaut 1. Ainsi, $R \geqslant 1$ et on peut définir $g :]-1;1[\to \mathbb{R}$ par $\forall x \in]-1;1[,\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$. Par produit de Cauchy, comme avant, $\forall x \in]-1;1[,\ g(x)\cos(x) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}\Big) \times \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\Big)x^{2n} = 1$ donc $g(x) = \frac{1}{\cos(x)} = f(x)$ et $f = \frac{1}{\cos}$ est donc développable en série entière, au moins sur $]-1;1[$.

b. Si on avait $R > \frac{\pi}{2}$, avec le même calcul que précédemment, on aurait $\forall x \in]-R;R[,\ f(x) \times \cos(x) = 1$. Mais comme $x = \frac{\pi}{2} \in]-R;R[$, on aurait $f(x)\cos(x) = 0 = 1$. NON. Ou alors on pourrait dire que f est continue sur $]-R;R[$, notamment en $x = \frac{\pi}{2}$, ce qui contredit l'expression $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. Toujours est-il que $R \leqslant \frac{\pi}{2}$. En fait, $R = \frac{\pi}{2}$ mais c'est une autre histoire.

17.13 **a.** Pour $n \geqslant 1$, on partitionne les involutions σ de $[\![1;n+2]\!]$ en deux catégories :

- celles pour lesquelles $\sigma(n+2) = n+2$ sont au nombre de I_{n+1} car il n'y a pas de choix à faire pour $\sigma(n+2)$ qu'on impose égal à $n+2$, ensuite σ induit alors sur $[\![1;n+1]\!]$ une involution de $[\![1;n+1]\!]$.
- celles telles que $\sigma(n+2) = k \neq n+2$ sont au nombre de $(n+1)I_n$ car pour les choisir de manière bijective, il y a $n+1$ choix pour l'entier k qui est l'image de $n+2$ par σ et, une fois ce choix effectué, cela implique que $\sigma(k) = \sigma(\sigma(n+2)) = n+2$ car σ doit être une involution, et on a alors I_n choix pour finir de déterminer σ qui doit induire sur $[\![1;n+1]\!] \setminus \{k\}$ une involution de cet ensemble à n éléments.

Cette partition implique la relation $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$ pour $n \geqslant 1$ et, comme $I_2 = 2 = 1+1.1 = I_1 + 1.I_0$

avec la convention choisie pour I_0, on a bien : $\forall n \geqslant 0,\ I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.

b. Comme les involutions sont des permutations et qu'il y a $n!$ permutations de $[\![1;n]\!]$, on en déduit que $I_n \leqslant n!$ d'où $0 \leqslant \dfrac{I_n}{n!} \leqslant 1$. Comme la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ a pour rayon 1, par comparaison, on a $R \geqslant 1$.

c. Les calculs qui suivent sont valides car le rayon de convergence R est supérieur à 1, on sait qu'on peut dériver terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence qui contient $]-1;1[$. Pour $x \in]-1\,;1[$, $(1+x)\varphi(x) = \varphi(x)+x\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{I_n}{n!}x^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{I_{n-1}}{(n-1)!}x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{I_n + nI_{n-1}}{n!}x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{n!}x^n = \varphi'(x)$.

d. On en déduit en intégrant cette équation différentielle linéaire du premier ordre mise sous forme normalisée sans second membre, comme une primitive de $x \mapsto 1+x$ est $x \mapsto x + \dfrac{x^2}{2}$ sur l'intervalle $]-1;1[$, que l'on a $\forall x \in]-1\,;1[,\ \varphi(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$ puisque $\varphi(0) = I_0 = 1$ par convention.

