# CHAPITRE 15 FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

⊙ Ce chapitre est consacré à l'étude des fonctions $f$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. On a parlé de leur continuité dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés et on va maintenant voir leur aspect "dérivable". Par contre, un taux d'accroissement $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ n'a pas de sens en général pour un vecteur $h \in \mathbb{R}^p$ dès que $p \geqslant 2$. On va donc considérer des dérivées partielles (en cas d'existence) qui correspondent à la dérivée d'une fonction vectorielle dans une direction donnée.

Ces notions de dérivées successives des fonctions vectorielles interviennent dans la détermination des extrema des fonctions vectorielles et dans les équations aux dérivées partielles.

Une équation aux dérivées partielles (abrégé en EDP) est une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions inconnues dépendant de plusieurs variables vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles. Elle a souvent de très nombreuses solutions, les conditions étant moins strictes que dans le cas d'une équation différentielle ordinaire à une seule variable. Les problèmes comportent souvent des conditions aux limites qui restreignent l'ensemble des solutions. Alors que les ensembles de solutions d'une équation différentielle ordinaire sont paramétrées par un ou plusieurs paramètres correspondant aux conditions supplémentaires, dans le cas des EDP, les conditions aux limites permettent de paramétrer les solutions par l'intermédiaire de fonctions ; intuitivement cela signifie que l'ensemble des solutions est beaucoup plus grand (de dimension infinie dans le cas des équations linéaires), ce qui est vrai dans beaucoup de problèmes.

Les EDP sont omniprésentes dans les sciences puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures ou en mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation, de l'électromagnétisme (équations de Maxwell), ou des mathématiques financières (équation de Black-Scholes). Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, ou la prévision météorologique. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des EDP (équation de champ d'Einstein et de Schrödinger).

L'un des sept problèmes du prix du millénaire consiste à montrer l'existence et la continuité par rapport aux données initiales d'un système d'EDP appelé équations de Navier-Stokes.

## TABLE DES MATIÈRES

# PROGRAMME

*Les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ont été introduites en première année. L'objectif de cette section est d'approfondir et de généraliser cette étude aux fonctions de* $p \geqslant 2$ *variables.*

*L'étude d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se ramenant à celle de ses coordonnées, cette section se consacre à l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Elle est axée sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie. On se limite en pratique au cas* $p = 2$ *ou* $p = 3$.

### 1 : Fonctions de classe $C^1$

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Dérivée en un point selon un vecteur. | Notation $D_v f(a)$. |
| Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. | Notation $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. On peut aussi utiliser $\partial_i f(a)$. |
| Une fonction est dite de classe $C^1$ sur $\Omega$ si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur $\Omega$. | |
| Opérations sur les fonctions de classe $C^1$. | |
| Une fonction de classe $C^1$ sur $\Omega$ admet en tout point $a$ de $\Omega$ un développement limité d'ordre 1. | La démonstration n'est pas exigible. Une fonction de classe $C^1$ sur $\Omega$ est continue sur $\Omega$. |
| Différentielle de $f$ en $a$. | Elle est définie comme la forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$ : $df(a) \ : \ (h_1, \cdots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i$. Notation $df(a) \cdot h$. |

### 2 : Règle de la chaîne

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Dérivée de $t \mapsto f\big(x_1(t), \cdots, x_p(t)\big)$. | Interprétation géométrique. |
| Application au calcul des dérivées partielles de : $(u_1, \cdots, u_n) \mapsto f\big(x_1(u_1, \cdots, u_n), \cdots, x_p(u_1, \cdots, u_n)\big)$. | En pratique, on se limite à $n \leqslant 3$ et $p \leqslant 3$. Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires. |
| Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe. | |

### 3 : Gradient

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe $C^1$. | Le gradient est défini par la relation $df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$ pour $h \in \mathbb{R}^p$. |
| Coordonnées du gradient. | Notation $\nabla f(a)$. |

**4 : Applications géométriques**

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Courbe du plan définie par une équation $f(x,y)=0$ où $f$ est de classe $C^1$. | Lignes de niveau de $f$. |
| Point régulier. Le gradient est normal à la tangente en un point régulier. | On admet que la courbe admet un paramétrage local de classe $C^1$. Détermination d'une équation de la tangente en un point régulier. Lorsqu'il est non nul, le gradient de $f$ est orthogonal aux lignes de niveau et orienté dans le sens des valeurs croissantes de $f$. |
| Surface définie par une équation $f(x,y,z)=0$ où $f$ est de classe $C^1$. | |
| Point régulier. Le plan tangent en ce point est défini comme orthogonal au gradient. | |
| Courbe tracée sur une surface. | Dans le cas d'une courbe régulière, la tangente à la courbe est incluse dans le plan tangent à la surface. |

**5 : Fonctions de classe $C^2$**

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. | Notations $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. |
| Fonction de classe $C^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$. | |
| Théorème de Schwarz. | La démonstration est hors programme. |
| Matrice hessienne en un point $a$ d'une fonction de classe $C^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. | Notation $H_f(a)$. |
| Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + (\nabla f(a))^T h + \frac{1}{2} h^T H_f(a) h + o\big(\vert\vert h\vert\vert^2\big)$. | La démonstration est hors programme. Expression en termes de produit scalaire. |

**6 : Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$**

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Extremum local, global. | |
| Point critique d'une application de classe $C^1$. | |
| Si une fonction de classe $C^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ admet un extremum local en un point $a$, alors $a$ est un point critique. | |
| Si $f$ est une fonction de classe $C^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $a$ un point critique de $f$: <br>- si $H_f(a) \in S_p^{++}(\mathbb{R})$, alors $f$ atteint un minimum local strict en $a$; <br>- si $H_f(a) \notin S_p^{+}(\mathbb{R})$, alors $f$ n'a pas de minimum en $a$. | Adaptation à l'étude d'un maximum local. Explicitation si $p=2$ (trace, déterminant). |
| | Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie de $\mathbb{R}^p$. |

# PARTIE 15.1 : FONCTIONS DE CLASSE $C^0$

*REMARQUE 15.1 : Rappels, soit $p \in \mathbb{N}^*$, un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^p$, une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$ :*

- *$f$ est continue en $a$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \Omega,\ ||x - a|| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*
- *Cette définition ne dépend pas de la norme employée dans $\mathbb{R}^p$ car elles sont toutes équivalentes.*
- *Si $f$ est lipschitzienne sur $B(a, r) \cap \Omega$, pour $r > 0$ alors $f$ est continue en $a$.*
- *Pour $h \in \mathbb{R}^p$, l'application $\varphi_h : t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + th)$ est définie sur un intervalle $]-r; r[$ et si $f$ est continue en $a$, l'application $\varphi_h$ est continue en $0$ pour tout $h \in E$ (continuité partielle selon $h$).*
- *$f$ partiellement continue (selon toute direction) en $a$ n'y est pas forcément continue.*

***EXEMPLE 15.1 :*** • $f_1(x, y) = \dfrac{x^3 + 3xy^2 - 2x^2y - y^3}{x^2 + y^2}$ est prolongeable par continuité en $(0, 0)$.

• $f_2(x, y) = \dfrac{x\sqrt{|y|}}{\mathrm{Max}(|x|, |y|)}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

• $f_3(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ n'est pas prolongeable par continuité en $(0, 0)$ bien que bornée.

• $f_4(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ non plus en $(0, 0)$ même si elle partiellement continue en $(0, 0)$ et ceci dans toutes les directions (c'est-à-dire $t \mapsto f_4(ta, tb)$ tend vers $0$ si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur non nul).

# PARTIE 15.2 : FONCTIONS DE CLASSE $C^1$

*REMARQUE 15.2 : On se donne un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^p$ (muni de n'importe quelle norme) et $a \in \mathbb{R}^p$ :*

- *Comme $\Omega$ est un ouvert, il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$.*
- *Pour un vecteur non nul $v$ de $\mathbb{R}^p$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in ]-\alpha; \alpha[,\ a + tv \in \Omega$.*

## 15.2.1 : Dérivées partielles et selon un vecteur non nul

**DÉFINITION 15.1 :**
*Avec ces notations, si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et si $v \neq 0 \in \mathbb{R}^p$, on dit que $f$* **admet en $a$ une dérivée selon le vecteur** *$v$ si la fonction $\varphi_{a,v} : ]-\alpha; \alpha[ \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_{a,v}(t) = f(a + tv)$ admet une dérivée en $0$. Dans ce cas, on note $D_v f(a)$ cette dérivée, qui vaut donc $D_v f(a) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + tv) - f(a)}{t}$.*

***EXEMPLE 15.2 :*** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2 + x^3 + y^4$, calculer la dérivée de $f$ en $(0, 0)$ selon les vecteurs $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$.

*REMARQUE 15.3 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$ avec $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$, pour $k \in [\![1; p]\!]$, soit $\varphi_{a,k} : ]-r; r[ \to \mathbb{R}$ telle que $\forall t \in ]-r; r[,\ \varphi_{a,k}(t) = f(a + te_k)$.*

**DÉFINITION 15.2 :**
*Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$, avec les notations précédentes, on dit que $f$* **admet en $a$ une dérivée partielle d'ordre $1$ par rapport à la $k$-ième variable** *si $\varphi_{a,k}$ est dérivable en $0$ et on définit alors cette dérivée partielle par, notée $\partial_k f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ par $\partial_k f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \varphi'_{a,k}(0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + te_k) - f(a)}{t} = D_{e_k} f(a)$.*

<u>*REMARQUE 15.4*</u> *: Dans le cas d'une fonction de deux variables* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *souvent introduite dans les exercices par* $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$, *si* $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ *:*

$$\Big(\partial_1 f(a) = \partial_1 f(a_1,a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \Big)\ \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1+t,a_2)-f(a_1,a_2)}{t}.$$

$$\Big(\partial_2 f(a) = \partial_2 f(a_1,a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \Big)\ \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,a_2+t)-f(a_1,a_2)}{t}.$$

⊙ Par exemple, en dehors de tout point singulier (ou la fonction est prolongée par continuité par exemple), les dérivées partielles se calculent naturellement en "fixant" une des variables et en dérivant par rapport à l'autre : pour calculer $\delta_1 f(a)$, on fixe $a_2$ et on dérive par rapport à $x$ (en prenant la valeur finale en $(a_1,a_2)$).

**PROPOSITION OPÉRATOIRE SUR LES DÉRIVÉES PARTIELLES 15.1 :**
**Soit $a \in \Omega$ et $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ des fonctions qui admettent des dérivées partielles d'ordre 1 en $a$ telles que $g(a) \neq 0$. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $f(a)$ avec $I$ intervalle ouvert :**

- $f+g$ **en admet aussi et** $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_k}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) + \dfrac{\partial g}{\partial x_k}(a)$.
- $\lambda f$ **en admet aussi et** $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $\dfrac{\partial(\lambda f)}{\partial x_k}(a) = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$.
- $fg$ **en admet aussi et** $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_k}(a) = g(a)\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) + f(a)\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(a)$.
- $\dfrac{f}{g}$ **en admet aussi et** $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $\dfrac{\partial(f/g)}{\partial x_k}(a) = \dfrac{1}{g(a)^2}\Big(g(a)\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) - f(a)\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(a)\Big)$.
- $\varphi \circ f$ **en admet aussi et** $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $\dfrac{\partial(\varphi\circ f)}{\partial x_k}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) \times \varphi'\big(f(a)\big)$.

