TD 18 : VARIABLES ALÉATOIRES

PSI 1 2025-2026 **vendredi 30 janvier 2026**

18.1 **a.** On note D_k = “le tirage k est différent du tirage $k-1$”. On a $(X=k) = D_2 \cap \cdots D_{k-1} \cap \overline{D_k}$ pour $k \geqslant 2$ donc $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(D_2) \times \mathbb{P}_{D_2}(D_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{D_2\cap\cdots\cap D_{k-2}}(D_{k-1}) \times \mathbb{P}_{D_2\cap\cdots\cap D_{k-1}}(\overline{D_k})$ par la formule des probabilités composées. Par l'indépendance des tirages imposée dans l'énoncé, tirer au tirage k la même couleur qu'au tirage $k-1$ ne dépend pas de ce qu'on a tiré avant le tirage $k-1$ donc, $\forall i \in [\![2;k]\!]$, $\mathbb{P}_{D_2\cap\cdots\cap D_{i-1}}(D_i) = \dfrac{n-1}{n}$ et on trouve donc $\mathbb{P}(X=k) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-2}\dfrac{1}{n} = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-2} - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}$.

Soit A = “le processus s'arrête” $= (X < +\infty) = \displaystyle\bigsqcup_{k=2}^{+\infty}(X=k)$ (réunion incompatible), par σ-additivité, $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-2} - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}\right) = 1$ par télescopage car $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1} = 0$. Le processus s'arrête donc presque sûrement.

b. <u>Méthode 1</u> : pour $k \geqslant 2$, comme $(X \geqslant k) = \displaystyle\bigsqcup_{i=k}^{+\infty}(X=i)$ (réunion incompatible), par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(X \geqslant k) = \displaystyle\sum_{i=k}^{+\infty}\left(\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{i-2} - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{i-1}\right)$ donc $\mathbb{P}(X \geqslant k) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-2}$ par télescopage car $\displaystyle\lim_{i\to+\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{i-1} = 0$. Par contre, $\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1$. Comme X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, d'après le cours, il vient $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X \geqslant k) = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-2} = 1 + \dfrac{1}{1-\frac{n-1}{n}} = n+1$.

Par théorème de transfert, on a $\mathbb{E}(X(X-1)) = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)\,\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-2}$ car $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*\setminus\{2\}$ en cas de convergence. Or $\forall t \in]-1;1[$, $\left(\dfrac{1}{1-t}\right)'' = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}t^k\right)'' = \sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)t^{k-2} = \dfrac{2}{(1-t)^3}$ donc $\mathbb{E}(X(X-1)) = 2n^2$. Ainsi $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = 2n^2+n+1-(n+1)^2 = n(n-1)$.

<u>Méthode 2</u> : comme $(X-1=k) = (X=k+1)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(X-1=k) = \left(\dfrac{1}{n}\right) \times \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$ donc $X-1$ suit la loi géométrique de paramètre $p_n = \dfrac{1}{n}$. Ainsi, d'après le cours, $\mathbb{E}(X-1) = \dfrac{1}{p_n} = \mathbb{E}(X)-1$ donc $\mathbb{E}(X) = n+1$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X-1) = \dfrac{1-p_n}{p_n^2}$ donc $\mathbb{V}(X) = n^2\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = n(n-1)$.

18.2 **a.** La matrice BA^T est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et toutes ses colonnes sont proportionnelles à la matrice colonne B donc rang $(BA^T) \leqslant 1$. On distingue alors deux cas :

- Si $A=0$ ou $B=0$, alors $BA^T=0$ donc rang $(BA^T)=0$.
- Si $A \neq 0$ et $B \neq 0$, alors en notant $A=(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $B=(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, $\exists (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $a_i \neq 0$ et $b_j \neq 0$. Or $BA^T = (a_jb_i)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ donc BA^T n'est pas nulle donc pas de rang 0. Ainsi, rang $(BA^T)=1$.

Traduisons la condition d'appartenance à E. Soit $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et posons $M = BC^T$, alors $M^2 = BC^TBC^T$. Or $C^TB \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ qui contient le réel $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c_kb_k = \mathrm{Tr}\,(BC^T) = \mathrm{Tr}\,(M)$ (en notant $C=(c_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$). Ainsi, $M^2 = \mathrm{Tr}\,(M)M$, le polynôme $P = X^2 - \mathrm{Tr}\,(M)X$ est donc annulateur de M. Distinguons à nouveau deux cas :

- Si $\text{Tr}(M) = 0$, alors X^2 annule M donc $\text{Sp}(M) = \{0\}$ (car M est nilpotente donc non inversible et 0 est valeur propre de M et la seule racine de X^2 est 0) et M est diagonalisable si et seulement si $E_0(M) = \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire si et seulement si $M = 0$.
- Si $\text{Tr}(M) \neq 0$, alors $P = X(X - \text{Tr}(M))$ annule M et ce polynôme est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ donc la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On en déduit l'équivalence : M est diagonalisable $\Longleftrightarrow$ $(M = 0$ ou $\text{Tr}(M) \neq 0)$. Ce qui peut aussi s'écrire : $(M = 0$ ou M non diagonalisable$) \Longleftrightarrow \text{Tr}(M) = 0$. Ainsi, $E = \{C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(BC^T) = 0\}$.
$E \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $0 \in E$. Soit $(C_1, C_2) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\text{Tr}(B(\lambda C_1 + C_2)^T) = \lambda \text{Tr}(BC_1^T) + \text{Tr}(BC_2^T) = \lambda.0 + 0 = 0$ donc $\lambda C_1 + C_2 \in E$. Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc lui-même un espace vectoriel.
Traitons deux cas :

- si $B = 0$, $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim(E) = n$.
- si $B \neq 0$, $\varphi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(C) = \text{Tr}(BC^T)$ est une forme linéaire non nulle car $\varphi(B) = \text{Tr}(BB^T) = ||B||^2 > 0$ et $E = \text{Ker}(\varphi)$ donc E est un hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim(E) = n-1$.

b. D'après ce qui précède, BX^T diagonalisable si et seulement si $BX^T = 0$ ou $\text{Tr}(BX^T) \neq 0$. Or comme $B \neq 0$ et $X \neq 0$, on ne peut pas avoir $BX^T = 0$. Ainsi, BX^T diagonalisable si et seulement si $\text{Tr}(BX^T) = \sum_{k=1}^{n} X_k \neq 0$.

Traitons deux cas :

- si n est impair, comme tous les X_k sont à valeurs ± 1, donc impaires, $\text{Tr}(BX^T)$ impair donc on ne peut pas avoir $\text{Tr}(BX^T) = 0$ et $U = \Omega$ donc $\mathbb{P}(U) = 1$.
- si $n = 2p$ est pair, les variables aléatoires $B_k = \dfrac{X_k + 1}{2}$ suivent des lois de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et sont mutuellement indépendantes donc $S_n = \sum_{k=1}^{n} B_k = \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{2}\text{Tr}(BX^T)$ suit la loi binomiale de paramètres $n, \dfrac{1}{2}$ donc $\mathbb{P}(\text{Tr}(BX^T) = 0) = \mathbb{P}(S_n = p) = \mathbb{P}(\overline{U}) = \dbinom{2p}{p}\left(\dfrac{1}{2}\right)^p\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2p-p} = \dbinom{2p}{p}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2p}$.
On en déduit donc que $\mathbb{P}(U) = 1 - \mathbb{P}(\overline{U}) = 1 - \dbinom{2p}{p}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2p}$.