e. Alors $\forall x \in]-1;1[,\ \varphi(x) = \left(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \dfrac{1}{i!}x^i\right) \times \left(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \dfrac{1}{j!2^j}x^{2j}\right)$. Ces deux séries ont pour rayon $+\infty$ donc on peut effectuer le produit de CAUCHY et obtenir $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{i+2j=n} \dfrac{n!}{i!j!2^j}\right)x^n$. En identifiant (par unicité) les coefficients entre les deux expressions de $S(x)$ sous forme de série entière, $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{I_n}{n!} = \sum\limits_{i+2j=n} \dfrac{1}{i!j!2^j}$ donc $I_n = \sum\limits_{i+2j=n} \dfrac{n!}{i!j!2^j}$. Puisque $2j \leqslant n$ et $i = n-2j$, on a la formule $I_n = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \dfrac{n!}{(n-2j)!j!2^j}$.

Pour expliquer cette relation de manière combinatoire, on peut constater qu'une involution σ de $[\![1;n]\!]$ est une application telle que pour tout entier x entre 1 et n, on a deux choix :

- soit $\sigma(x) = x$ et x est appelé un point fixe de σ.
- soit $\sigma(x) = y \neq x$ et alors, comme $\sigma^2 = \mathrm{id}_{[\![1;n]\!]}$, on a forcément $\sigma(y) = x$.

Ainsi, si $\sigma \in A_n$, le nombre f de points fixes de σ a la même parité que n de sorte qu'il existe $2j$ entiers de $[\![1;n]\!]$ qui ne sont pas fixes par σ avec $f = n-2j$ avec $0 \leqslant j \leqslant \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$. On peut donc écrire $A_n = \bigcup\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A_{n,j}$ où $A_{n,j} = \{\sigma \in A_n \mid \sigma \text{ admet } f = n-2j \text{ points fixes}\}$.

Pour construire une involution σ de $A_{n,j}$:

- on choisit les $n-2j$ éléments de $[\![1;n]\!]$ qui sont fixes par σ : $\dbinom{n}{n-2j} = \dbinom{n}{2j}$ choix.
- on choisit l'image y du plus petit élément x qui reste : $(2j-1)$ choix (et alors $\sigma(x) = y$ et $\sigma(y) = x$).
- on choisit l'image t du plus petit élément z qui reste : $(2j-3)$ choix etc...

Ainsi $\mathrm{card}\,(A_{n,j}) = \dbinom{n}{2j} \times (2j-1) \times (2j-3) \times \cdots \times 3 \times 1 = \dfrac{n!}{(n-2j)!(2j)!} \times \dfrac{(2j)!}{2^j j!}$ en multipliant en haut et en bas par les termes pairs qui manquent. On retrouve bien $I_n = \mathrm{card}\,(A_n) = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathrm{card}\,(A_{n,j}) = \sum\limits_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \dfrac{n!}{(n-2j)!2^j j!}$.

$\boxed{\textbf{17.14}}$ **a.** On a deux types de déplacements possibles, vers le haut ou vers la droite. On doit en faire $2n$ pour aller de $(0,0)$ à (n,n) et il en faut n de chaque type. Cela fait donc $c_n = \dbinom{2n}{n}$ chemins possibles.

b. $\underline{n=1}$: il n'existe qu'un chemin $(0,0) \to (1,0) \to (1,1)$ avec cette propriété donc $d_1 = 1$.

$\underline{n=2}$: $(0,0) \to (1,0) \to (2,0) \to (2,1) \to (2,2)$ et $(0,0) \to (1,0) \to (1,1) \to (2,1) \to (2,2)$ donc $d_2 = 2$.