<u>DÉMONSTRATION</u> : Pour $a \in \Omega$, $k \in [\![1;p]\!]$, notons comme dans la définition ci-dessus les deux fonctions $\varphi_{a,k} : ]-r;r[ \to \mathbb{R}$ et $\psi_{a,k} : ]-r;r[ \to \mathbb{R}$ définies par $\varphi_{a,k}(t) = f(a+te_k)$ et $\psi_{a,k}(t) = g(a+te_k)$, elles sont, par hypothèse, dérivables en 0 avec $\varphi'_{a,k}(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ et $\psi'_{a,k}(0) = \dfrac{\partial g}{\partial x_k}(a)$.
Pour les cinq points de la proposition, par opérations sur les fonctions dérivables, les fonctions $t \mapsto (f+g)(a+te_k)$, $t \mapsto (\lambda f)(a+te_k)$, $t \mapsto (fg)(a+te_k)$, $t \mapsto (f/g)(a+te_k)$ et $t \mapsto (\varphi\circ f)(a+te_k)$ sont dérivables en 0 car elles sont définies au moins sur $]-r;r[$ et qu'elles valent respectivement $\varphi_{a,k}+\psi_{a,k}$, $\lambda\varphi_{a,k}$, $\varphi_{a,k}\times\psi_{a,k}$, $\dfrac{\varphi_{a,k}}{\psi_{a,k}}$ et $\varphi\circ\varphi_{a,k}$. De plus, leurs dérivées en 0 valent bien, respectivement, $\varphi'_{a,k}(0)+\psi'_{a,k}(0)$, $\lambda\varphi'_{a,k}(0)$, $\varphi'_{a,k}(0)\times\psi_{a,k}(0)+\varphi_{a,k}(0)\times\psi'_{a,k}(0)$, $\dfrac{\varphi'_{a,k}(0)\psi_{a,k}(0)-\varphi_{a,k}(0)\psi'_{a,k}(0)}{(\psi_{a,k}(0))^2}$ et $\varphi'_{a,k}(0)\times\varphi'(\varphi_{a,k}(0))$, c'est-à-dire, puisque $\varphi_{a,k}(0) = f(a)$ et $\psi_{a,k}(0) = g(a) \neq 0$, les valeurs attendues, à savoir $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)+\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(a)$, $\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, $g(a)\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)+f(a)\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(a)$, $\dfrac{1}{g(a)^2}\Big(g(a)\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)-f(a)\dfrac{\partial g}{\partial x_k}(a)\Big)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)\times\varphi'\big(f(a)\big)$.

<u>***EXERCICE CLASSIQUE 15.3***</u> ***:*** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Calculer en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ les dérivées partielles d'ordre 1 de $f$.

<u>DÉMONSTRATION</u> : Sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, l'expression de $f$ montre qu'on peut dériver en fixant l'une des deux variables. Ainsi, pour $(x,y) \in U$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^3(x^2+y^2)-2x(xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ par les formules classiques de dérivation, et aussi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{3xy^2(x^2+y^2)-2y(xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{xy^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.
En $(0,0)$, par définition : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$.

*REMARQUE 15.5 : Si* $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ *est présentée par* $f:(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)$, *si* $a=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ :

$$\Big(\partial_1 f(a)=\partial_1 f(a_1,a_2,a_3)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)=\Big)\ \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2,a_3)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a_1+t,a_2,a_3)-f(a_1,a_2,a_3)}{t}.$$

$$\Big(\partial_2 f(a)=\partial_2 f(a_1,a_2,a_3)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)=\Big)\ \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2,a_3)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,a_2+t,a_3)-f(a_1,a_2,a_3)}{t}.$$

$$\Big(\partial_3 f(a)=\partial_3 f(a_1,a_2,a_3)=\frac{\partial f}{\partial x_3}(a)=\Big)\ \frac{\partial f}{\partial z}(a_1,a_2,a_3)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a_1,a_2,a_3+t)-f(a_1,a_2,a_3)}{t}.$$

### 15.2.2 : Classe $C^1$, développement limité et différentielle

**DÉFINITION 15.3 :**

*Soit* $f:\Omega\to\mathbb{R}$, *on dit que* $f$ **est de classe** $C^1$ **sur** $\Omega$ **si ses dérivées partielles d'ordre** $1$ **existent et sont continues sur** $\Omega$. *On note* $C^1(\Omega,\mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions de classe* $C^1$ *sur* $\Omega$.

***EXERCICE CLASSIQUE 15.4*** **:** Montrer que $f$ de l'exercice 15.3 est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

DÉMONSTRATION : Par opérations, les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur l'ouvert $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ car ce sont des fractions rationnelles. Reste à voir ce qui se passe au voisinage de $(0,0)$. Pour $(x,y)\in U$, comme $|x|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}=||(x,y)||_2$ et $|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}=||(x,y)||_2$, on majore les dérivées partielles : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\leqslant\dfrac{|y|^5+|x|^2|y|^3}{(x^2+y^2)^2}\leqslant\dfrac{2||(x,y)||_2^5}{||(x,y)||_2^4}=2||(x,y)||_2$ et $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leqslant\dfrac{4||(x,y)||_2^5}{||(x,y)||_2^4}=4||(x,y)||_2$ qui montrent les continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$. Prendre $\alpha=\dfrac{\varepsilon}{2}$ pour $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ou $\alpha=\dfrac{\varepsilon}{4}$ pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

**DÉFINITION 15.4 :**

$f:\Omega\to\mathbb{R}$ *admet en* $a\in\Omega$ *un* **développement limité d'ordre** $1$ *s'il existe* $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ *réels tels que :*

$$f(a+h)\underset{0}{=}f(a)+\alpha_1h_1+\cdots+\alpha_ph_p+o\big(||h||\big)\ \textit{si}\ h=(h_1,\cdots,h_p),$$

*c'est-à-dire* $\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ \forall h\in\mathbb{R}^p,\ (||h||\leqslant\alpha$ *et* $a+h\in\Omega)\Longrightarrow\big|f(a+h)-f(a)-\alpha_1h_1-\cdots-\alpha_ph_p\big|\leqslant\varepsilon||h||$.

**THÉORÈME SUR L'EXISTENCE D'UN DÉVELOPPEMENT LIMITÉ D'ORDRE** $1$ **POUR UNE FONCTION DE CLASSE** $C^1$ **SUR UN OUVERT (ÉNORME) 15.2 :**

**Soit** $f:\Omega\to\mathbb{R}$ **de classe** $C^1$, **alors** $f$ **admet en tout point** $a\in\Omega$ **un développement limité :**

$$f(a+h)\underset{0}{=}f(a)+h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)+\cdots+h_p\frac{\partial f}{\partial x_p}(a)+o\big(||h||\big)\ \text{ si }\ h=(h_1,\cdots,h_p).$$

DÉMONSTRATION : Elle est non exigible. On va faire la preuve avec $p=2$, le cas général se fait de même. Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $a=a_1e_1+a_2e_2$. On choisit la norme 1 dans $\mathbb{R}^2$. Soit $r>0$ tel que $B_1(a,r)\subset\Omega$, pour $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$, si $||h||_1<r$ et $\Delta=|f(a+h)-f(a)-h_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)-h_2\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)|$ :
$\Delta\leqslant\left|f(a+h)-f(a_1+h_1,a_2)-h_2\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right|+\left|f(a_1+h_1,a_2)-f(a)-h_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right|$ par inégalité triangulaire.
Par le théorème des accroissements finis, $\exists c_1\in\,]a_1;a_1+h_1[$, $f(a_1+h_1,a_2)-f(a_1,a_2)=h_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(c_1,a_2)$ et $\exists c_2\in\,]a_2;a_2+h_2[$, $f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1+h_1,a_2)=h_2\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,c_2)$. Par continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ en $a$ ($j=1$ ou $2$) : $\forall\varepsilon>0,\ \exists\alpha_j>0,\ \forall k\in\mathbb{R}^2,\ ||k||_1\leqslant\alpha_j\Longrightarrow\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a+k)-\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right|\leqslant\varepsilon$.
Pour $\varepsilon>0$ et $\alpha_1$ et $\alpha_2$ associés dans l'implication ci-dessus, si $h\in\mathbb{R}^2$ et $||h||_1\leqslant\beta=\mathrm{Min}(r,\alpha_1,\alpha_2)$, alors $\Delta_2=\left|f(a+h)-f(a_1+h_1,a_2)-h_2\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right|=\left|h_2\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,c_2)-h_2\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right|\leqslant\varepsilon|h_2|$. On majore aussi $\Delta_1=\left|f(a_1+h_1,a_2)-f(a)-h_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right|=\left|h_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(c_1,a_2)-h_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right|\leqslant\varepsilon|h_1|$ donc $|f(a+h)-f(a)-h_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)-h_2\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)|\leqslant\varepsilon||h||_1$ ce qui est la définition du développement limité attendu.

**PROPOSITION SUR UNE CONDITION SUFFISANTE DE CONTINUITÉ 15.3 :**
**Une fonction de classe $C^1$ sur $\Omega$ est continue sur $\Omega$.**

DÉMONSTRATION : Revenons en dimension $p$ quelconque. Soit $a \in \Omega$. L'application $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(h) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + h_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)$ est linéaire donc continue (dimension finie) : $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = \varphi(0) = 0$. D'après le développement limité du théorème précédent, $\lim\limits_{h \to 0} \big(f(a+h) - f(a) - \varphi(h)\big) = 0$ car, par exemple pour $\varepsilon = 1$, on a $\big|f(a+h) - f(a) - \varphi(h)\big| \leqslant ||h||$ dès que $||h||$ est assez petit. Ainsi, par somme, comme $f(a+h) - f(a) = \big(f(a+h) - f(a) - \varphi(h)\big) + \varphi(h)$, $\lim\limits_{h \to 0} \big(f(a+h) - f(a)\big) = 0$ : $f$ est continue en $a$.

*REMARQUE 15.6 : Attention : si $f$ admet en tout point de $\Omega$ des dérivées partielles sans qu'elles soient continues, cela n'implique même pas la continuité de $f$ sur $\Omega$.*

**THÉORÈME OPÉRATOIRE SUR LES FONCTIONS DE CLASSE $C^1$ 15.4 :**
**Soit $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $C^1$ sur $\Omega$ telles que $g$ ne s'annule pas sur $\Omega$. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $I$ intervalle ouvert avec $f(\Omega) \subset I$ :**

- **$f + g$ est de classe $C^1$ sur $\Omega$ et $\forall k \in [\![1; p]\!]$, $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f}{\partial x_k} + \dfrac{\partial g}{\partial x_k}$.**
- **$\lambda f$ est de classe $C^1$ sur $\Omega$ et $\forall k \in [\![1; p]\!]$, $\dfrac{\partial(\lambda f)}{\partial x_k} = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_k}$.**
- **$fg$ est de classe $C^1$ sur $\Omega$ et $\forall k \in [\![1; p]\!]$, $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_k} = g \times \dfrac{\partial f}{\partial x_k} + f \times \dfrac{\partial g}{\partial x_k}$.**
- **$\dfrac{f}{g}$ est de classe $C^1$ sur $\Omega$ et $\forall k \in [\![1; p]\!]$, $\dfrac{\partial(f/g)}{\partial x_k} = \dfrac{1}{g^2}\Big(g \times \dfrac{\partial f}{\partial x_k} - f \times \dfrac{\partial g}{\partial x_k}\Big)$.**
- **$\varphi \circ f$ est de classe $C^1$ sur $\Omega$ et $\forall k \in [\![1; p]\!]$, $\dfrac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \times (\varphi' \circ f)$.**

DÉMONSTRATION : D'après la proposition 15.1, avec ces hypothèses, les dérivées partielles de ces fonctions $f+g$, $\lambda f$, $f \times g$, $f/g$, $\varphi \circ f$ existent et leurs expressions ponctuelles se traduisent globalement sur $\Omega$ par les relations ci-dessus. D'après ces relations, les $p$ dérivées partielles sont continues sur $\Omega$ par opérations (somme, multiplication par une constante, produit, rapport, composée). Ainsi, par définition, ces cinq fonctions sont de classe $C^1$ sur $\Omega$.

*REMARQUE 15.7 : • $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ est donc une algèbre.*

*• Les fonctions polynomiales, les fonctions rationnelles (là où le dénominateur ne s'annule pas) et les composées par des fonctions usuelles sont de classe $C^1$ par ces opérations car les applications coordonnées $c_k : (x_1, \cdots, x_p) \mapsto x_k$ sont clairement de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^p$.*

***EXEMPLE 15.5 :*** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = \dfrac{xyz + \mathrm{Arctan}(x^3 z + y^2 x)}{2e^{x^2+y^4} + \sin(z^2)}$ est de classe $C^1$.