18.3 Notons pour toute la suite T_k la variable aléatoire qui est le résultat du tirage d'indice k s'il a lieu. Par construction, $X_n(\Omega) \subset [\![1; n]\!]$ donc X_n est bornée et admet donc une espérance finie. On suppose bien sûr aussi que chaque boule de l'urne a autant de chance d'être tirée à chaque étape.

a. Si $n = 1$, on vide l'urne en un seul tirage. Ainsi, X_1 est constante égale à 1 donc $\mathbb{E}(X_1) = 1$.
Si $n = 2$, $(X_2 = 1) = (T_1 = 1)$ et $(X_2 = 2) = (T_1 = 2, T_2 = 1)$ donc $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(T_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(T_1 = 2)\,\mathbb{P}(T_2 = 1 \mid T_1 = 2) = \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, par définition, $\mathbb{E}(X_2) = \dfrac{1}{2} \times 1 + \dfrac{1}{2} \times 2 = \dfrac{3}{2}$.
Pour $n \geqslant 2$ et $i = 1$, on a $(X_n = 1) = (T_1 = 1)$ donc $\mathbb{P}(X_n = 1) = \dfrac{1}{n}$.

Pour $n \geqslant 2$ et $i \in [\![2; n]\!]$, on a $(X_n = i) = \bigsqcup_{j=2}^{n} (T_1 = j, X_n = i)$. Cette réunion étant disjointe, on a donc $\mathbb{P}(X_n = i) = \sum_{j=2}^{n} \mathbb{P}(T_1 = i)\,\mathbb{P}(X_n = i \mid T_1 = j)$. Or, quand on a tiré la boule j au premier tirage, on enlève les boules numérotées $j, j+1, \cdots, n$ et on se retrouve au point de départ du problème définissant

X_{j-1}, une urne contenant les boules numérotées de 1 à $j-1$, avec les mêmes règles, sauf qu'on a déjà effectué un tirage. Ainsi, $\mathbb{P}(X_n = i \mid T_1 = j) = \mathbb{P}(X_{j-1} = i-1)$. Par conséquent, si $n \geqslant 2$ et $i \in [\![2;n]\!]$, $\mathbb{P}(X_n = i) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=2}^{n}\mathbb{P}(X_{j-1} = i-1) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(X_k = i-1)$ en posant $k = j-1$.
Alors, $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} i\,\mathbb{P}(X_n = i) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=2}^{n} i \sum\limits_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(X_k = i-1) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{i=2}^{n} i\,\mathbb{P}(X_k = i-1)$ en inversant la somme double. Mais $\mathbb{P}(X_k = i-1) = 0$ dès que $i > k$ donc $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{i=2}^{k+1} i\,\mathbb{P}(X_k = i-1)$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{i=2}^{k+1}(i-1+1)\,\mathbb{P}(X_k = i-1) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\big(1 + \mathbb{E}(X_k)\big)$ car $\mathbb{E}(X_k) = \sum\limits_{i=2}^{k+1}(i-1)\,\mathbb{P}(X_k = i-1)$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \sum\limits_{i=2}^{k+1}\mathbb{P}(X_k = i-1)$. On a donc bien la relation attendue, $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(X_k)$ si $n \geqslant 2$.
b. Méthode 1 : d'après **b.**, on a $\mathbb{E}(X_3) = 1 + \dfrac{1}{3}\Big(1 + \dfrac{3}{2}\Big) = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$. De même, on obtient $\mathbb{E}(X_4) = 1 + \dfrac{1}{4}\Big(1 + \dfrac{3}{2} + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\Big) = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{12}$. Il semble que $\mathbb{E}(X_n) = H_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. On a déjà réalisé l'initialisation pour $n = 1$, et $n = 2$. Soit $n \geqslant 2$ tel que $\forall k \in [\![1;n-1]\!]$, $E(X_k) = H_k$, d'après la question **b.**, on a $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(X_k) = 1 + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{1}{j}$ donc $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n-1}\sum\limits_{k=j}^{n-1}\dfrac{1}{j} = 1 + \dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n-1}\dfrac{n-j}{j} = 1 + \Big(\sum\limits_{j=1}^{n-1}\dfrac{1}{j}\Big) - \dfrac{n-1}{n} = H_n$. Par principe de récurrence forte, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = H_n$ donc $\mathbb{E}(X_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ (par comparaison série-intégrale avec $x \mapsto \dfrac{1}{x}$).
Méthode 2 : d'après **b.**, pour $n \geqslant 2$, $n\,\mathbb{E}(X_n) = n + \sum\limits_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(X_k)$ et $(n+1)\,\mathbb{E}(X_{n+1}) = (n+1) + \sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)$ donc $(n+1)\,\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + n\,\mathbb{E}(X_n) + \mathbb{E}(X_n) = (n+1)\,\mathbb{E}(X_n) + 1$ d'où $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{n+1}$. Par télescopage, on a donc $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \sum\limits_{k=1}^{n-1}\big(\mathbb{E}(X_{k+1}) - \mathbb{E}(X_k)\big) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k+1} = H_n$ et $\mathbb{E}(X_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.
Question supplémentaire : comme $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[1;+\infty[$, on a la majoration $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)dt = \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leqslant f(k) = \frac{1}{k}$ et $\forall k \in [\![2;n]\!]$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t} \geqslant \frac{1}{k}$. En sommant la première inégalité pour $k \in [\![1;n]\!]$ et par CHASLES, on obtient $\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{dt}{t} \leqslant H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Si on fait de même pour la seconde pour $k \in [\![2;n]\!]$, on a $\displaystyle\int_1^{n}\frac{dt}{t} \geqslant H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$. Ainsi, $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$. Comme $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n) + 1$, par encadrement, on a donc $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

18.4 **a.** Quand on choisit l'urne U_i, la probabilité de tirer une boule blanche est de $\frac{i}{p}$, et comme les tirages se font avec remise, ils sont indépendants. D'après le cours, la loi de N_p sachant A_i est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{i}{p}\right)$.

Par conséquent, $\mathbb{P}_{A_i}(N_p = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{i}{p}\right)^k\left(1-\frac{i}{p}\right)^{n-k}$ pour $i \in [\![0;p]\!]$ et $k \in [\![0;n]\!]$.