$\underline{n=3}$: on dessine tous les chemins et on trouve $(0,0)\to(1,0)\to(2,0)\to(3,0)\to(3,1)\to(3,2)\to(3,3)$, mais on obtient aussi celui-ci $(0,0)\to(1,0)\to(2,0)\to(2,1)\to(3,1)\to(3,2)\to(3,3)$ et encore celui-là $(0,0)\to(1,0)\to(2,0)\to(2,1)\to(2,2)\to(3,2)\to(3,3)$, enfin on a les deux derniers en commençant par $(0,0)\to(1,0)\to(1,1)\to(2,1)\to(3,1)\to(3,2)\to(3,3)$ et en terminant par celui qui rebondit sur la diagonale $(0,0)\to(1,0)\to(1,1)\to(2,1)\to(2,2)\to(3,2)\to(3,3)$ donc $d_3=5$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, notons $U_{n+1}=\Big\{c=(0,0)\to\cdots\to(n+1,n+1)$ les chemins qui restent au dessus de la diagonale$\Big\}$ et, on note $U_{n+1}^m=\Big\{c=(0,0)\to\cdots\to(m,m)\to\cdots\to(n+1,n+1)$ les chemins qui restent au dessus de la diagonale et tel que m est le plus petit entier $k\in[\![1;n+1]\!]$ tel que (k,k) appartient au chemin $c\Big\}$ pour tout entier $m\in[\![1;n+1]\!]$. Comme cet entier m existe par définition d'un chemin puisque $(n+1,n+1)$ appartient à ces chemins, on a la partition $U_{n+1}=\displaystyle\bigsqcup_{m=1}^{n+1}U_{n+1}^m$ de sorte que $u_{n+1}=\text{card}\,(U_{n+1})=\displaystyle\sum_{m=1}^{n+1}\text{card}\,(U_{n+1}^m)$. Traitons trois cas :

- Si $m=1$, on crée une bijection entre U_{n+1}^1 et U_n, donc $\text{card}\,(U_{n+1}^1)=d_n=d_0d_n$ car $d_0=1$, en envoyant le chemin $c=(0,0)\to(0,1)\to\underbrace{(1,1)\to\cdots\to(x_k,y_k)\to\cdots\to(n+1,n+1)}_{\sigma'}\in U_{n+1}^1$ sur le chemin $c'=(0,0)\to\cdots\to(x_k-1,y_k-1)\to\cdots\to(n,n)\in U_n$.
- Si $m\in[\![2;n]\!]$, on a une bijection entre les ensembles U_{n+1}^m et $U_{m-1}\times U_{n-m+1}$ en envoyant le chemin $c=(0,0)\to\underbrace{(0,1)\to\cdots\to(m-1,m)}_{\sigma'}\to\underbrace{(m,m)\to(m,m+1)\to\cdots\to(n,n+1)\to(n+1,n+1)}_{\sigma''}$ de U_{n+1}^m sur le couple $(c',c'')\in U_{m-1}\times U_{n-m+1}$ où $c'=(0,0)\to\cdots\to(x_i,y_i-1)\to\cdots(m-1,m-1)$ appartient à U_{m-1} et $c''=(0,0)\to\cdots\to(x_k-m,y_k-m)\to\cdots\to(n-m+1,n-m+1)\in U_{n-m+1}$. Ainsi, $\text{card}\,(U_n^m)=\text{card}\,(U_{m-1}\times U_{n-m+1})=\text{card}\,(U_{m-1})\times\text{card}\,(U_{n-m+1})=d_{m-1}d_{n-m+1}$.
- Si $m=n+1$, on crée une bijection entre U_{n+1}^{n+1} et U_n, ce qui donne $\text{card}\,(U_{n+1}^{n+1})=d_n=d_nd_0$, en envoyant le chemin $c=(0,0)\to\underbrace{(0,1)\to\cdots\to(x_k,y_k)\to\cdots\to(n,n+1)}_{\sigma'}\to(n+1,n+1)\in U_{n+1}^{n+1}$ sur le chemin $c'=(0,0)\to\cdots\to(x_k,y_k-1)\to\cdots\to(n,n)\in U_n$.