DÉMONSTRATION : Les fonctions $(x,y,z) \mapsto x$, $(x,y,z) \mapsto y$ et $(x,y,z) \mapsto z$ sont continues sur $\mathbb{R}^3$ car linéaires (en dimension finie) et $\mathrm{Arctan}$, $\exp$, $\sin$ sont continues sur $\mathbb{R}$. $f$ est donc continue sur $\mathbb{R}^3$ par composée, somme, produit, rapport de fonctions continues car si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $2e^{x^2+y^4} + \sin(z^2) \geqslant 2e^0 - 1 = 1 > 0$.

**DÉFINITION 15.5 :**
*Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe $C^1$ et $a \in \Omega$, on définit la* **différentielle de $f$ en $a$**, *notée $df(a)$, c'est l'application $df(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall h = (h_1, \cdots, h_p) \in \mathbb{R}^p$, $df(a)(h) = \sum\limits_{k=1}^{p} h_k \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$.*

*REMARQUE 15.8 : • On note aussi $df(a).h$ à la place de $df(a)(h)$.*

*• La différentielle de $f$ en $a$ est donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$.*

## 15.2.3 : Règle de la chaîne et gradient

**THÉORÈME DIT RÈGLE DE LA CHAÎNE (ÉNORME) 15.5 :**
**Soit** $f : \Omega \to \mathbb{R}$ **de classe** $C^1$**,** $I$ **un intervalle de** $\mathbb{R}$**, des fonctions** $x_1, \cdots, x_p$ **de** $I$ **dans** $\mathbb{R}$ **de classe** $C^1$ **telles que** $\forall t \in I,\ x(t) = \big(x_1(t), \cdots, x_p(t)\big) \in \Omega$**. Alors la fonction** $g : I \to \mathbb{R}$ **définie par** $g(t) = f\big(x_1(t), \cdots, x_p(t)\big)$ **est de classe** $C^1$ **sur** $I$ **et on a :**

$$\forall t \in I,\ g'(t) = x_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(x(t)\big) + \cdots + x_p'(t)\frac{\partial f}{\partial x_p}\big(x(t)\big).$$

DÉMONSTRATION : À nouveau, on ne le montre que pour $p = 2$, on adapte si $p > 2$. Pour $t_0 \in I$ et $t \in I \setminus \{t_0\}$, on a $g(t) - g(t_0) = f\big(x_1(t), x_2(t)\big) - f\big(x_1(t), x_2(t_0)\big) + f\big(x_1(t), x_2(t_0)\big) - f\big(x_1(t_0), x_2(t_0)\big)$. À nouveau, on utilise le théorème des accroissements finis qui nous donne l'existence de $c_2 \in [x_2(t_0); x_2(t)]$ tel que $f\big(x_1(t), x_2(t)\big) - f\big(x_1(t), x_2(t_0)\big) = \big(x_2(t) - x_2(t_0)\big)\frac{\partial f}{\partial x_2}\big(x_1(t), c_2\big)$ et de $c_1 \in [x_1(t_0); x_1(t)]$ tel que $f\big(x_1(t), x_2(t_0)\big) - f\big(x_1(t_0), x_2(t_0)\big) = \big(x_1(t) - x_1(t_0)\big)\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(c_1, x_2(t_0)\big)$ (ceci fonctionne même si $x_1(t_0) = x_1(t)$ ou si $x_2(t_0) = x_2(t)$ grâce aux segments qui ont remplacé les intervalles ouverts).
Ainsi, $g(t) - g(t_0) = \big(x_2(t) - x_2(t_0)\big)\frac{\partial f}{\partial x_2}\big(x_1(t), c_2\big) + \big(x_1(t) - x_1(t_0)\big)\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(c_1, x_2(t_0)\big)$. Par le théorème des accroissements finis $g(t) - g(t_0) = (t - t_0)x_2'(t_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}\big(x_1(t), c_2\big) + (t - t_0)x_1'(t_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(c_1, x_2(t_0)\big)$ avec $t_1$ et $t_2$ dans $]t_0; t[$, qu'on a intérêt à écrire $\dfrac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = x_2'(t_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}\big(x_1(t), c_2\big) + x_1'(t_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(c_1, x_2(t_0)\big)$.
Par continuité des fonctions $x_1$, $x_1'$ et $x_2'$ sur $I$ et de $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ sur $U$, comme $\lim\limits_{t \to t_0} t_1 = t_0$, $\lim\limits_{t \to t_0} t_2 = t_0$, $\lim\limits_{t \to t_0} x_1(t) = x_1(t_0)$, $\lim\limits_{t \to t_0} c_1 = x_1(t_0)$, $\lim\limits_{t \to t_0} c_2 = x_2(t_0)$, ce qui implique (par les coordonnées en dimension finie) $\lim\limits_{t \to t_0} (c_1, x_2(t_0)) = (x_1(t_0), x_2(t_0)) = x(t_0)$, $\lim\limits_{t \to t_0} (x_1(t), c_2) = (x_1(t_0), x_2(t_0)) = x(t_0)$, on a aussi les limites $\lim\limits_{a \to x(t_0)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x(t_0))$ et $\lim\limits_{a \to x(t_0)} \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x(t_0))$, on obtient finalement la dérivée souhaitée $g'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = x_1'(t_0)\frac{\partial f}{\partial x_1}(x(t_0)) + x_2'(t_0)\frac{\partial f}{\partial x_2}(x(t_0))$.

***EXEMPLE 15.6 :*** Soit $x(t) = 1 + \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$, $z(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Calculer $g'(t)$ si $g(t) = f\big(x(t), y(t), z(t)\big)$. Quelle interprétation donner à ce résultat ?

DÉMONSTRATION : $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^3$ car polynomiale. De plus, $x$, $y$ et $z$ étant de classe $C^1$ et $4\pi$-périodique sur $\mathbb{R}^2$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ étant de classe $C^1$ et $4\pi$-périodique sur $\mathbb{R}$. On peut donc utiliser la règle de la chaîne pour affirmer que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et obtenir la relation, pour $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)) + z'(t)\frac{\partial f}{\partial z}(\varphi(t)$ ce qui donne facilement l'expression $g'(t) = (-\sin(t))(2(1 + \cos(t))) + \cos(t)(2\sin(t)) + \cos(t/2)(4\sin(t/2))$ donc, avec des formules de trigonométrie, $g'(t) = -2\sin(t) - 2\sin(t)\cos(t) + 2\sin(t)\cos(t) + 2\sin(t) = 0$. Ainsi, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, $g$ est constante et vaut $g(0) = 4$. Cette courbe est donc tracée sur la sphère $S$ de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon 2. C'est l'intersection de $S$ et d'un cylindre à base circulaire $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ qui est tangent en $(2, 0, 0)$ à la sphère $S$. C'est la courbe de VIVIANI qui est un cas particulier d'hippopède d'EUDOXE.

*<u>REMARQUE 15.9</u> : La règle de la chaîne permet la dérivée d'une quantité physique (température, altitude, pression, ...) le long d'une courbe paramétrée de classe* $C^1$ *donnée par* $t \mapsto \big(x_1(t), \cdots, x_p(t)\big)$ *qui représente un point en fonction du temps donc une "trajectoire" ponctuelle.*

**THÉORÈME DE CHANGEMENT DE COORDONNÉES (ÉNORME) 15.6 :**
**Soit $\Omega$ et $\Gamma$ des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $x, y : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, le tout vérifiant $\forall (u,v) \in \Omega,\ \big(x(u,v), y(u,v)\big) \in \Gamma$. Alors $g : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $g(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ est de classe $C^1$ sur $\Omega$ avec les relations :**

$$\forall (u,v) \in \Omega,\ \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) & = & \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big) + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v),y(u,v)\big) \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) & = & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big) + \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v),y(u,v)\big) \end{cases}$$

<u>DÉMONSTRATION</u> : D'abord, $g$ est bien définie avec les conditions imposées ci-dessus.

Par définition, $g$ est de classe $C^1$ si et seulement si $g$ admet des dérivées partielles par rapport à $u$ et à $v$ et si celles-ci sont continues sur $\Omega$. $g$ admet une dérivée partielle d'ordre $1$ par rapport à $u$ en $(u,v)$ si et seulement si $\varphi_1 : t \mapsto g(u+t,v) = f\big(x(u+t,v), y(u+t,v)\big)$ est dérivable en $0$ et on aura alors $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \varphi_1'(0)$. Posons donc $p : t \mapsto \big(x(u+t,v), y(u+t,v)\big) = (p_1(t), p_2(t))$ de sorte que $\varphi_1 = f \circ p$. D'après la règle de la chaîne, comme $f$, $p_1$ et $p_2$ donc $p$ sont de classe $C^1$ par hypothèse, la fonction $\varphi_1$ est elle-même de classe $C^1$ et on a $\varphi_1'(t) = p_1'(t)\dfrac{\partial f}{\partial x}(p(t)) + p_2'(t)\dfrac{\partial f}{\partial y}(p(t)) = \dfrac{\partial x}{\partial u}(u+t,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(p(t)) + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u+t,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(p(t))$. On prend maintenant $t = 0$ dans cette formule et $\varphi'(0) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(p(0)) + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(p(0))$ ce qui est la relation attendue sachant que $p(0) = (x(u,v), y(u,v))$.

On fait de même pour la seconde dérivée partielle qui vaut, si elle existe, $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \varphi_2'(0)$ avec la fonction $\varphi_2 : t \mapsto g(u, v+t) = f\big(x(u,v+t), y(u,v+t)\big) = f \circ q(t)$ avec $q : t \mapsto \big(x(u,v+t), y(u,v+t)\big)$.

*<u>REMARQUE 15.10</u> :*

- *Comme on écrit (même en mathématique) rarement les points en lesquels on calcule les dérivées partielles, ces deux formules s'abrègent en :* $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u} & = & \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial v} & = & \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$.
- *En trois variables, si $g : (u,v,w) \mapsto f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)$ (toutes les fonctions étant $C^1$ sur des ouverts idoines), cela se transforme sans peine en* $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u} & = & \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial v} & = & \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial w} & = & \dfrac{\partial x}{\partial w}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial w}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial w}\dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$.

*<u>REMARQUE FONDAMENTALE 15.11</u> : Coordonnées polaires :*

- *Le passage en polaires correspond à la fonction $\varphi : (r,\theta) \mapsto \big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)$ définie sur $\mathbb{R}^2$.*
- *Ainsi $\varphi(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta))$ avec $x(r,\theta) = r\cos\theta$ et $y(r,\theta) = r\sin\theta$. $\varphi$ n'est pas du tout injective.*
- *Si on se donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on pose $g = f \circ \varphi$ ce qui revient à : $g(r,\theta) = f\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)$.*
- *Les fonctions $f$ et $g$ représentent la même quantité physique (température, enthalpie, pression,...) mais pas avec les mêmes coordonnées : $f(1,1) = g\Big(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\Big)$.*
- *Si $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$, alors $g$ est aussi de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par le théorème précédent, on obtient* $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r} & = & \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta} & = & -r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$. *Si $r \neq 0$, on peut inverser en* $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \cos\theta\dfrac{\partial g}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \sin\theta\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta} \end{cases}$.