La variable aléatoire N_p est bornée car $0 \leqslant N_p \leqslant n$ donc elle admet une espérance finie et on a par définition $\mathbb{E}(N_p) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(N_p = k)$. Comme $\{A_0, \cdots, A_p\}$ est un système complet d'évènements, on a $\mathbb{P}(N_p = k) = \sum\limits_{i=0}^{p} \mathbb{P}_{A_i}(N_p = k)\mathbb{P}(A_i)$ par la formule des probabilités totales. Si on suppose que toutes les urnes ont la même chance d'être choisies, $\mathbb{P}(N_p = k) = \sum\limits_{i=0}^{p} \frac{\mathbb{P}_{A_i}(N_p = k)}{p+1}$. En reportant, on a donc la relation $\mathbb{E}(N_p) = \frac{1}{p+1}\sum\limits_{k=0}^{n} k \sum\limits_{i=0}^{p}\binom{n}{k}\left(\frac{i}{p}\right)^k\left(1-\frac{i}{p}\right)^{n-k}$. En inversant cette somme double, on obtient la relation $\mathbb{E}(N_p) = \frac{1}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p}\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\left(\frac{i}{p}\right)^k\left(1-\frac{i}{p}\right)^{n-k}$ qui devient, car $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et en posant le changement d'indice $j = k-1$, $\mathbb{E}(N_p) = \frac{n}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p}\frac{i}{p}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\left(\frac{i}{p}\right)^j\left(1-\frac{i}{p}\right)^{n-1-j}$. Or, avec le binôme de Newton, on a $\sum\limits_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\left(\frac{i}{p}\right)^j\left(1-\frac{i}{p}\right)^{n-1-j} = \left(1-\frac{i}{p}+\frac{i}{p}\right)^{n-1} = 1$ donc on obtient finalement $\mathbb{E}(N_p) = \frac{n}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p}\frac{i}{p} = \frac{np(p+1)}{2(p+1)p} = \frac{n}{2}$. Rien que de très prévisible car il y a autant de chance en général de tirer des boules blanches ou noires et on en tire n en tout.

b. Pour $k \in [\![1;n-1]\!]$, on a $\mathbb{P}(N_p = k) = \frac{1}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p}\binom{n}{k}\left(\frac{i}{p}\right)^k\left(1-\frac{i}{p}\right)^{n-k}$ d'après la question précédente donc $\mathbb{P}(N_p = k) = \binom{n}{k}\frac{p}{p+1}\left[\frac{0^k 1^{n-k}}{p}+\frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{p}\left(\frac{i}{p}\right)^k\left(1-\frac{i}{p}\right)^{n-k}\right]$. Comme $f_k : x \mapsto x^k(1-x)^{n-k}$ est continue sur le segment $[0;1]$, et que $\frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{p}\left(\frac{i}{p}\right)^k\left(1-\frac{i}{p}\right)^{n-k} = \frac{1-0}{p}\sum\limits_{i=1}^{p} f_k\left(\frac{i}{p}\right)$ est une somme de Riemann associée à cette fonction, par théorème, $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{p}\left(\frac{i}{p}\right)^k\left(1-\frac{i}{p}\right)^{n-k} = \int_0^1 f_k(x)dx$. Il est clair que $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{p}{p+1} = 1$ et $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{0^k 1^{n-k}}{p} = 0$ donc, par somme et produit, $\lim\limits_{p\to+\infty}\mathbb{P}(N_p = k) = \binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$.

18.5 Par construction, on a $X(\Omega) = [\![2;+\infty]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1;+\infty]\!]$ en convenant que $Y = +\infty$ si on n'obtient jamais pile et $X = +\infty$ si on n'obtient jamais la séquence "pile-face". On a aussi $X \geqslant Y+1$. En notant l'évènement $P_k =$ "on tombe sur pile au lancer k", on peut écrire, pour des entiers $x \geqslant 2$ et $y \geqslant 1$ tels que $x > y$, $(X = x, Y = y) = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{y-1}\overline{P_i}\right) \cap \left(\bigcap\limits_{i=y}^{x-1} P_i\right) \cap \overline{P_x}$. On suppose que $(P_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite d'évènements indépendants, ce qui montre d'après le cours que $\overline{P_1}, \cdots \overline{P_{y-1}}, P_y, \cdots, P_{x-1}, \overline{P_x}$ le sont aussi, ce qui donne $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \prod\limits_{i=1}^{y-1}\mathbb{P}(\overline{P_i}) \times \prod\limits_{i=y}^{x-1}\mathbb{P}(P_i) \times \mathbb{P}(\overline{P_x}) = \frac{1}{2^x}$ car la pièce est équilibrée par hypothèse.

Pour $n \geqslant 1$, $(Y = +\infty) \subset \bigcap\limits_{y=1}^{n}\overline{P_y}$ donc $0 \leqslant \mathbb{P}(Y = +\infty) \leqslant \frac{1}{2^n}$. Par encadrement, $\mathbb{P}(Y = +\infty) = 0$.

Soit $x \geqslant 2$, on a $(X = x) = \bigsqcup\limits_{y=1}^{x-1}(X = x, Y = y)$ (réunion disjointe) donc $\mathbb{P}(X = x) = \sum\limits_{y=1}^{x-1}\mathbb{P}(X = x, Y = y)$

par σ-additivité. Ainsi, $\mathbb{P}(X=x)=\dfrac{x-1}{2^x}$. On sait que $\forall t\in]-1;1[$, $\displaystyle\sum_{x=2}^{+\infty}t^{x-1}=\frac{t}{1-t}=\frac{1}{1-t}-1$. On dérive à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence pour avoir $\forall t\in]-1;1[$, $\displaystyle\sum_{x=2}^{+\infty}(x-1)t^{x-2}=\frac{1}{(1-t)^2}$ donc $\forall t\in]-1;1[$, $\displaystyle\sum_{x=2}^{+\infty}(x-1)t^{x}=\frac{t^2}{(1-t)^2}$. En prenant $t=\dfrac{1}{2}$, on a $\displaystyle\sum_{x=2}^{+\infty}\mathbb{P}(X=x)=1$ donc, comme $\Omega=(X=+\infty)\sqcup\Big(\displaystyle\bigsqcup_{x=2}^{+\infty}(X=x)\Big)$, il vient $\mathbb{P}(X=+\infty)=1-\displaystyle\sum_{x=2}^{+\infty}\mathbb{P}(X=x)=0$ comme attendu.

$\mathbb{E}(X)=\displaystyle\sum_{x=2}^{+\infty}x\,\mathbb{P}(X=x)=\sum_{x=2}^{+\infty}\frac{x(x-1)}{2^x}$. On dérive une autre fois $\forall t\in]-1;1[$, $\displaystyle\sum_{x=2}^{+\infty}(x-1)t^{x}=\frac{t^2}{(1-t)^2}$ pour avoir $\forall t\in]-1;1[$, $\displaystyle\sum_{x=2}^{+\infty}x(x-1)t^{x-1}=\frac{2t}{(1-t)^3}$ d'où $\forall t\in]-1;1[$, $\displaystyle\sum_{x=2}^{+\infty}x(x-1)t^{x}=\frac{2t^2}{(1-t)^3}$. Avec $t=\dfrac{1}{2}$ à nouveau, on a $\mathbb{E}(X)=4$.