Par conséquent, $d_{n+1}=d_0d_n+\Big(\displaystyle\sum_{m=2}^{n}d_{m-1}d_{n-m+1}\Big)+d_nd_0=\sum_{k=0}^{n}d_kd_{n-k}$ en posant $k=m-1$. Cette relation est encore vraie pour $n=0$ car $d_1=d_0^2=1$.

c. Les chemins qui vont de $(0,0)$ à (n,n) et qui restent toujours au-dessus de la diagonale $x=y$ font partie des chemins qu'on a dénombré à la question **a.**. Ainsi, par inclusion, on a $0\leqslant d_n\leqslant c_n=\dbinom{2n}{n}$. Le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant0}c_nx^n$ vaut $\dfrac{1}{4}$ par D'ALEMBERT car $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=\dfrac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}}=\dfrac{(2n+2)!n!^2}{(2n)!(n+1)!^2}=\dfrac{2(2n+1)}{n+1}$ tend vers $\ell=4$. D'après le cours et l'encadrement précédent, on a donc $R\geqslant\dfrac{1}{4}$.

d. Pour $x\in]-R;R[$, on a $f(x)^2=\Big(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}d_nx^n\Big)^2=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}d_kd_{n-k}\Big)x^n$ par produit de CAUCHY donc, avec la relation de **c.**, on a $f(x)^2 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} d_{n+1}x^n$ donc $xf(x)^2 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} d_{n+1}x^{n+1} = f(x) - d_0 = f(x) - 1$.

e. Ainsi, $f(x)$ est racine du polynôme $P_x = xX^2 - X + 1$ dont le discriminant vaut $\Delta = 1 - 4x$. Comme $f(x) \in \mathbb{R}$, on a forcément $\Delta \geqslant 0$ donc $x \leqslant \frac{1}{4}$. Ceci garantit que $R \leqslant \frac{1}{4}$ donc $R = \frac{1}{4}$ avec **d.**. On donc $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ ou $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = u_0 = 1$. Comme $g : x \mapsto 2xf(x) - 1$ est développable en série entière sur $]-R;R[$, elle y est continue et on sait d'après ce qui précède que $\forall x \in]-R;R[,\ g(x) = \pm\sqrt{1-4x}$. La continuité de g et le fait que g ne s'annule pas sur $]-R;R[$ montre que l'on a soit $\forall x \in]-R;R[,\ g(x) = \sqrt{1-4x}$ soit $\forall x \in]-R;R[,\ g(x) = -\sqrt{1-4x}$. Mais comme g vaut -1 en 0, elle est négative sur $]-R;R[$ et on a donc $\forall x \in]-R;R[,\ g(x) = -\sqrt{1-4x}$ donc $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ si $x \neq 0$.

f. D'après le cours $\forall u \in]-1;1[,\ \sqrt{1+u} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!u^n}{(2n-1)(n!)^2 4^n}$ (on le retrouve assez vite avec le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha = \frac{1}{2}$) donc $\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[,\ \sqrt{1-4x} = 1 - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n)!x^n}{(2n-1)(n!)^2}$ ce qui montre que $\forall x \in \left]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right[\setminus \{0\},\ \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n)!x^{n-1}}{2(2n-1)(n!)^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n+2)!x^n}{2(2n+1)\big((n+1)!\big)^2}$ qu'on va plutôt écrire $\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!x^n}{n!(n+1)!}$ et, en identifiant par unicité d'un développement en série entière, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

Par exemple, $d_0 = \dfrac{(2.0)!}{0!(0+1)!} = 1$, $d_1 = \dfrac{(2.1)!}{1!(1+1)!} = 1$, $d_2 = \dfrac{(2.2)!}{2!(2+1)!} = 2$ et $d_3 = \dfrac{(2.3)!}{3!(3+1)!} = 5$ qui confirme les calculs de la question **b.**. Et on a $d_4 = \dfrac{(2.4)!}{4!(4+1)!} = 14$ et $d_5 = \dfrac{(2.5)!}{5!(5+1)!} = 42$.

Cette probabilité, avec les données de l'énoncé, vaut $p_n = \dfrac{d_n}{c_n} = \dfrac{1}{n+1}$.