DÉMONSTRATION : • On constate qu'en maths, a priori, on peut tolérer des rayons négatifs pour les coordonnées polaires. On dit juste qu'un point $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ admet des coordonnées polaires $(r, \theta)$ si $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, ce qui équivaut géométriquement au fait que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$ en posant $\overrightarrow{e_r} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$.
• $\varphi$ n'est pas injective car $\varphi(0, \theta) = (0, 0)$ quel que soit l'angle $\theta$ choisi dans $\mathbb{R}$. De plus, pour un point $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, en notant $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} > 0$ et $\theta_0$ l'argument de $z_0 = x_0 + iy_0$ dans $]-\pi; \pi]$ (par exemple), on a $\forall k \in \mathbb{Z},\ \varphi(r_0, \theta_0 + 2k\pi) = \varphi(-r_0, \theta_0 + 2k\pi + \pi) = (x_0, y_0)$.
• Puisque toutes les fonctions sont de classe $C^1$, on utilise la formule du changement de coordonnées du théorème 15.6 : $\dfrac{\partial g}{\partial r} = \dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial r}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta} = \dfrac{\partial x}{\partial \theta}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\dfrac{\partial f}{\partial y} = -r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
• Si $r \neq 0$, on remplace $\cos\theta\dfrac{\partial g}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta} = \cos\theta\Big(\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big) - \dfrac{\sin\theta}{r}\Big(-r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big)$ qui se simplifie, étant donné que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, en $\cos\theta\dfrac{\partial g}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$. On fait de même avec l'autre formule et $\sin\theta\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta} = \sin\theta\Big(\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big) + \dfrac{\cos\theta}{r}\Big(-r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

***EXERCICE 15.7 :*** En passant en polaires, déterminer les $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles $(E)\ :\ x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

DÉMONSTRATION : Si $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ est solution de $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Définissons alors $g\ :\ \mathbb{R}_+^* \times \Big]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\Big[ \to \mathbb{R}$ par $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \Big]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\Big[,\ g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. On le peut car $\varphi\ :\ \mathbb{R}_+^* \times \Big]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\Big[ \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est bien définie, c'est même une fonction bijective avec la réciproque $\varphi^{-1}(r, \theta) = \Big(\sqrt{x^2 + y^2}, \mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{y}{x}\Big)\Big)$. D'après la remarque précédente, on a la relation $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ donc $r\dfrac{\partial g}{\partial r} = r \iff \dfrac{\partial g}{\partial r} = 1$ d'après $(E)$. On résout, à $\theta \in \Big]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\Big[$ fixé, cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ : $\exists \lambda(\theta) \in \mathbb{R},\ \forall r > 0,\ g(r, \theta) = r + \lambda(\theta)$. Mais, comme $f$ est de classe $C^1$, $g$ est elle aussi de classe $C^1$ donc $\lambda$ doit être de classe $C^1$ sur l'intervalle $\Big]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\Big[$ puisque $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ doit exister et être continue. Revenons à $f$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a donc la relation $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}) = \sqrt{x^2 + y^2} + \lambda(\mathrm{Arctan}(y/x)) = \sqrt{x^2 + y^2} + h(y/x)$ en ayant posé $h = \lambda \circ \mathrm{Arctan}$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. Fin de la partie analyse.
Réciproquement, s'il existe une fonction $h\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ telle que l'on ait, pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + h(y/x)$, alors $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par composée et on a les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \dfrac{y}{x^2}h'(y/x)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{x}h'(y/x)$ donc $f$ vérifie $(E)$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ car $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \dfrac{y}{x}h'\Big(\dfrac{y}{x}\Big) + \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{y}{x}h'\Big(\dfrac{y}{x}\Big) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ en simplifiant.

**PROPOSITION SUR UNE CONDITION SUFFISANTE DE CONSTANCE 15.7 :**
**Soit $f : C \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ où $C$ est un ouvert convexe.**
**Alors : $f$ est constante sur $C \iff \Big(\forall k \in [\![1; p]\!],\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ sur $C\Big)$.**

DÉMONSTRATION : $(\Longrightarrow)$ si $f$ est nulle, ses dérivées partielles sont clairement nulles dans toutes les directions.
$(\Longleftarrow)$ soit $(a, b) \in C^2$, on crée le chemin $\varphi\ :\ t \mapsto a + t(b - a)$ qui est de classe $C^1$ car affine, et vérifie $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$ : on se déplace sur le segment $[a; b] \subset C$ car $C$ est convexe. Alors, on a la relation $f(b) - f(a) = g(1) - g(0)$ si $g\ :\ t \mapsto f\big(\varphi(t)\big)$. Si on écrit $a = (a_1, \cdots, a_p)$ et $b = (b_1, \cdots, b_p)$, alors $g(t) = f(a_1 + t(b_1 - a_1), \cdots, a_p + t(b_p - a_p))$ donc, avec la règle de la chaîne, la fonction $g$ est dérivable sur $[0; 1]$ et $g'(t) = (b_1 - a_1)\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t)) + \cdots + (b_p - a_p)\dfrac{\partial f}{\partial x_p}(\varphi(t)) = 0$ donc $g$ est constante sur cet intervalle $[0; 1]$ et on a bien $g(0) = g(1)$ donc $f(a) = f(b)$. Ainsi, $f$ est bien constante sur $C$.

**DÉFINITION 15.6 :**
*Soit* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *de classe* $C^1$*, pour tout* $a \in \Omega$ *on définit le* **gradient de** $f$ **en** $a$*, noté* $\nabla f(a)$ *ou* $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a)$*, par la relation* $\forall h \in \mathbb{R}^p,\ \forall a \in \Omega,\ df(a).h = df(a)(h) = \big(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a)|h\big) = \big(\nabla f(a)|h\big)$.

**PROPOSITION SUR LES COORDONNÉES DU GRADIENT 15.8 :**
**Avec ces notations,** $\forall a \in \Omega,\ \nabla f(a) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) e_k$**.**

DÉMONSTRATION : Avec la définition 15.6, comme on travaille avec le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^p$, on a par pour tout vecteur $h = (h_1, \cdots, h_p) \in \mathbb{R}^p$, $df(a)(h) = \sum_{k=1}^{p} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \big(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a)|h\big)$.

*REMARQUE HP 15.12 : Avec les notations de la remarque 15.10,* $\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u} & = & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial v} & = & \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$. *Si on définit les vecteurs colonnes* $X = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix}$*, alors on a* $Y = JX$ *en posant* $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ *la* **matrice jacobienne** *du changement de variables* $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$*. Même chose en dimension* 3.

*REMARQUE FONDAMENTALE 15.13 :*
*Soit* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $C^1$*. On pose donc* $g = f \circ \varphi$ *ou* $g(r,\theta) = f\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)$ *avec* $g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *(on peut imposer le rayon* $r > 0$ *ce qui permet d'avoir au moins unicité de* $r$ *dans les coordonnées polaires). On pose* $e_r = \big(\cos\theta, \sin\theta\big)$ *et* $e_\theta = \big(-\sin\theta, \cos\theta\big)$ *et alors la base* $(e_r, e_\theta)$ *est aussi une base orthonormale directe de* $\mathbb{R}^2$*. Alors, on peut exprimer le gradient* $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x, y)$ *(pour* $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$*) en coordonnées polaires avec la relation classique :* $\nabla f = \frac{\partial g}{\partial r} e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} e_\theta$.

DÉMONSTRATION : Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, $\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)e_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)e_2$ par la proposition 15.8. Avec $g(r,\theta) = f\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) = f(x, y)$, par changement de coordonnées, $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}$. Ainsi, en remplaçant, on a $\nabla f = \Big(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\Big)e_1 + \Big(\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\Big)e_2$ ce qui devient en regroupant les termes : $\nabla f = \frac{\partial g}{\partial r}\big(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2\big) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\big(-\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2\big) = \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)e_\theta$.

**PROPOSITION OPÉRATOIRE SUR LE GRADIENT 15.9 :**
**Soit** $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ **sont de classe** $C^1$ **sur** $\Omega$**,** $g$ **ne s'annulant pas sur** $\Omega$**,** $\varphi : I \to \mathbb{R}$ **de classe** $C^1$ **sur** $I$ **intervalle ouvert avec** $f(\Omega) \subset I$**, alors :**

- **Si** $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ **alors** $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\lambda f + \mu g) = \lambda\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f + \mu\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g$**.**
- $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(fg) = f \times \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g + g \times \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$**.**
- $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}\big(g \times \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f - f \times \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g\big)$**.**
- $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\varphi \circ f) = \big(\varphi' \circ f\big)\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$**.**

DÉMONSTRATION : Passer par les coordonnées du gradient dans la base canonique, c'est-à-dire les dérivées partielles avec la proposition 15.8 dont on connaît les expressions avec le théorème 15.4.

# PARTIE 15.3 : FONCTIONS DE CLASSE $C^2$

## 15.3.1 : Définition et propriétés

**DÉFINITION 15.7 :**
*Soit* $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \Omega$ *et* $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, *on dit que* $f$ *admet en* $a$ **une dérivée partielle d'ordre** $2$ **par rapport aux variables** $x_j$ **puis** $x_i$ *si* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ *existe sur un voisinage de* $a$ *et* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ *admet une dérivée partielle d'ordre* $1$ *par rapport à* $x_i$ *en* $a$, *on note alors* $\partial^2_{i,j}f(a)$ *ou* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ *cette valeur.*

*REMARQUE 15.14 :* • *Il y a donc a priori* $p^2$ *dérivées partielles d'ordre* $2$ *différentes.*

- *Si* $i = j$, *on note* $\partial^2_i f(a)$ *ou* $\frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(a)$ *à la place de* $\partial^2_{i,i}f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a)$.
- *On se restreint en pratique à* $p = 2$ *ou* $p = 3$ *ce qui fait* $4$ *ou* $9$ *dérivées partielles à considérer.*

**DÉFINITION 15.8 :**
*On dit que* $f$ *est de classe* $C^2$ *sur* $\Omega$ *si toutes les dérivées partielles d'ordre* $2$ *existent et sont continues sur* $\Omega$. *On note* $C^2(\Omega, \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions de classe* $C^2$ *de* $\Omega$ *dans* $\mathbb{R}$.

**PROPOSITION SUR LA LUTTE DES CLASSES 15.10 :**
**Une fonction de classe $C^2$ est de classe $C^1$.**

DÉMONSTRATION : Soit $f$ de classe $C^2$ sur $\Omega$, alors par définition, toutes ses dérivées partielles d'ordre $1$ existent en tout point de $\Omega$ et admettent elles-mêmes des dérivées partielles qui sont elles aussi continues sur $\Omega$. Ainsi, pour $k \in [\![1;p]\!]$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ est de classe $C^1$ sur $\Omega$ donc, d'après la proposition 15.3, les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ sont continues sur $\Omega$. Mais cela est la définition du fait que $f$ est de classe $C^1$ sur $\Omega$

**THÉORÈME OPÉRATOIRE SUR LES DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE $2$ 15.11 :**
**Soit $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $C^2$ sur $\Omega$ telles que $g$ ne s'annule pas sur $\Omega$. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ sur $I$ intervalle ouvert avec $f(\Omega) \subset I$ :**

- $f + g$ **est** $C^2$ **sur** $\Omega$ **et** $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $\frac{\partial^2 (f+g)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$.
- $\lambda f$ **est** $C^2$ **sur** $\Omega$ **et** $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $\frac{\partial^2 (\lambda f)}{\partial x_i \partial x_j} = \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.
- $fg$ **est** $C^2$ **sur** $\Omega$ **et** $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $\frac{\partial^2 (fg)}{\partial x_i \partial x_j} = \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right) + g\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$.
- $\frac{f}{g}$ **et** $\varphi \circ f$ **sont aussi de classe** $C^2$ **sur** $\Omega$.

*REMARQUE 15.15 : L'ensemble* $C^2(\Omega, \mathbb{R})$ *est donc une sous-algèbre de* $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ *qui contient les fonctions polynomiales et les fonctions rationnelles (là où elles sont définies).*

## 15.3.2 : Schwarz et changement de coordonnées

**THÉORÈME DE SCHWARZ (ÉNORME) 15.12 :**
**Si** $f : \Omega \to F$ **de classe** $C^2$ **sur un ouvert** $\Omega$ **alors** $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$**.**

<u>DÉMONSTRATION</u> : hors programme.

***<u>EXERCICE CLASSIQUE 15.8</u> :*** $f$ de l'exemple 15.3 est-elle de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$ ?