18.6 **a.** Comme $X(\Omega)\subset\mathbb{N}$, pour $n\in\mathbb{N}$, on a $(Y=n)=\displaystyle\bigsqcup_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k,Y=n)$ (incompatible) donc, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(Y=n)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k,Y=n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{p}{2^n}(1-p)^n$ d'après l'énoncé. Ainsi, $\mathbb{P}(Y=n)=\dfrac{p}{2^n}(1-p)^n\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\frac{p}{2^n}(1-p)^n(1+1)^n=p(1-p)^n$. Par conséquent, $1+Y$ suit la loi géométrique de paramètre p car $(1+Y)(\Omega)\subset\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(Y+1=n)=\mathbb{P}(Y=n-1)=p(1-p)^{n-1}$.

On sait que $\forall x\in]-1;1[$, $\dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$. En dérivant cette relation k fois sur l'intervalle ouvert de convergence de cette fonction développable en série entière, on obtient la formule du binôme négatif, qui s'écrit $\forall x\in]-1;1[$, $\dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}=\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}\iff\frac{1}{(1-x)^{k+1}}=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}$.

b. $\forall k\in\mathbb{N}$, $(X=k)=\displaystyle\bigsqcup_{n=0}^{+\infty}(Y=n,\ X=k)$ (réunion disjointe) donc, par σ-additivité, on obtient comme avant $\mathbb{P}(X=k)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=n,\ X=k)=p\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n(1-p)^n=p\Big(\frac{1-p}{2}\Big)^k\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\Big(\frac{1-p}{2}\Big)^{n-k}$.
Ainsi $\mathbb{P}(X=k)=p\,\Big(\dfrac{1-p}{2}\Big)^k\times\dfrac{1}{\Big(1-\big(\frac{1-p}{2}\big)\Big)^{k+1}}=\Big(\dfrac{2p}{1+p}\Big)\Big(\dfrac{1-p}{1+p}\Big)^k=\Big(\dfrac{2p}{1+p}\Big)\Big(1-\dfrac{2p}{1+p}\Big)^k$ après simplification. Comme en question **a.**, $1+X$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{2p}{1+p}$.

$\mathbb{P}(X=Y=0)=p\neq\dfrac{2p^2}{1+p}=\mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0)$ car $p^2\neq p$: X et Y ne sont pas indépendantes.

c. Z prend presque sûrement ses valeurs dans $\mathbb{N}$ d'après les conditions imposées à X et Y et pour $m\in\mathbb{N}$, comme avant, on a $(Z=m)=\displaystyle\bigsqcup_{k=0}^{+\infty}(X=k,\ Y=m+k)$ donc $\mathbb{P}(Z=m)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{m+k}{k}a^{m+k}(1-p)^{m+k}p$.
Comme $\dbinom{m+k}{k}=\dbinom{m+k}{m}$ et en posant $i=m+k$, on a $\mathbb{P}(Z=m)=\displaystyle\sum_{i=m}^{+\infty}\binom{i}{m}(a(1-p))^ip$ donc $\mathbb{P}(Z=m)=p(a(1-p))^m\displaystyle\sum_{i=m}^{+\infty}\binom{i}{m}(a(1-p))^{i-m}=p\Big(\frac{1-p}{2}\Big)^m\times\frac{1}{\Big(1-\big(\frac{1-p}{2}\big)\Big)^{m+1}}=\frac{2p}{1+p}\Big(\frac{1-p}{1+p}\Big)^m$.

Ainsi, $1+Z$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{2p}{1+p}$, comme X.

Comme $\mathbb{P}(Y=n)=p(1-p)^n>0$, la loi de X sachant $(Y=n)$ existe pour tout $n\in\mathbb{N}$. Si $k>n$,

$\mathbb{P}(X = k|Y = n) = 0$ par hypothèse et, si $k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k|Y = n) = \dfrac{\mathbb{P}(X = k, Y = n)}{\mathbb{P}(Y = n)}$ par définition donc $\mathbb{P}(X = k|Y = n) = \dfrac{\binom{n}{k}(1/2)^n(1-p)^n p}{p(1-p)^n} = \binom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. La loi de X sachant $(Y = n)$ est la loi $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

18.7 **a.** On peut mettre un jeton dans chaque urne et on peut mettre tous les jetons dans l'urne U_1, ce sont les cas extrêmes. Tous les cas intermédiaires sont possibles. Ainsi, $X_n(\Omega) = [\![0; n-1]\!]$. Si on note L_k le numéro de l'urne dans laquelle on met le k-ième jeton, on a $(X_n = 0) = \bigcap\limits_{k=1}^{n}(L_k = k)$ (le jeton k dans l'urne U_k) ou $(X_n = n-1) = \bigcap\limits_{k=1}^{n}(L_k = 1)$ (tous les jetons dans l'urne U_1) donc, par indépendance des “placements”, $\mathbb{P}(X_n = 0) = \prod\limits_{k=1}^{n}\mathbb{P}(L_k = k) = \prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{n!}$ et $\mathbb{P}(X_n = n) = \prod\limits_{k=1}^{n}\mathbb{P}(L_k = 1) = \prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{n!}$.

b. Comme le premier jeton va dans l'urne U_1 par définition, $\mathbb{P}(B_1 = 1) = 0$ et $\mathbb{P}(B_1 = 0) = 1$.

Soit $k \in [\![2; n]\!]$, les $k-1$ premiers jetons ne peuvent pas aller dans l'urne U_k par construction, et l'urne U_k est vide à la fin si et seulement si les $n-k+1$ derniers jetons ne sont pas mis dans l'urne U_k. Ainsi, on a $(B_k = 1) = \bigcap\limits_{i=k}^{n}(L_i \neq k)$. Par “indépendance des jetons”, $\mathbb{P}(B_k = 1) = \prod\limits_{i=k}^{n}\mathbb{P}(L_i \neq k) = \prod\limits_{i=k}^{n}\dfrac{i-1}{i} = \dfrac{k-1}{n}$ par télescopage multiplicatif (marche aussi si $k = 1$) : B_k suit la loi de BERNOULLI de paramètre $\dfrac{k-1}{n}$.