<u>DÉMONSTRATION</u> : D'après l'exercice 15.3, pour $t \neq 0$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,t) = \dfrac{t^5}{(t^2)^2} = t$ et que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,0) = 0$. Ainsi, par définition, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = 1$.
Comme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, par contre-apposée du théorème de SCHWARZ, $f$ n'est pas de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$ même si, par opérations, $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

*<u>REMARQUE 15.16</u> : Changement linéaire de coordonnées :*

- *On considère* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* $C^2$, $\varphi : (u,v) \to (au+bv, cu+dv)$ *où* $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. *On pose alors* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par* $g(u,v) = f\big(\varphi(u,v)\big) = f(x,y)$ *si on pose* $(x,y) = \varphi(u,v)$.
- $\varphi \in GL(\mathbb{R}^2)$ *si et seulement si* $ad - bc \neq 0$ *et alors* $f = g \circ \varphi^{-1}$ *avec les mêmes propriétés.*
- *Par exemple* $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u} &= a\dfrac{\partial f}{\partial x} + c\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial v} &= b\dfrac{\partial f}{\partial x} + d\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$ *puis* $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= a^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2ac\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} &= ab\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (ad+bc)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + cd\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} &= b^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2bd\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + d^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{cases}$ *avec la règle de la chaîne en remplaçant* $f$ *par* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *ou* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

***<u>EXERCICE 15.9</u> :*** Avec le changement de coordonnées $\begin{cases} u &= x+y \\ v &= x-y \end{cases}$, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles $(E)$ : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

<u>DÉMONSTRATION</u> : Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(x,y) = (x+y, x-y)$, alors $\varphi$ est clairement linéaire et comme sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ qui est inversible car de déterminant $-2$, $\varphi$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on pose $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par $g = f \circ \varphi^{-1}$ donc $f(x,y) = g(x+y, x-y)$ ou, puisque $\varphi^{-1}(u,v) = \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right)$, $g(u,v) = f\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right)$. Comme $\varphi$ et $\varphi^{-1}$ sont clairement de classe $C^1$ car les fonctions coordonnées sont polynomiales, on a par formule de changement de coordonnées : $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en notant $x : (u,v) \mapsto \dfrac{u+v}{2}$ et $y : (u,v) \mapsto \dfrac{u-v}{2}$ les deux fonctions coordonnées de $\varphi^{-1}$. Ainsi, $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
On recommence à dériver partiellement en écrivant par exemple $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi^{-1}(u,v)) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi^{-1}(u,v))$ de manière plus développée et en utilisant à nouveau la formule de changement de coordonnées en remplaçant dans ce qui précède $f$ par $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Toujours est-il que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]$ et, de même, que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\right]$.

Cela donne, après simplification avec le théorème de SCHWARZ puisque toutes les fonctions sont de classe $C^2$ : $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Analyse : supposons que $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $C^2$ soit solution de $(E)$, alors, pour $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\varphi^{-1}(u,v))-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\varphi^{-1}(u,v))=0$ qui s'écrit, avec les calculs précédents : $\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0$ sur $\mathbb{R}^2$. On l'écrit $\frac{\partial\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)}{\partial u}=0$ de sorte qu'il existe une fonction $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\forall(u,v)$, $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)=a(u)$. Mais comme $\frac{\partial g}{\partial v}$ est de classe $C^1$, $a$ est elle-même de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. On intègre à nouveau, en notant $A$ une primitive de $a$ sur $\mathbb{R}$, et il existe une fonction $B:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2$, $g(u,v)=A(u)+B(v)$. Comme $g$ est de classe $C^2$, la fonction $B$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ car $\frac{\partial g}{\partial v}$ doit exister et être continue sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, il existe $A,B:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2$, $g(u,v)=A(u)+B(v)$ qui implique, en composant par $\varphi$ qui est surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=A(x+y)+B(x-y)$.

Synthèse : réciproquement, soit $A,B:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe $C^2$ et $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=A(x+y)+B(x-y)$, alors $f$ est aussi de classe $C^2$ par composée et somme et on a facilement $\frac{\partial f}{\partial x}=A'(x+y)+B'(x-y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=A''(x+y)+B''(x-y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}=A'(x+y)-B'(x-y)$ et aussi $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=A''(x+y)-(-B''(x-y))=A''(x+y)+B''(x-y)$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ et $f$ vérifie bien $(E)$.

*REMARQUE 15.17 : Soit $f:P\to\mathbb{R}$ de classe $C^2$ où $P=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y=0$ et $x\leqslant 0\}$.*

- *Soit $\varphi:U=\mathbb{R}_+^*\times]-\pi;\pi[\to P$ définie par $\varphi(r,\theta)=\big(r\cos\theta,r\sin\theta\big)$. Le passage en polaires est enfin bijectif. Si $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ pour $(x,y)\in P$ : $r=\sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta=2\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.*
- *Soit $g:(r,\theta)\in U\mapsto g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=f(x,y)$. Alors,* $\begin{cases}\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial\theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\end{cases}$
- *Encore :* $\begin{cases}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\ \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2} = -r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}+r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\end{cases}$

*REMARQUE HP 15.18 : On définit le* **laplacien de** *$f$ par $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.*

*Ce qui donne en polaires : $\Delta f=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$.*

DÉMONSTRATION : Avec les relations de la remarque précédente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2} &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial y}\\ &\quad -\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial y}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\Delta f.\end{aligned}$$

### 15.3.3 : Matrice hessienne et développement limité

**DÉFINITION 15.9 :**

*Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ de classe $C^2$ sur $\Omega$ et $a\in\Omega$, on appelle* **matrice hessienne de** $f$ **en** $a$, *qu'on note $H_f(a)$, la matrice $H_f(a)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.*

*REMARQUE 15.19 : D'après le théorème de* SCHWARZ*, la matrice $H_f(a)$ est symétrique.*

**DÉFINITION 15.10 :**
*On dit que la fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ admet en $a \in \Omega$ un développement limité d'ordre 2 donné par la relation $f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + (u|h) + (Ah|h) + o(||h||^2)$ avec un vecteur $u \in \mathbb{R}^p$ et une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ si on a $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall h \in \mathbb{R}^p,\ ||h|| \leqslant \alpha \Longrightarrow \Big| f(a+h) - f(a) - (u|h) - (Ah|h) \Big| \leqslant \varepsilon ||h||^2$.*

**PROPOSITION SUR LE DÉVELOPPEMENT LIMITÉ D'UNE FONCTION $C^2$ 15.13 :**
**Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe $C^2$ et $a \in \Omega$, alors $f$ admet en $a$ un développement limité d'ordre 2 donné par $f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + (\nabla f(a))^T h + \dfrac{1}{2} h^T H_f(a) h + o(||h||^2)$.**

DÉMONSTRATION : hors programme.

*REMARQUE 15.20 : Avec des produits scalaires, $f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + (\nabla f(a)|h) + \dfrac{1}{2}(h|H_f(a)h) + o(||h||^2)$.*

# PARTIE 15.4 : EXTREMA

## 15.4.1 : Définitions et condition nécessaire

**DÉFINITION 15.11 :**
*Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$, on dit que $f$ admet en $a$ :*
- *(i) un* **maximum (resp. minimum) local** *si $\exists r > 0,\ \forall x \in B(a,r),\ f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$).*
- *(ii) un* **extremum local** *si $f$ possède en $a$ un maximum local ou un minimum local.*
- *(iii) un* **maximum (resp. minimum) global** *si $\forall x \in \Omega,\ f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$).*
- *(iv) un* **extremum global** *si $f$ possède en $a$ un maximum global ou un minimum global.*

**PROPOSITION SUR UNE CONDITION NÉCESSAIRE D'EXTREMUM LOCAL 15.14 :**
**Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ sur $\Omega$ et $a \in \Omega$, si $f$ admet un extremum local en $a$ alors $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a) = 0$, c'est-à-dire $\forall k \in [\![1;p]\!],\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$.**

DÉMONSTRATION : On a vu avant que, pour $k \in [\![1;p]\!]$, comme $\Omega$ est un ouvert, il existe $r_k > 0$ tel que $\forall t \in ]-r_k; r_k[,\ a + te_k \in \Omega$ (si $(e_1, \cdots, e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$). Comme $f$ admet en $a$ un extremum local (par exemple un maximum local), il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall b \in \Omega,\ ||b - a|| < \alpha \Longrightarrow f(b) \leqslant f(a)$. Ainsi, en notant $\alpha_k = \mathrm{Min}(r_k, \alpha) > 0$, on a $\forall t \in ]-\alpha_k; \alpha_k[,\ b = a + te_k \in \Omega$ et $f(b) \leqslant f(a)$. Par conséquent, la fonction $f_k : ]-\alpha_k; \alpha_k[ \to \mathbb{R}$ définie par $f_k(t) = f(a + te_k)$ est de classe $C^1$ car $f$ l'est et admet en $0$ un maximum local. On sait alors, par le lemme précédent le théorème de ROLLE, que $f_k'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$.

*REMARQUE 15.21 : Il y a des extrema locaux selon les axes canoniques à partir de $a$.*

**DÉFINITION 15.12 :**
*Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe $C^1$ sur $\Omega$, on dit $a \in \Omega$ est un* **point critique** *de $f$ si $\nabla f(a) = 0$.*

*REMARQUE 15.22 :* • *Cette propriété est fausse sur un ensemble non ouvert.*

- *Ainsi, avec ces conditions :* $\big(f$ *admet un extremum local en* $a\big) \Longrightarrow \big(a$ *est un point critique de* $f\big)$.
- *La réciproque de cette implication est fausse.*

***EXEMPLE 15.10 :*** Soit $f : (x,y) \mapsto \sin(x) + \cos(y)$ définie sur $[0;\pi]^2$.
Quel est son maximum absolu ? son minimum absolu ? Ses points critiques ?

DÉMONSTRATION : La fonction $f$ est bien de classe $C^1$ sur le compact $K = [0;\pi]^2$. Ainsi, comme elle est continue sur $K$, elle y est bornée et elle y atteint ses bornes. on peut donc définir $M = \underset{K}{\mathrm{Max}}(f)$ et $m = \underset{K}{\mathrm{Min}}(f)$.
On calcule $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y) = (\cos(x), -\sin(y))$, donc les seuls points critiques de $f$ sur le domaine $K$ sont en $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ et en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Ces deux points sont sur la frontière de $K$.
Ainsi, la fonction $f$ ne peut pas atteindre ses extrema absolus en des points intérieurs à $K$ d'après la proposition précédente. Il reste à étudier $f$ sur les quatre arêtes du carré $K$ :
• $f_1 : x \mapsto f(x,0) = 1 + \sin(x)$ est minimale en $0$ ou $\pi$ sur $[0;\pi]$ où elle vaut $1$ et maximale en $\frac{\pi}{2}$ où elle vaut $2$.
• $f_2 : x \mapsto f(x,\pi) = -1 + \sin(x)$ est minimale en $0$ ou $\pi$ sur $[0;\pi]$ où elle vaut $-1$, maximale en $\frac{\pi}{2}$ et y vaut $0$.
• $f_3 : y \mapsto f(0,y) = \cos(y)$ est minimale en $\pi$ sur $[0;\pi]$ où elle vaut $-1$ et maximale en $0$ où elle vaut $1$.
• $f_4 : y \mapsto f(\pi,y) = \cos(y)$ est minimale en $\pi$ sur $[0;\pi]$ où elle vaut $-1$ et maximale en $0$ où elle vaut $1$.
Par conséquent, $f$ est maximale sur $K$ en $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ où elle vaut $M = 2$ et $f$ est minimale en $(0,\pi)$ ou $(\pi,\pi)$ où elle vaut $m = -1$. Parmi ces trois points, seul $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est un point critique. De plus, $f$ n'admet pas en l'autre point critique $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ d'extremum local (a fortiori absolu).

## 15.4.2 : Recherche pratique des extrema

***EXERCICE 15.11 :*** Trouver les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x,y) \mapsto x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$.

DÉMONSTRATION : La fonction $f$ est polynomiale donc de classe $C^1$ (en fait de classe $C^\infty$) sur $\mathbb{R}^2$ et on calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y - 2x - 2$. Ainsi, si $(x,y)$ est un point critique pour $f$, on a le système linéaire $x - y = 2y - x - 1 = 0$ qui est un système de CRAMER dont l'unique solution est $(x,y) = (1,1)$.
On étudie $f$ au voisinage de ce point critique pour voir si c'est un extremum local (voire plus). Soit $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(1+h, 1+k) = (1+h)^2 + 2(1+k)^2 - 2(1+h)(1+k) - 2(1+k) + 5 = 4 + (h-k)^2 + k^2$ (après calculs) donc $f(1+h,1+k) \geqslant 4 = f(1,1)$ ce qui prouve que $f$ admet en $(1,1)$ un minimum absolu.
Comme $f(x,0) = x^2 + 5$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,0) = +\infty$ donc $f$ n'admet pas de majorant sur $\mathbb{R}^2$.
La surface $z = f(x,y)$ est un paraboloïde elliptique (parabole si $x$ ou $y$ sont fixés et ellipse si $z > 4$ est fixé).