c. Comme $X_n = \sum\limits_{k=2}^{n} B_k$, $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=2}^{n}\mathbb{E}(B_k) = \sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{k-1}{n} = \dfrac{n(n-1)}{2n} = \dfrac{n-1}{2}$ par linéarité de l'espérance. D'après le cours, $\mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=2}^{n} B_k\right) = \sum\limits_{k=2}^{n}\mathbb{V}(B_k) + 2\sum\limits_{2 \leqslant i < j \leqslant n}\mathrm{Cov}(B_i, B_j)$. Comme $B_k \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{k-1}{n}\right)$, on sait que $\mathbb{V}(B_k) = \dfrac{k-1}{n}\left(1 - \dfrac{k-1}{n}\right) = \dfrac{(k-1)(n-k+1)}{n^2}$. De plus, $\mathrm{Cov}(B_i, B_j) = \mathbb{E}(B_iB_j) - \mathbb{E}(B_i)\mathbb{E}(B_j)$ et la variable aléatoire B_iB_j suit la loi de BERNOULLI de paramètre $\mathbb{P}(B_iB_j = 1) = \mathbb{P}(B_i = 1, B_j = 1)$ car elle ne peut valoir que 0 ou 1. Comme avant, si $i < j$ et $n \geqslant 2$, $(B_i = 1, B_j = 1) = \left(\bigcap\limits_{k=i}^{j-1}(L_k \neq i)\right) \times \left(\bigcap\limits_{k=j}^{n}(L_k \notin \{i, j\})\right)$ d'où $\mathbb{P}(B_i = 1, B_j = 1) = \left(\prod\limits_{k=i}^{j-1}\dfrac{k-1}{k}\right) \times \left(\prod\limits_{k=j}^{n}\dfrac{k-2}{k}\right) = \dfrac{i-1}{j-1} \times \dfrac{(j-2)(j-1)}{n(n-1)} = \dfrac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$ par indépendance des L_k. Ainsi, $\mathbb{V}(X_n) = \sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{(k-1)(n-k+1)}{n^2} + 2\sum\limits_{2 \leqslant i < j \leqslant n}\dfrac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$. En décalant les indices dans les deux sommes, on obtient $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{m=1}^{n-1} m(n-m) + \dfrac{2}{n(n-1)}\sum\limits_{v=2}^{n-1}(v-1)\left(\sum\limits_{u=1}^{v-1} u\right)$. On connaît ces sommes, et on a $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{n^2(n-1)}{2n^2} - \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6n^2} + \dfrac{1}{n(n-1)}\sum\limits_{v=2}^{n-1}(v-1)^2 v$. En écrivant $v = (v-1)+1$ et en décalant à nouveau, $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{n-1}{2} - \dfrac{(n-1)(2n-1)}{6n} + \dfrac{1}{n(n-1)}\left(\dfrac{(n-2)^2(n-1)^2}{4} + \dfrac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}\right)$. Après simplifications, avec $\mathbb{V}(X_1) = 0$, on a $\forall n \geqslant 2$, $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{3n^3 - 9n^2 + 10n - 2}{12n}$.

18.8 **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$, pour avoir $X_n = 0$, il est d'abord nécessaire que le nombre de pas n soit pair. Ainsi, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 0$ si n est impair. Par contre, si $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $X_{2p} = 0$ si et seulement si p pas parmi $2p$ s'effectuent vers la gauche (réussite) et les p autres s'effectuant vers la droite (échec). Ce schéma binomial se traduit d'après le cours, en supposant bien sûr que tous les pas de cette marche sont indépendants, par la relation $\mathbb{P}(X_{2p} = 0) = \binom{2p}{p}\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(\frac{1}{2}\right)^p = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$. Par l'équivalent de STIRLING, on a $\mathbb{P}(X_{2p} = 0) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi p}(2p)^{2p}e^{2p}}{2^{2p}e^{2p}(2\pi p)p^{2p}} = \frac{1}{\sqrt{\pi p}}$. Par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(X_n = 0)$ diverge.

b. B_i ne prend que les valeurs 0 et 1 (si $X_i = 0$), cette variable aléatoire suit donc la loi de BERNOULLI de paramètre $\mathbb{P}(X_i = 0)$. Ainsi, $\mathbb{E}(B_i) = \mathbb{P}(X_i = 0)$. Soit $p \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{p} B_i$ prend des valeurs dans $\mathbb{N}$ donc, d'après le cours, $\mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^{p} B_i\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{p} B_i \geqslant k\Big)$. Ainsi, par linéarité de l'espérance et avec ce qui précède, $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{p} B_i \geqslant k\Big) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{E}(B_i) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(X_i = 0)$.

c. Si $k \in \mathbb{N}^*$, par définition de E_k et des B_i, on a $E_k = \bigcup_{p=1}^{+\infty}\Big(\sum_{i=1}^{p} B_i \geqslant k\Big)$ puisque $\sum_{i=1}^{p} B_i$ est le nombre de retours à l'origine pendant les p premiers pas de la marche. Comme la suite $\left(\Big(\sum_{i=1}^{p} B_i \geqslant k\Big)\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, on obtient, par continuité croissante, la relation $\mathbb{P}(E_k) = \lim_{p\to+\infty} \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{p} B_i \geqslant k\Big)$. Plus simplement, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(E_k) \geqslant \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{p} B_i \geqslant k\Big)$. Ainsi, $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_k) \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{p} B_i \geqslant k\Big) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(X_i = 0)$ en sommant. Comme cette minoration est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et que $\sum_{i\geqslant 1} \mathbb{P}(X_i = 0)$ diverge d'après **a.**, on en déduit que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_k) = +\infty$ et $\sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(E_k)$ diverge.

d. On a $E_2 = \bigsqcup_{1\leqslant i<j}\left(\Big(\bigcap_{n=1}^{i-1}(X_n \neq 0)\Big) \cap (X_i = 0) \cap \Big(\bigcap_{m=i+1}^{j-1}(X_m \neq 0)\Big) \cap (X_j = 0)\right)$ donc, par σ-additivité et probabilité conditionnelle, $\Big(\bigcap_{m=i+1}^{j-1}(X_m \neq 0)\Big) \cap (X_j = 0)$ ne dépend que de la position de la marche après le i-ième pas, on a $\mathbb{P}(E_2) = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=i+1}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\Big(\bigcap_{n=1}^{i-1}(X_n \neq 0)\Big) \cap (X_i = 0)\Big)\mathbb{P}_{(X_i=0)}\Big(\Big(\bigcap_{m=i+1}^{j-1}(X_m \neq 0)\Big) \cap (X_j = 0)\Big)$ d'où $\mathbb{P}(E_2) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\Big(\bigcap_{n=1}^{i-1}(X_n \neq 0)\Big) \cap (X_i = 0)\Big)\left(\sum_{j=i+1}^{+\infty} \mathbb{P}_{(X_i=0)}\Big(\Big(\bigcap_{m=i+1}^{j-1}(X_m \neq 0)\Big) \cap (X_j = 0)\Big)\right)$.

Or $(X_i = 0)\cap\Big(\bigcap_{m=i+1}^{j-1}(X_m \neq 0)\Big)\cap(X_j = 0)\Big) = (X_i = 0)\cap\Big(\bigcap_{m=i+1}^{j-1}\big(\sum_{k=i+1}^{j-1} p_k \neq 0\big)\Big)\cap\big(\sum_{k=i+1}^{j} p_k = 0\big)\Big)$ en notant $p_k = \pm 1$ le k-ième pas de sorte que $X_i = \sum_{k=1}^{i} p_k$. Par le lemme des coalitions, $(X_i = 0) = \Big(\sum_{k=1}^{i} p_k = 0\Big)$ est indépendant de $\Big(\bigcap_{m=i+1}^{j-1}\big(\sum_{k=i+1}^{j-1} p_k \neq 0\big)\Big) \cap \big(\sum_{k=i+1}^{j} p_k = 0\big)\Big)$ car $p_1, \cdots, p_j$ indépendants. Et en on a donc $\mathbb{P}_{(X_i=0)}\left(\Big(\bigcap_{m=i+1}^{j-1}(X_m \neq 0)\Big) \cap (X_j = 0)\Big)\right) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{m=i+1}^{j-1}\big(\sum_{k=i+1}^{m} p_k \neq 0\big)\Big) \cap \big(\sum_{k=i+1}^{j} p_k = 0\big)\Big)$. Or on a $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{m=i+1}^{j-1}(\sum_{k=i+1}^{m} p_k \neq 0)\Big) \cap (\sum_{k=i+1}^{j} p_k = 0)\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{m=i+1}^{j-1}(\sum_{k=i+1}^{m} p_{k-i} \neq 0)\Big) \cap (\sum_{k=i+1}^{j} p_{k-i} = 0)\Big)$ car $(p_1, \cdots, p_{j-i})$ suit la même loi que $(p_{i+1}, \cdots, p_j)$. Tout ceci prouve, en posant $p = m - i$ et $\ell = k - i$, la relation $\mathbb{P}_{(X_i=0)}\Big(\Big(\bigcap_{m=i+1}^{j-1}(X_m \neq 0)\Big) \cap (X_j = 0)\Big)\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{p=1}^{j-i-1}(\sum_{\ell=1}^{p} p_\ell \neq 0)\Big) \cap (\sum_{\ell=1}^{j-i} p_\ell = 0)\Big)$. Ainsi, on arrive à $\mathbb{P}(E_2) = \Bigg(\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\Big(\bigcap_{n=1}^{i-1}(X_n \neq 0)\Big) \cap (X_i = 0)\Big)\Bigg)\Bigg(\sum_{j=i+1}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{p=1}^{j-i-1}(\sum_{\ell=1}^{p} p_\ell \neq 0)\Big) \cap (\sum_{\ell=1}^{j-i} p_\ell = 0)\Big)\Bigg)$.

Comme $\sum_{\ell=1}^{p} p_\ell = X_p$, qu'on a aussi $\sum_{\ell=1}^{j-i} p_\ell = X_{j-i}$, et avec le changement d'indices $k = j - i$, on arrive enfin à $\mathbb{P}(E_2) = \Bigg(\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\Big(\bigcap_{n=1}^{i-1}(X_n \neq 0)\Big) \cap (X_i = 0)\Big)\Bigg)\Bigg(\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{p=1}^{k-1}(X_p \neq 0)\Big) \cap (X_k = 0)\Big)\Bigg) = \mathbb{P}(E_1)^2$.

De la même manière, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(E_{k+1}) = \mathbb{P}(E_k)\mathbb{P}(E_1)$ donc, par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(E_k) = (\mathbb{P}(E_1))^k$. Puisque la série géométrique $\sum_{k \geqslant 1} (\mathbb{P}(E_1))^k$ diverge d'après **c.**, on a forcément $\mathbb{P}(E_1) = 1$.

e. D'après **d.**, on a donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(E_k) = 1$. Notons O = “on revient une infinité de fois à l'origine”, de sorte que $O = \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k$. Comme la suite $(E_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, par théorème de continuité décroissante, on a $\mathbb{P}(O) = \lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}(E_k) = 1$. Il est donc presque sûr que le marcheur revienne une infinité de fois à l'origine.

18.9 On note qu'ici $\lambda_n \geqslant 0$ contrairement à ce qu'on a vu en cours où on a imposé que le paramètre d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson soit strictement positif. Il est donc possible, si $\lambda_n = 0$, que X_n soit presque sûrement nulle car alors on a $\mathbb{P}(X_n = 0) = \dfrac{e^{-0}0^0}{0!} = 1$ et $\forall k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{e^{-0}0^k}{k!} = 0$.

On a $(S = 0) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (X_n = 0)$ car les X_n sont à valeurs positives. Comme $(S = 0) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \Big(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 0)\Big)$ et que la suite $\Big(I_n = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 0)\Big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion, par théorème de continuité décroissante, on a $\mathbb{P}(S = 0) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(I_n)$. Par indépendance des X_k, $\mathbb{P}(I_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = 0) = \prod_{k=1}^{n} e^{-\lambda_k} = e^{-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}$.

On a donc deux cas :

- Si $\sum_{n \geqslant 1} \lambda_n$ converge, on a $\mathbb{P}(S = 0) = \exp\Big(-\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k\Big) > 0$.
- Si $\sum_{n \geqslant 1} \lambda_n$ diverge, alors $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = +\infty$ donc $\mathbb{P}(S = 0) = 0$.

Dans le cas général, pour $p \in \mathbb{N}$, en posant les sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, on constate que la suite $(S_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante pour tout $\omega \in \Omega$ et que $(S \leqslant p) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (S_n \leqslant p)$. Or $\big((S_n \leqslant p)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion donc, par le théorème de continuité décroissante, $\mathbb{P}(S \leqslant p) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(S_n \leqslant p)$.

On a vu dans le cours que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, alors $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

<u>Initialisation</u> : X_1 suit la loi de Poisson de paramètre λ_1 par hypothèse et, avec ce qui précède, $X_1 + X_2$ suit

la loi de POISSON de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$.

Hérédité : soit $n \geqslant 2$ tel que la variable aléatoire S_n suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$. Comme S_n et X_{n+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions, $S_n + X_{n+1} = S_{n+1}$ suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda + \lambda_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit la loi de POISSON de paramètre $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(S_n \leqslant p) = \bigsqcup_{i=0}^{p} (S_n = i)$ donc $\mathbb{P}(S_n \leqslant p) = \sum_{i=0}^{p} \mathbb{P}(S_n = i) = \sum_{i=0}^{p} \dfrac{\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)^i}{i!}$ (1).

Traitons deux cas :

- Si $\sum_{k\geqslant 1} \lambda_k$ converge, en notant $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \in \mathbb{R}_+$, par continuité de $t \mapsto e^t$ et de $t \mapsto t^i$ pour $i \in [\![0;p]\!]$ en S, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans (1), on obtient $\mathbb{P}(S \leqslant p) = \sum_{i=0}^{p} \dfrac{e^{-S}S^i}{i!}$.
- Si $\sum_{k\geqslant 1} \lambda_k$ diverge, comme $\lim_{t\to+\infty} e^{-t}t^i = 1$ si $i=0$ et $\lim_{t\to+\infty} e^{-t}t^i = 0$ si $i \geqslant 1$, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans (1), on obtient $\mathbb{P}(S \leqslant p) = 1$.

Pour avoir la loi de S, on écrit $(S=0) = (S \leqslant 0)$ et, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $(S \leqslant p) = (S = p) \sqcup (S \leqslant p-1)$ de sorte que, en traitant à nouveau deux cas :

- Si $\sum_{k\geqslant 1} \lambda_k$ converge, $\mathbb{P}(S=0) = e^{-S}$ et $\mathbb{P}(S=p) = \sum_{i=0}^{p} \dfrac{e^{-S}S^i}{i!} - \sum_{i=0}^{p-1} \dfrac{e^{-S}S^i}{i!} = \dfrac{e^{-S}S^p}{p!}$ si $p \in \mathbb{N}^*$.
- Si $\sum_{k\geqslant 1} \lambda_k$ diverge, $\mathbb{P}(S=0) = 1$ et $\mathbb{P}(S=p) = 1-1 = 0$ si $p \in \mathbb{N}^*$.

Dans les deux cas, S suit la loi de POISSON de paramètre $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k$.