**THÉORÈME SUR UNE CONDITION SUFFISANTE D'EXTRÉMALITÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT CRITIQUE 15.15 :**
**Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$ et $a$ un point critique de $f$ :**

(i) **si $H_f(a) \in S_p^{++}(\mathbb{R})$, alors $f$ admet en $a$ un minimum local.**

(ii) **si $H_f(a) \in S_p^{--}(\mathbb{R})$ $(-H_f(a) \in S_p^{++}(\mathbb{R}))$, alors $f$ admet en $a$ un maximum local.**

(iii) **si $H_f(a) \notin S_p^{+}(\mathbb{R})$, alors $f$ n'a pas de minimum local en $a$.**

(iv) **si $H_f(a) \notin S_p^{-}(\mathbb{R})$ $(-H_f(a) \notin S_p^{+}(\mathbb{R}))$, alors $f$ n'a pas de maximum local en $a$.**

(v) **si $H_f(a) \in \big(S_p^{+}(\mathbb{R}) \setminus S_p^{++}(\mathbb{R})\big) \cup \big(S_p^{-}(\mathbb{R}) \setminus S_p^{--}(\mathbb{R})\big)$, alors on ne peut rien dire.**

<u>DÉMONSTRATION</u> : Les cinq cas recouvrent l'ensemble des possibilités pour la matrice symétrique $H_f(a)$.
$(i)$ Si $H_f(a)$ est définie positive, son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, notons $\lambda = \mathrm{Min}(\mathrm{Sp}(H_f(a)) > 0$ la plus petite des valeurs propres de $H_f(a)$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres de $H_f(a)$ (éventuellement répétées). Comme $\nabla f(a) = 0$, pour $\varepsilon \in \left]0; \frac{\lambda}{2}\right[$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall h \in B(0, \alpha)$, $|f(a+h) - f(a) - \frac{1}{2}h^T H_f(a)h| \leqslant \varepsilon ||h||^2$ ce qui implique que $f(a+h) \geqslant f(a) + \frac{1}{2}h^T H_f(a)h - \varepsilon||h||^2$. Or, si $h = \sum_{k=1}^{p} h_k v_k$ où $(v_1, \cdots, v_p)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de $H_f(a)$ associés aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ respectivement, on a $H_f(a)h = \sum_{k=1}^{p} h_k \lambda_k v_k$ et $h^T H_f(a)h = (h|H_f(a)h) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k h_k^2 \geqslant \lambda \sum_{k=1}^{p} h_k^2 = \lambda||h||^2$ (avec la norme euclidienne). Ainsi, $\forall h \in B_2(0, \alpha)$, $f(a+h) \geqslant f(a) + \frac{1}{2}h^T H_f(a)h - \varepsilon||h||^2 \geqslant f(a) + \frac{\lambda}{2}||h||^2 - \varepsilon||h||^2 \geqslant f(a)$ avec la minoration précédente. Par conséquent, $f$ admet en $a$ un minimum local.
$(iii)$ Si $H_f(a)$ n'est pas positive, il existe une valeur propre strictement négative $\lambda$ de $H_f(a)$, soit $v$ un vecteur propre unitaire associé à $\lambda$. Alors $f(a+tv) \underset{0}{=} f(a) + \frac{1}{2}(tv|H_f(a)(tv)) + o(||tv||^2) \underset{0}{=} f(a) + \frac{\lambda t^2}{2} + o(t^2)$.
Comme avant, pour $t$ assez petit et non nul, $f(a+tv) - f(a) < 0$ donc $f$ n'admet pas en $a$ de minimum local.
$(ii)$ et $(iv)$ se montrent avec $(i)$ et $(iii)$ en remplaçant $f$ par $-f$.
$(v)$ est le complémentaire de la réunion des quatre cas précédents.

***<u>ORAL BLANC 15.12</u> :*** Centrale PSI 2012

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x - y)^3 + 6xy$.
Prouver que $f$ admet un maximum et un minimum sur $D$ et calculer explicitement ces valeurs.

*<u>REMARQUE 15.23</u> : Supposons que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (avec $\Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^2$) de classe $C^2$ admette un point critique en $a \in \Omega$, avec les notations de* MONGE *:* $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$ *:*

*(i) Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ (ou $t > 0$), $f$ admet en $a$ un minimum local,*

*(ii) Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ (ou $t < 0$), $f$ admet en $a$ un maximum local,*

*(iii) Si $rt - s^2 < 0$, $f$ admet en $a$ un point selle (ou point col).*

*(iv) Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.*

<u>DÉMONSTRATION</u> : $H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ et $\chi_H = X^2 - (r+t)X + rt - s^2 = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ si $\lambda_1, \lambda_2$ sont les valeurs propres de $H_f(a)$ donc $\det(H_f(a)) = \lambda_1\lambda_2 = rt - s^2$ et $\mathrm{tr}(H_f(a)) = \lambda_1 + \lambda_2 = r + t$.
$(i)$ si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, alors $\lambda_1\lambda_2 > 0$ donc $\lambda_1$ et $\lambda_2$ ont même signe strict. Puisque $-s^2 \leqslant 0$, on a forcément $t > 0$. Ainsi, $\mathrm{tr}(H_f(a)) = r + t = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$ donc $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ et $H_f(a)$ est définie positive. D'après le théorème 15.15, $f$ admet en $a$ un minimum local. Idem pour $(ii)$.
$(iii)$ si $rt - s^2 < 0$, alors $\det(H_f(a)) = \lambda_1\lambda_2 = rt - s^2 < 0$ donc $\lambda_1$ et $\lambda_2$ ont des signes stricts opposés donc $f$ n'admet en $a$ ni un maximum local ni un minimum local d'après le théorème 15.15.

***<u>EXERCICE 15.13</u> :*** Trouver les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

<u>DÉMONSTRATION</u> : $f$ est polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ donc admet des dérivées partielles en tout point à tout ordre, en fait $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4(x - y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 + 4(x - y)$.
Ainsi, si $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x, y) = \overrightarrow{0}$, alors $x^3 - (x - y) = y^3 + (x - y) = 0$ ce qui prouve que $x^3 = -y^3 = (-y)^3$ donc que $x = -y$ car $t \mapsto t^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le système $x^3 - (x - y) = y^3 + (x - y) = 0$ équivaut donc à $x + y = x^3 - 2x = 0$. Il y a donc trois points critiques de $f$ : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
• En $(0, 0)$, $f$ n'admet pas d'extremum local car $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^4} > 0$ et $f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^2} = \frac{1 - 2n^2}{n^4} < 0$ si $n \geqslant 1$ : $f$ est à la fois strictement positive et strictement négative au voisinage de $(0, 0)$ : c'est un point selle.
• Comme $f(-x, -y) = f(x, y)$, ce qui se passe au voisinage de $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est équivalent par symétrie à ce qui se passe au voisinage de $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ : la surface $z = f(x, y)$ est stable par le demi-tour d'axe • Comme la hessienne

est hors programme et que $f$ est polynomiale de degré $4$, on va se ramener à un compact pour justifier que $f$ admet en un minimum absolu.
À nouveau, $x^4+y^4 \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2$ (car $x^4+y^4 \geqslant 2x^2y^2 \iff (x^2-y^2)^2 \geqslant 0$) et $2(x-y)^2 \leqslant 4(x^2+y^2)$ (car $2x^2+2y^2 \geqslant -4xy \iff (x+y)^2 \geqslant 0$) donc $f(x,y) \geqslant \frac{1}{2}||(x,y)||_2^4 - 4||(x,y)||_2^2$ en sommant ces deux inégalités. Ainsi, si $||(x,y)||_2 \geqslant 2\sqrt{2}$, on a $f(x,y) \geqslant \frac{||(x,y)||_2^2}{2}\Big(||(x,y)||_2^2 - 8\Big) \geqslant 0$. La fonction $f$ est continue sur le fermé borné (compact) $K = B_{2,f}((0,0), 2\sqrt{2})$ donc y est bornée et y atteint ses bornes. Notons, $m = \underset{K}{\mathrm{Min}}(f)$. Comme $(\sqrt{2},-\sqrt{2}) \in K$ et que $f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -8$, il vient $m \leqslant -8$ donc $m < 0$.
Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, considérons deux cas :
- si $(x,y) \in K$, alors $f(x,y) \geqslant m$ d'après ce qui précède.
- si $(x,y) \notin K$, on a vu ci-dessus, puisque $||(x,y)||_2 > 2\sqrt{2}$, que $f(x,y) \geqslant 0 > m$.

Ainsi, $m$ est un minorant de $f$ sur $\mathbb{R}^2$, et comme il est atteint sur $K$, c'est le minimum de $f$ sur $\mathbb{R}^2$.
Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert et que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$, en notant $(x_0,y_0) \in K$ un point en lequel on a $f(x_0,y_0) = m$, on sait que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0,y_0) = \overrightarrow{0}$ donc $(x_0,y_0) = (-\sqrt{2},\sqrt{2})$ ou $(x_0,y_0) = (\sqrt{2},-\sqrt{2})$ d'après les résultats précédents. Comme en ces points, la fonction $f$ vaut $-8$, on en déduit que $m = -8$, que le minimum de $f$ vaut $-8$ et qu'il est atteint en deux points exactement : les points $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ ou $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.
Ici, si on effectue un $DL_2$ de $f$ au voisinage de $(0,0)$, on obtient $f(h,k) \underset{0}{=} -2(h-k)^2 + o(h^2+k^2)$ et "on pourrait se méprendre, et on jaserait. Nous venons déjà de frôler l'incident." En effet, $q_1 : (h,k) \mapsto -2(h-k)^2$ est une forme quadratique négative, ce qui laisse penser que $f$ admet en $(0,0)$ un maximum local. Il n'en est rien car cette forme quadratique n'est pas définie, la droite $x = y$ fait partie du cône isotrope de $q_1$.
Par contre, si on effectue un $DL_2$ de $f$ au voisinage de $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, en changeant l'origine et avec $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(\sqrt{2}+h,-\sqrt{2}+k) - f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = (\sqrt{2}+h)^4 + (-\sqrt{2}+k)^4 - 2(2\sqrt{2}+h-k)^2 + 8$ donc
$$f(\sqrt{2}+h,-\sqrt{2}+k) - f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) \underset{0}{=} 10h^2+4hk+10k^2+o(h^2+k^2) \underset{0}{=} 10\Big(h+\frac{k}{5}\Big)^2 + \frac{48}{5}k^2 + o(h^2+k^2)$$
et cette fois-ci, cela prouve que $f$ admet bien en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ minimum local car $q_2 : (h,k) \mapsto 10h^2+4hk+10k^2$ est une forme quadratique définie positive (positive c'est clair et seul le vecteur nul est dans son cône isotrope car on a l'équivalence $h + \frac{k}{5} = k = 0 \iff h = k = 0$).