18.10 **a.** Pour que l'on ait $S_k = 0$, il est nécessaire et suffisant qu'il y ait k indices $i \in [\![1;2k]\!]$ tels que $X_i = 1$ (considérés comme des réussites) et que les k autres indices $i \in [\![1;2k]\!]$ vérifient $X_i = -1$ (échecs). Ce schéma binomial se traduit par le fait que $p(k) = \mathbb{P}(S_k = 0) = \dbinom{2k}{k} p^k(1-p)^k$.

Avec l'équivalent de STIRLING, $p(k) = \dfrac{(2k)!}{(k!)^2} p^k(1-p)^k \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi k}(2k)^{2k}e^{2k}}{e^{2k}(2\pi k)k^{2k}} p^k(1-p)^k = \dfrac{(4p(1-p))^k}{\sqrt{\pi k}}$.

b. Notons R le nombre de retours à l'origine, c'est-à-dire $R = \mathrm{card}\left(\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid S_k = 0\right\}\right) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On revient une infinité de fois à l'origine si et seulement si, pour chaque entier $i \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $j > i$ pour lequel $S_j = 0$. Ceci se traduit par $(R = +\infty) = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{j=i+1}^{+\infty} (S_j = 0)\right)$. Comme la suite d'évènements $\left(A_i = \bigcup_{j=i+1}^{+\infty} (S_j = 0)\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion, par le théorème de continuité décroissante, on a $\mathbb{P}(R = +\infty) = \lim_{i\to+\infty} \mathbb{P}(A_i)$. Or, par sous-additivité, on a $\mathbb{P}(A_i) \leqslant \sum_{j=i+1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_j = 0)$. Comme $p \neq \frac{1}{2}$ dans cette question, $0 < 4p(1-p) < 1$ car $\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 > 0$ donc, avec la question précédente, $p(j) = \mathbb{P}(S_j = 0) \underset{+\infty}{=} o((4p(1-p))^j)$ et la série géométrique $\sum_{j\geqslant 1} (4p(1-p))^j$ converge donc, par comparaison, la série $\sum_{j\geqslant 1}\mathbb{P}(S_j=0)$ converge. En notant $R_i=\sum_{j=i+1}^{+\infty}\mathbb{P}(S_j=0)$ son reste d'ordre i, on a donc $0\leqslant\mathbb{P}(A_i)\leqslant R_i$ donc, par encadrement, $\lim_{i\to+\infty}\mathbb{P}(A_i)=0$ et $\mathbb{P}(R=+\infty)=0$. Ainsi, si la marche aléatoire n'est pas symétrique, la probabilité pour qu'on revienne une infinité de fois à l'origine est nulle.

18.11 Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on note $B_k=$ "on tire une boule blanche au tirage k". Il n'y a pas indépendance des tirages puisque si on tire une boule blanche, on arrête le jeu.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a donc $(Y=n)=\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{n-1}}\cap B_n$ et, d'après la formule des probabilités composées, on a $\mathbb{P}(Y=n)=\mathbb{P}(\overline{B_1})\times\mathbb{P}(\overline{B_2}|\overline{B_1})\times\cdots\times\mathbb{P}(B_n|\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{n-1}})$ ce qui donne, avec les règles des tirages, $\mathbb{P}(Y=n)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\cdots\times\frac{1}{n}\times\frac{n}{n+1}=\frac{n}{(n+1)!}$.

Comme $\overline{(Y=0)}=\bigsqcup_{n=1}^{+\infty}(Y=n)$ d'après l'énoncé, par σ-additivité, on a $1-\mathbb{P}(Y=0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ donc $\mathbb{P}(Y=0)=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=1-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}=1-(e-1)+(e-1-1)=0$ et l'évènement $(Y=0)=$ "jamais de boule blanche" est négligeable.

D'après le cours, Y admet une espérance finie si et seulement si la série $(n\,\mathbb{P}(Y=n))_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, ce qui revient à la convergence (tout est positif) de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2}{(n+1)!}$. Or $\frac{n^2}{(n+1)!}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{(n-1)!}$ et la série exponentielle $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n-1)!}$ converge. Ainsi, Y admet une espérance finie et $\mathbb{E}(Y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}$ donc $\mathbb{E}(Y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n+1)-(n+1)+1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}e-(e-1)+(e-1-1)=e-1\sim 1,72$.

18.12 **a.** Soit $B_k=$ "on tire une boule blanche ou tirage k", $N_k=\overline{B_k}=$ "on tire une boule blanche ou tirage k".

Cas $r=1$: il y a $N-1$ boules blanches et une seule boule noire dans l'urne. On a $X_N(\Omega)=[\![1;N]\!]$ dans ce cas et, pour $k\in[\![1;N]\!]$, on a $(X_N=k)=\Big(\bigcap_{i=1}^{k-1}B_i\Big)\cap N_k$ donc, avec la formule des probabilités composées en tenant compte de la composition de l'urne à chaque étape, $\mathbb{P}(X_N=k)=\mathbb{P}(B_1)\times\mathbb{P}(B_2|B_1)\times\cdots\times\mathbb{P}\Big(N_k\Big|\bigcap_{i=1}^{k-1}B_i\Big)$ donc $\mathbb{P}(X_N=k)=\Big(\prod_{i=1}^{k-1}\frac{N-i}{N-i+1}\Big)\times\frac{1}{N-k+1}=\frac{1}{N}$ après télescopage. Ainsi, X_N suit la loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$ et on a $\mathbb{E}(X_N)=\sum_{k=1}^{N}k\,\mathbb{P}(X_N=k)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}k=\frac{N(N+1)}{2N}=\frac{N+1}{2}$.

Cas $r=N$: il n'y a que des boules noires dans l'urne : $X_N=N$ est certain, $X_N(\Omega)=\{N\}$ et $\mathbb{E}(X_N)=N$.

b. On peut modéliser cette expérience par des N-uplets comme $BNNBBNN\cdots BN$, celui-ci signifiant que la première boule tirée est Blanche, les deux suivantes Noires, etc..... sachant qu'il doit impérativement y avoir $N-r$ fois B et r fois N dans cette suite de lettres : en d'autres termes l' "évènement" $BNNBBNN\cdots BN$ est égal à $B_1\cap N_2\cap N_3\cap B_4\cap B_5\cap N_6\cap N_7\cap\cdots\cap B_{N-1}\cap N_N$. On note Ω l'ensemble des tous ces N-uplets, il y en a $\binom{N}{r}$ car il faut choisir les r tirages qui vont donner une boule noire parmi les N tirages. On prend aussi la tribu pleine $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$ et pour $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme (par symétrie) sur Ω. On a $X_N(\Omega)=[\![r;N]\!]$ car il faut au moins r tirages pour prendre toutes les boules noires et au plus N.