*EN PRATIQUE : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ où $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ :*
- *On calcule les points critiques, les extrema, s'ils existent, sont parmi ces points.*
- *Au voisinage des points critiques, on détermine si c'est un extremum local avec la matrice hessienne.*

*Soit $f : K \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ où $K$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^p$ :*
- *On sait que $f$ est bornée et atteint ses bornes sur $K$.*
- *On paramètre avec une seule variable le bord de $K$ et on étudie la fonction.*
- *On cherche les points critiques à l'intérieur du compact, le fait qu'on sache qu'un extremum existe peut nous éviter de faire l'étude de la hessienne en ces points.*

# PARTIE 15.5 : APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

## 15.5.1 : Courbes

<u>*REMARQUE 15.24*</u> *: Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ et $\Gamma = \{(x,y) \in \Omega \mid f(x,y) = 0\}$. Si $(x_0, y_0) \in \Gamma$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0,y_0) \neq \vec{0}$ alors il existe un paramétrage local de $\Gamma$ de classe $C^1$ au voisinage de $(x_0,y_0)$ : il existe $r > 0$ tel que $B(M_0, r) \subset \Omega$, un intervalle ouvert $I$ contenant $0$, $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ telles que $\big(x(0), y(0)\big) = M_0$ et $\forall (x,y) \in B(M_0, r)$, $(x,y) \in \Gamma \iff \big(\exists t \in I,\ x = x(t)$ et $y = y(t)\big)$.*

*Il s'agit du théorème des fonctions implicites explicitement hors programme.*

*Ceci signifie, en voyant $f$ comme une fonction altitude, que si $f$ est de classe $C^1$, les côtes (altitude $0$) forment une "gentille" courbe au voisinage des points qui ne sont pas des points critiques.*

**DÉFINITION 15.13 :**
*Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ et la courbe $\Gamma$ définie par $\Gamma = \{(x,y) \in \Omega \mid f(x,y) = 0\}$ (équation implicite). On dit qu'un point $M_0 = (x_0, y_0)$ de $\Gamma$ est* **un point régulier** *si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0) \neq \vec{0}$.*

**PROPOSITION SUR LE RAPPORT GRADIENT / LIGNES DE NIVEAUX 15.16 :**
**Pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, en un point $M_0$ d'une ligne de niveau $N_\lambda = \{(x,y) \in \Omega \mid f(x,y) = \lambda\}$, si $f$ est $C^1$ sur $\Omega$ et si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0) \neq \vec{0}$, ce vecteur est orthogonal à $N_\lambda$ (à la tangente en $M_0$ à $N_\lambda$) et orienté dans le sens des valeurs croissantes de $f$.**

<u>DÉMONSTRATION</u> : • En un point régulier $M_0$ d'une courbe de niveau $N_\lambda$ dont l'équation peut être réécrite $g(x,y) = 0$ en posant $g(x,y) = f(x,y) - \lambda$, on peut paramétrer localement au voisinage de $M_0$ la courbe $N_\lambda$ par $x = x(t)$, $y = y(t)$. Puisque $\forall t \in I$, $g(x(t), y(t)) = 0$, d'après la règle de la chaîne, on a la relation $\forall t \in I$, $\big(g(x(t), y(t))\big)' = 0 = x'(t)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$.

Il suffit de prendre maintenant $t = 0$ dans cette relation pour avoir $x'(0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0) + y'(0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0$ qui traduit que $(x'(0), y'(0)) \perp \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)$. Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)$ est orthogonal au vecteur dérivé $(x'(0), y'(0))$ qui dirige une tangente à $N_\lambda$ au point $M_0$ : on dit que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)$ est orthogonal à $N_\lambda$ en $M_0$.

• À partir du point $M_0$ de $N_\lambda$, évoluons dans la direction du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)$ et regardons ce qui se passe localement au voisinage de $M_0$. Posons donc $\varphi : t \mapsto f\Big(M_0 + t\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)\Big)$ et étudions sa dérivée en $0$. Comme $\forall t \in J$, $\varphi(t) = f\Big(x_0 + t\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0), y_0 + t\dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0)\Big)$, $\varphi$ est dérivable sur $J$ (intervalle ouvert et $0 \in J$) d'après la règle de la chaîne et $\forall t \in J$, $\varphi'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big(M_0 + t\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)\Big) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big(M_0 + t\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)\Big)$.
On a donc $\varphi'(0) = \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0)\Big)^2 + \Big(\dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0)\Big)^2 = ||\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)||^2 > 0$.

Ainsi, $\varphi$ est localement croissante (car $\varphi'$ est continue sur $J$ puisque $f$ est de classe $C^1$ par hypothèse) au voisinage de $0$ ce qui signifie que $f$ croît dans la direction $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)$ au départ de $M_0$.

*REMARQUE 15.25 : Soit $u$ unitaire et $\varphi_u : t \mapsto f(M_0 + tu)$, alors $|\varphi_u'(0)| = |u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)|$ donc, d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, $|\varphi_u'(0)| \leqslant \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right)^2}$ et $\varphi_u'(0)$ devient maximal si on prend $u$ colinéaire de même sens avec le vecteur gradient : à partir de $M_0$, si on voit la fonction $f$ comme la fonction altitude, la direction $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)$ est la ligne de plus grande pente.*

**PROPOSITION SUR UNE ÉQUATION DE LA TANGENTE AVEC LE GRADIENT 15.17 :** **Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0) \neq \overrightarrow{0}$ est donc un vecteur normal à la tangente à $\Gamma$ au point $M_0$ ce qui fait que la tangente à $\Gamma$ en $M_0$ a pour équation : $(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.**

DÉMONSTRATION : $M_0 \in \Gamma$ est donc un point régulier de la courbe et on a vu à la proposition précédente (pour $\lambda = 0$) que la vecteur dérivé $\overrightarrow{v_0} = (x'(0), y'(0))$ (qui est un vecteur directeur de la tangente $T_0$ en $M_0$ à $\Gamma = N_0$) est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)$. Ainsi, pour un point $M \in \mathbb{R}^2$, on a l'équivalence suivante : $M \in T_0 \iff (\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{v_0})$ est liée $\iff \overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0) \iff \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = 0$. Il suffit de calculer ce produit scalaire pour avoir $M \in T_0 \iff (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

***EXERCICE 15.14 :***

Quels sont les points réguliers de la cardioïde $C$ d'équation implicite $(x^2 + y^2 - x)^2 - (x^2 + y^2) = 0$ ? En l'un de ces points $M_0$, donner une équation cartésienne de la tangente à $C$ en $M_0$.

DÉMONSTRATION : Tout d'abord, cette cardioïde a une équation plus simple en polaires qu'en cartésiennes, en effet, si $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, on a $(x^2 + y^2 - x)^2 - (x^2 + y^2) = 0 \iff (r^2 - r\cos(\theta))^2 = r^2$ donc $(x^2 + y^2 - x)^2 - (x^2 + y^2) = 0 \iff \big(|r - \cos(\theta)| = \pm 1$ ou $r = 0\big)$. Or on trouve $r = 0$ (l'origine du repère) pou $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ donc $(x^2 + y^2 - x)^2 - (x^2 + y^2) = 0 \iff r = 1 + \cos(\theta)$ ou $r = -1 + \cos(\theta)$.

De plus, $r = -1 + \cos(\theta)$ donne la même courbe que $r = 1 + \cos(\theta)$ car les points de coordonnées polaires (en maths) $(r, \theta)$ et $(-r, \theta + \pi)$ sont les mêmes et que $r = -1 + \cos(\theta) \iff -r = 1 + \cos(\theta + \pi)$.

On présente traditionnellement la cardioïde par son équation $r = 1 + \cos(\theta)$.

Ici, la cardioïde est donnée sous forme implicite par $C : f(x, y) = 0$ avec $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2 - x)^2 - (x^2 + y^2)$. Or, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2(2x - 1)(x^2 + y^2 - x) - 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y(x^2 + y^2 - x) - 2y = y(4x^2 + 4y^2 - 4x - 2)$. Si $(x, y) \in C$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M) = \overrightarrow{0}$, alors $(y = 0$ et $2x((2x - 1)(x - 1) - 1) = 2x^2(2x - 3) = 0)$ ou $(x^2 + y^2 - x = 1/2$ et $(2x - 1) - 2x = 0)$. Ainsi, les deux seuls points critiques de $f$ sur $\mathbb{R}^2$ sont $(0, 0)$, $(3/2, 0)$. Comme $(0, 3/2) \notin C$, le seul point non régulier de $C$ est le point $(0, 0) \in C$. Soit donc $(x_0, y_0) \in C$ tel que $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, alors une équation de la tangente $T_0$ à $C$ en $M_0 = (x_0, y_0)$ est donc d'après la proposition précédente $T_0 : (2(2x_0 - 1)(x_0^2 + y_0^2 - x_0) - 2x_0)(x - x_0) + (4y_0(x_0^2 + y_0^2 - x_0) - 2y_0)(y - y_0) = 0$ (qu'on peut certainement simplifier).

## 15.5.2 : Surfaces

**DÉFINITION 15.14 :**
*Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ et la surface $S = \{(x, y, z) \in \Omega \mid f(x, y, z) = 0\}$ (équation implicite). On dit qu'un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de $S$ est* **un point régulier** *si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0) \neq \overrightarrow{0}$.*

***EXEMPLE 15.15*** *:* Soit $S$ d'équation $S\ :\ x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$. Tous ses points sont réguliers.

DÉMONSTRATION : En définissant $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$, la surface $S$ est définie implicitement par $S\ :\ f(x, y, z) = 0$. Comme $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)$, le seul point $(x, y, z)$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ est le point $(0, 0, 0)$ qui n'appartient pas à $S$ donc tous les points de $S$ sont réguliers.
On peut paramétrer cette surface par $x = \sqrt{a^2 + 1}\cos\theta,\ y = \sqrt{a^2 + 1}\sin\theta,\ z = a$.

La surface $S$ est appelée un hyperboloïde à une nappe (H1 pour les intimes).

**DÉFINITION 15.15 :**
*Soit une surface $S$ d'équation $f(x, y, z) = 0$ avec $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, $I$ un intervalle, $x, y, z : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions de classe $C^1$ telles que $\forall t \in I,\ \big(x(t), y(t), z(t)\big) \in S$.*
*En notant $\Gamma = \{\big(x(t), y(t), z(t)\big) \mid t \in I\}$, on dit que* **la courbe $\Gamma$ est tracée sur la surface** $S$.

***EXEMPLE 15.16*** *:* Soit la terre d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ (assimilée à une sphère) :

- La courbe d'équation $x(t) = \sin t,\ y(t) = \cos t,\ z(t) = 0$ représente l'équateur.
- La courbe d'équation $x(t) = \sin t,\ y(t) = 0,\ z(t) = \cos t$ représente le méridien de GREENWICH.

*REMARQUE 15.26 : Pour une surface $S$ d'équation explicite $z = g(x, y)$ (le "graphe" d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$), les* **courbes coordonnées** *sont les courbes d'équation :*

- $x(t) = x_0,\ y(t) = t,\ z(t) = g(x_0, t)$ *($x = x_0$ est fixé et c'est $y$ qui bouge).*
- $x(t) = t,\ y(t) = y_0,\ z(t) = g(t, y_0)$ *($y = y_0$ est fixé et c'est $x$ qui bouge).*

***EXEMPLE 15.17*** *:* Pour la surface d'équation $z = x^2 - y^2 \iff x^2 - y^2 - z = 0$ (un paraboloïde hyperbolique), les courbes coordonnées sont :

- $x(t) = x_0,\ y(t) = t,\ z(t) = x_0 - t^2$ (c'est une parabole).
- $x(t) = t,\ y(t) = y_0,\ z(t) = t^2 - y_0$ (c'est une parabole).

D'autres courbes sont tracées sur cette surface :

- $x(t) = \mathrm{ch}(t),\ y(t) = \mathrm{sh}(t),\ z(t) = 1$ (c'est une hyperbole).
- $x(t) = \dfrac{t+1}{2},\ y(t) = \dfrac{t-1}{2},\ z(t) = t$ (c'est une droite).

*REMARQUE 15.27 : Soit une surface $S\ :\ f(x, y, z) = 0$ avec $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$. Les tangentes en un point $M_0$ régulier de $S$ aux courbes de classe $C^1$ tracées sur $S$ sont orthogonales à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)$.*

DÉMONSTRATION : Soit une courbe $\Gamma$ paramétrée par $g : t \in I \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ de classe $C^1$ tracée sur la surface $S$, ce qui signifie que $\forall t \in I,\ (x(t), y(t), z(t)) \in S \iff f(x(t), y(t), z(t)) = 0$ par hypothèse puisque $S$ est définie implicitement. On dérive avec la règle de la chaîne car $f$ est aussi de classe $C^1$ par hypothèse. Ainsi, $\forall t \in I,\ x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(g(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(g(t)) + z'(t)\frac{\partial f}{\partial z}(g(t)) = 0$. Si $M_0 = g(t_0)$, prenons $t = t_0$ dans la relation précédente : $x'(t_0)\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + y'(t_0)\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) + z'(t_0)\frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = 0 \quad (R)$. Le vecteur dérivé $\overrightarrow{v_0} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ (supposé non nul) engendre la tangente $T_0$ à la courbe $\Gamma$ en $M_0$. Alors, la relation $(R)$ montre que $\overrightarrow{v_0} \perp \overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)$ donc la tangente $T_0$ est orthogonales à $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)$ comme attendu.