Soit $k \in [\![r;N]\!]$, alors $\mathbb{P}(X_N = k) = \dfrac{\text{card}\,((X_N = k))}{\text{card}\,(\Omega)}$ (loi uniforme sur Ω, ce qui est justifié dans l'autre méthode). Or on a $\text{card}\,(\Omega) = \dbinom{N}{r}$ et $\text{card}\,((X = k)) = \dbinom{r-1}{k-1}$ car il faut forcément tirer une boule noire au tirage k, des blanches à tous les tirages suivants et il faut choisir parmi les $r-1$ premiers tirages les $k-1$ tirages qui donnent une boule noire. Ainsi $\mathbb{P}(X_N = k) = \dfrac{\dbinom{k-1}{r-1}}{\dbinom{N}{r}} = \dfrac{(k-1)!(N-r)!r!}{(r-1)!(k-r)!N!} = \dfrac{r(k-1)!(N-r)!}{(k-r)!N!}$.

<u>Autre méthode</u> : pour $k \in [\![r;N]\!] = X_N(\Omega)$, on pouvait aussi décrire, avec la définition de X_N, l'évènement $(X_N = k)$ par $(X_N = k) = \displaystyle\bigsqcup_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{r-1} \leqslant k-1} \Big(\Big(\bigcap_{j=1}^{r-1} N_{i_j}\Big) \cap \Big(\bigcap_{\substack{p \in [\![1;k-1]\!] \\ p \notin \{i_1,\cdots,i_{r-1}\}}} B_p\Big)\Big) \cap N_k \cap \Big(\bigcap_{m=k+1}^{N} B_m\Big)$, ce qui fait une réunion de $\dbinom{k-1}{r-1}$ évènements incompatibles car il faut choisir les $r-1$ entiers $i_1, \cdots, i_{r-1}$ parmi les $k-1$ entiers de $[\![1;k-1]\!]$. Le premier (dans l'ordre lexicographique par exemple) de ces évènements est $U = \Big(\displaystyle\bigcap_{j=1}^{r-1} N_j\Big) \cap \Big(\bigcap_{p=r}^{k-1} B_p\Big) \cap N_k \cap \Big(\bigcap_{m=k+1}^{N} B_m\Big)$ et le dernier $V = \Big(\Big(\displaystyle\bigcap_{p=1}^{k-r} B_p\Big) \cap \bigcap_{j=k-r+1}^{k-1} N_j\Big) \cap N_k \cap \Big(\bigcap_{m=k+1}^{N} B_m\Big)$.
Pour le premier de ces deux évènements, avec la formule des probabilités composées, on obtient la relation $\mathbb{P}(U) = \Big(\displaystyle\prod_{j=1}^{r-1} \frac{r-j+1}{N-j+1}\Big) \times \Big(\prod_{p=r}^{k-1} \frac{N-p}{N-p+1}\Big) \times \frac{1}{N-k+1} \times \Big(\prod_{m=k+1}^{N} \frac{N-m+1}{N-m+1}\Big) = \frac{r!(N-r)!}{N!}$. Pour le second, $\mathbb{P}(V) = \Big(\displaystyle\prod_{p=1}^{k-r} \frac{N-r-p+1}{N-p+1}\Big) \times \Big(\prod_{j=k-r+1}^{k-1} \frac{k-j+1}{N-j+1}\Big) \times \frac{1}{N-k+1} \times \Big(\prod_{m=k+1}^{N} \frac{N-m+1}{N-m+1}\Big) = \frac{r!(N-r)!}{N!}$. On se rend compte que pour chacun des évènements dont $(X_N = k)$ est la réunion incompatible, on va avoir les mêmes dénominateurs allant en décroissant de N à 1 et les mêmes numérateurs mais pas dans le même ordre. Comme tous ces évènements ont pour probabilité $\dfrac{r!(N-r)!}{N!}$ et qu'ils sont au nombre de $\dbinom{k-1}{r-1}$, il vient $\mathbb{P}(X_N = k) = \dbinom{k-1}{r-1} \times \dfrac{r!(N-r)!}{N!} = \dfrac{r(k-1)!(N-r)!}{(k-r)!N!}$.

c. Par définition, $\mathbb{E}(X_N) = \displaystyle\sum_{k=r}^{N} k\,\mathbb{P}(X_N = k) = \frac{1}{\dbinom{N}{r}} \sum_{k=r}^{N} k\dbinom{k-1}{r-1} = \frac{1}{\dbinom{N}{r}} \sum_{k=r}^{N} r\dbinom{k}{r}$ avec la formule du capitaine, ce qui se simplifie avec la formule des colonnes en $\mathbb{E}(X_N) = \dfrac{r\dbinom{N+1}{r+1}}{\dbinom{N}{r}} = \dfrac{r(N+1)}{r+1} < N$ comme il se doit. La formule est aussi valable pour les cas limites $r = 1$ et $r = N$ de la question **a.**.

18.13 **a.** Comme S est symétrique réelle, ses valeurs propres sont réelles par le théorème spectral. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_S(\lambda) = (\lambda - X)^2 - Y^2 = (\lambda - X + Y)(\lambda - X - Y)$ donc $\mathrm{Sp}(S) = \{X - Y, X + Y\}$ donc, puisque $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ par définition donc $Y > 0$, il vient $\lambda = X - Y$ et $\mu = X + Y$.

b. S est inversible si et seulement si $\det(S) = X^2 - Y^2 = (X - Y)(X + Y) \neq 0$ donc, puisque $X + Y > 0$, S est inversible si et seulement si $X \neq Y$. Ainsi, $(S \notin GL_2(\mathbb{N}^*)) = (X = Y) = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} (X = k, Y = k)$ et, puisque ces évènements sont incompatibles et que X et Y sont indépendants et de même loi, par σ-additivité et car $|1 - p| < 1$, on a $\mathbb{P}(S \notin GL_2(\mathbb{N}^*)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1 - p)^{2(k-1)} = p^2 \sum_{j=0}^{+\infty} ((1 - p)^2)^j = \dfrac{p^2}{1 - (1 - p)^2}$ simplifié en $\mathbb{P}(S \notin GL_2(\mathbb{N}^*)) = \dfrac{p}{2 - p}$. Ainsi, $\mathbb{P}(S \in GL_2(\mathbb{N}^*)) = 1 - \mathbb{P}(S \notin GL_2(\mathbb{N}^*)) = 1 - \dfrac{p}{2 - p} = \dfrac{2(1 - p)}{2 - p}$.

c. On sait d'après le cours que S, étant déjà symétrique réelle, est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives donc $(S \in S_2^{++}(\mathbb{R})) = (\lambda > 0) = (X > Y) = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} (X > k, Y = k)$ car on a toujours $\mu > 0$. À nouveau, par incompatibilité de ces évènements et indépendance de X et Y, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(S \in S_2^{++}(\mathbb{R})) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k)\,\mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1 - p)^{k-1}(1 - p)^k$ qui se calcule comme à la question précédente, $\mathbb{P}(S \in S_2^{++}(\mathbb{R})) = p(1 - p) \sum_{k=1}^{+\infty} \left((1 - p)^2\right)^{k-1} = \dfrac{p(1 - p)}{1 - (1 - p)^2} = \dfrac{1 - p}{2 - p}$.

Il est logique de trouver $\mathbb{P}(S \in S_2^{++}(\mathbb{R})) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(S \in GL_2(\mathbb{N}^*))$ car $(\lambda < 0)$ et $(\lambda > 0)$ sont deux évènements de même probabilité par symétrie entre X et Y.