**DÉFINITION 15.16 :**
*Le plan tangent à la surface $S$ en un point régulier $M_0$ est le plan orthogonal à $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)$ passant par $M_0$.*

DÉMONSTRATION : La remarque précédente montre que toutes les courbes "régulières" tracées sur la surface $S$ ont en $M_0 \in S$ un vecteur dérivé (donc une tangente) orthogonal(e) à $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)$. Il est donc logique de définir comme plan tangent en $M_0$ à la surface $S$ le plan contenant toutes ces tangentes, donc le plan contenant le point $M_0$ et de vecteur normal $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)$.

*REMARQUE 15.28 : Soit deux surfaces $S$ et $S'$ définies par $S\ :\ f(x, y, z) = 0$ et $S'\ :\ g(x, y, z) = 0$ avec $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$. Si un point $M_0$ appartient à $S \cap S'$ et que $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\, g(M_0)$ ne sont pas colinéaires, alors $S \cap S'$ est localement (au voisinage de $M_0$), une courbe $\Gamma$ tracée à la fois sur $S$ et sur $S'$. La tangente à cette courbe $\Gamma$ en $M_0$ est alors engendrée par le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0) \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\, g(M_0)$.*

DÉMONSTRATION : La définition précédente montre que les deux plans tangents $P_0$ (à $S$ en $M_0$) et $P'_0$ (à $S'$ en $M_0$) ont des vecteurs normaux non colinéaires donc sont sécants (pas parallèles) selon une droite $D = P_0 \cap P'_0$ qui est donc orthogonale aux deux vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\, g(M_0)$ non colinéaires. On admet que ceci implique, localement au voisinage de $M_0$, que l'ensemble $\Gamma = S \cap S'$ est une courbe de classe $C^1$ (comme $f$ et $g$) : c'est une version du théorème des fonctions implicites. Cette courbe $\Gamma$ est donc tracée à la fois sur $S$ et sur $S'$ donc un vecteur tangent (non nul) $\overrightarrow{v}$ à $\Gamma$ en $M_0$ est donc, d'après la remarque précédente, à la fois orthogonal à $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)$ et à $\overrightarrow{\text{grad}}\, g(M_0)$. D'après les propriétés du produit vectoriel, on sait que $\overrightarrow{v}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0) \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\, g(M_0)$ qui est donc bien un vecteur tangent à $\Gamma$ en $M_0$ (c'est un vecteur directeur de $D$).

**PROPOSITION SUR UNE ÉQUATION DU PLAN TANGENT À UNE SURFACE 15.18 :**
**Ce plan tangent à $S$ en $M_0$ point régulier a pour équation :**

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

DÉMONSTRATION : Par définition, en notant $P_0$ ce plan tangent à $M_0$ à $S$, on a, pour un point $M \in \mathbb{R}^3$, l'équivalence $M \in P_0 \iff \overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0) \iff (\overrightarrow{M_0M} | \overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)) = 0$ ce qui nous permet d'avoir l'équation : $M \in P_0 \iff (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$.

***EXEMPLE 15.18 :***

Trouver une équation du plan tangent $P$ au $H_1$ (hyperboloïde à une nappe) d'équation cartésienne $S\ :\ x^2+y^2-z^2-1=0$ en un point de $S$. Montrer que $P\cap S$ contient exactement deux droites.

DÉMONSTRATION : • Soit un point $M_0=(x_0,y_0,z_0)\in S$, c'est-à-dire $x_0^2+y_0^2-z_0^2-1=0$. Vérifions que $M_0$ est un point régulier de $S$. Comme $S$ est définie par l'équation implicite $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1=0$, on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)=(2x_0,2y_0,-2z_0)\neq(0,0,0)$ car si on avait $(2x_0,2y_0,-2z_0)\neq(0,0,0)$, on aurait $x_0^2+y_0^2-z_0^2-1=-1\neq 0$. Ainsi, $M_0$ est bien un pont régulier de $S$. D'après la proposition précédente, le plan tangent $P_0$ en $M_0$ à la surface $S$ à pour équation $P_0\ :\ 2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-2z_0(z-z_0)=0$. Comme $x_0^2+y_0^2-z_0^2-1=0$, après simplification et division par 2, cette équation de $P_0$ se transforme en $P_0\ :\ x_0x+y_0y-z_0z=1$ et encore une fois on se rend compte que cette équation est obtenue par dédoublement au sens où $x^2$ devient $x_0x$, $y^2$ devient $y_0y$, $z^2$ devient $z_0z$, $2xy$ devient $x_0y+xy_0$, $2xz$ devient $x_0z+xz_0$, $2yz$ devient $y_0z+yz_0$, $2x$ devient $x_0+x$, $2y$ devient $y_0+y$, $2z$ devient $z_0+z$ et les constantes restent telles quelles.
• Le plan $P_0$ est le plan passant par $M_0$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n_0}=(x_0,y_0,-z_0)$. Considérons deux cas :

- si $z_0=0$, $\overrightarrow{v_1}=(0,0,1)$ et $\overrightarrow{v_2}=(-y_0,x_0,0)$ sont des vecteurs directeurs indépendants de $P_0$ qu'on peut paramétrer $x=x_0-\lambda_2y_0$, $y=y_0+\lambda_2x_0$, $z=\lambda_1$ car $M\in P_0\iff\exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{M_0M}=\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}$.

- si $z_0\neq 0$, $\overrightarrow{v_1}=(z_0,0,x_0)$ et $\overrightarrow{v_2}=(0,z_0,y_0)$ sont des vecteurs directeurs indépendants de $P_0$ qui a donc comme paramétrage $x=x_0+\lambda_1z_0$, $y=y_0+\lambda_2z_0$, $z=z_0+\lambda_1x_0+\lambda_2y_0$ comme ci-dessus.

Ainsi, pour trouver $P_0\cap S$, on se donne $M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et on remplace ces coordonnées dans l'équation de $S$ avec le paramétrage précédent selon les deux cas étudiés, cela donne, avec $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ introduits ci-dessus :

- si $z_0=0$, $M\in P_0\cap S\iff(x_0-\lambda_2y_0)^2+(y_0+\lambda_2x_0)^2-(z_0+\lambda_1)^2-1=0\iff\lambda_1^2=(x_0^2+y_0^2)\lambda_2^2$.

Or cette dernière condition équivaut à $\lambda_1=\pm\sqrt{x_0^2+y_0^2}\,\lambda_2$. Ainsi, $M\in P_0\cap S\iff M\in D_1\cup D_2$ si $D_1\ :\ x=x_0-\lambda y_0$, $y=y_0+\lambda x_0$, $z=\lambda\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ et $D_2\ :\ x=x_0-\lambda y_0$, $y=y_0+\lambda x_0$, $z=-\lambda\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ sont les deux droites attendues et définies paramétriquement.

- si $z_0\neq 0$, $M\in P_0\cap S\iff(x_0+\lambda_1z_0)^2+(y_0+\lambda_2z_0)^2-(z_0+\lambda_1x_0+\lambda_2y_0)^2-1=0$ qui se simplifie en $M\in P_0\cap S\iff(z_0^2-x_0^2)\lambda_1^2+(z_0^2-y_0^2)\lambda_2^2-2\lambda_1\lambda_2x_0y_0=0$. Traitons à nouveau deux cas :

  - si $z_0=\pm x_0$ et $z_0=\pm y_0$, alors $x_0=\pm 1$, $y_0=\pm 1$ et $z_0=\pm 1$ car $x_0^2+y_0^2-z_0^2-1=0$. Cela concerne huit points de $S$. Alors $(z_0^2-x_0^2)\lambda_1^2+(z_0^2-y_0^2)\lambda_2^2-2\lambda_1\lambda_2x_0y_0=0\iff(\lambda_1=0$ ou $\lambda_2=0)$ donc $P_0\cap S=D_1\cup D_2$ où $D_1: x=x_0, y=y_0+\lambda z_0, z=z_0+\lambda y_0$ ; $D_2: x=x_0+\lambda z_0, y=y_0,\ z=z_0+\lambda x_0$.
  - si $z_0=\pm x_0$ et $z_0^2-y_0^2\neq 0$, Ainsi, $(z_0^2-x_0^2)\lambda_1^2+(z_0^2-y_0^2)\lambda_2^2-2\lambda_1\lambda_2x_0y_0=0$ équivaut aussi à $(z_0^2-y_0^2)\lambda_2^2-2\lambda_1\lambda_2x_0y_0=0\iff\lambda_2=0$ ou $\lambda_2=\dfrac{2x_0y_0}{z_0^2-y_0^2}\lambda_1=\alpha\lambda_1$. Là encore, $P_0\cap S=D_1\cup D_2$ où $D_1: x=x_0+\lambda_1z_0, y=y_0, z=z_0+\lambda_1x_0$ ; $D_2: x=x_0+\lambda_1z_0, y=y_0+\alpha\lambda_1z_0, z=z_0+\lambda_1x_0+\alpha\lambda_1y_0$.
  - si $z_0^2-x_0^2\neq 0$, si on pose le polynôme $Q=(z_0^2-x_0^2)X^2-2x_0y_0X+(z_0^2-y_0^2)$, alors son discriminant $\Delta=4x_0^2y_0^2-4(z_0^2-x_0^2)(z_0^2-y_0^2)=4z_0^2$ après calculs car $x_0^2+y_0^2-z_0^2-1=0$. Ainsi, $Q$ admet deux racines réelles distinctes $\alpha_1$ et $\alpha_2$ qu'il est inutile d'exprimer précisément. Par conséquent, on peut écrire $Q=(z_0^2-x_0^2)(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)$ donc, comme d'après les relations coefficients-racines, on a les relations $(z_0^2-y_0^2)=\alpha_1\alpha_2(z_0^2-x_0^2)$ et $2x_0y_0=(\alpha_1+\alpha_2)(z_0^2-x_0^2)$, il vient l'équivalence suivante $(z_0^2-x_0^2)\lambda_1^2+(z_0^2-y_0^2)\lambda_2^2-2\lambda_1\lambda_2x_0y_0=0\iff(\lambda_1-\alpha_1\lambda_2)(\lambda_1-\alpha_2\lambda_2)=0$ qui se traduit par $\lambda_1=\alpha_1\lambda_2$ ou $\lambda_1=\alpha_2\lambda_2$. À nouveau, $P_0\cap S=D_1\cup D_2$ où l'on définit paramétriquement les deux droites $D_1\ :\ x=x_0+\alpha_1\lambda z_0$, $y=y_0+\lambda z_0$, $z=z_0+\alpha_1\lambda x_0+\lambda y_0$ (correspondant à $\lambda_1=\alpha_1\lambda_2$) et $D_2\ :\ x=x_0+\alpha_2\lambda z_0$, $y=y_0+\lambda z_0$, $z=z_0+\alpha_2\lambda x_0+\lambda y_0$ (correspondant à $\lambda_1=\alpha_2\lambda_2$).

Dans tous les cas, et donc quel que soit le point $M_0$ de $S$, si on note $P_0$ le plan tangent à $S$ en $M_0$, l'intersection de $P_0$ et de $S$ contient exactement deux droites sécantes en $M_0$.

## COMPÉTENCES

- Établir l'existence des dérivées partielles et les calculer dans ce cas.
- Montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ en étudiant la continuité des dérivées partielles.
- Connaître les différentes opérations algébriques sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- Savoir par cœur la règle de la chaîne et la formule de changement de coordonnées.
- Déterminer le gradient d'une fonction scalaire et sa différentielle.
- Montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ en étudiant la continuité des dérivées secondes.
- Connaître les différentes opérations algébriques sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.
- Utiliser le théorème de Schwarz pour prouver qu'une fonction n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$.
- Maîtriser le passage en coordonnées polaires, les dérivées partielles, le gradient, le laplacien associés.
- Connaître les différentes notions d'extrema (locaux, absolus) de fonctions scalaires.
- Trouver avec le gradient les points critiques où on a éventuellement un extremum local sur un ouvert.
- Établir si on a bien un extrema en un point critique avec la matrice hessienne.
- Montrer l'existence d'un extrema de $f$ sur une partie fermée bornée par la continuité de $f$.
- Utiliser le gradient pour trouver les points réguliers d'une courbe définie de manière implicite....
- ... et déterminer une équation de la tangente à cette courbe en un point régulier
- Utiliser le gradient pour trouver les points réguliers d'une surface définie de manière implicite....
- ... et déterminer une équation du plan tangent à cette surface en un point régulier