CHAPITRE 12
TOPOLOGIE ET CONTINUITÉ

PARTIE 12.1 : TOPOLOGIE DANS UN EVN

DÉFINITION 12.1 :
Soit E *un espace vectoriel normé,* U *une partie de* E *et* $a \in E$*, on dit que :*
- a *est un* **vecteur intérieur** *à* U *si* $\exists r > 0,\ B(a, r) \subset U$.
- U *est un* **ouvert** *de* E *(ou que* U *une* **partie ouverte** *de* E*) si* $\forall a \in U,\ \exists r > 0,\ B(a, r) \subset U$.

PROPOSITION 12.1 :
Soit E un espace vectoriel normé.
- **Toute boule ouverte est une partie ouverte.**
- **Toute réunion (quelconque) de parties ouvertes de E est une partie ouverte de E.**
- **Toute intersection finie de parties ouvertes de E est une partie ouverte de E.**

DÉFINITION 12.2 :
Soit E *un espace vectoriel normé,* F *une partie de* E *et* $a \in E$*, on dit que :*
- a *est un* **vecteur adhérent** *à* F *si* $\forall r > 0,\ B(a, r) \cap F \neq \emptyset$.
- F *est un* **fermé** *de* E *si son complémentaire (dans* E*) est une partie ouverte de* E.

REMARQUE 12.1 : La notion d'ouvert et de fermé dépend de la norme utilisée dans E.
- $\emptyset$ *et* E *sont à la fois ouverts et fermés dans* E.
- U *est ouverte si et seulement si tous ses points sont intérieurs à elle-même.*
- *Si* a *est intérieur à* A *alors* $a \in A$ *mais il existe des points de* A *qui ne sont pas intérieurs à* A.
- *Si* $a \in A$ *alors* a *est adhérent à* A *mais il existe des points adhérents à* A *qui ne sont pas dans* A.

PROPOSITION 12.2 :
Soit E un espace vectoriel normé.
- **Toute boule fermée et toute sphère est une partie fermée.**
- **Toute réunion finie de parties fermées de E est une partie fermée de E.**
- **Toute intersection (quelconque) de parties fermées de E est une partie fermée de E.**

THÉORÈME 12.3 :
Soit A et F deux parties d'un espace vectoriel normé E et $a \in E$:
- **a est adhérent à A si et seulement s'il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.**
- **F est fermée si et seulement si toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ convergente vérifie $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \in F$.**

DÉFINITION 12.3 :
Soit E *un espace vectoriel normé,* A *une partie de* E*, on définit l'***adhérence** *de* A *comme étant la partie de* E *contenant les points adhérents à* A *; on la note* $\overline{A}$.

REMARQUE 12.2 : Soit E *un espace normé,* $A \subset E$*, alors* $\overline{A}$ *est fermé.*

DÉFINITION 12.4 :
Soit E *un espace normé,* $A \subset E$*, on dit que* A *est dense dans* E *si* $\overline{A} = E$.

PROPOSITION 12.4 :
Soit un espace vectoriel E et N_1, N_2 deux normes équivalentes dans E. Si $A \subset E$ et $a \in E$:
- **a est intérieur à A dans l'espace vectoriel normé $(E, N_1) \Longleftrightarrow a$ est intérieur à A dans (E, N_2).**
- **a est adhérent à A dans l'espace vectoriel normé $(E, N_1) \Longleftrightarrow a$ est adhérent à A dans (E, N_2).**
- **A est ouvert dans l'espace vectoriel normé $(E, N_1) \Longleftrightarrow A$ est ouvert dans (E, N_2).**
- **A est fermé dans l'espace vectoriel normé $(E, N_1) \Longleftrightarrow A$ est fermé dans (E, N_2).**
- **A est dense dans l'espace vectoriel normé $(E, N_1) \Longleftrightarrow A$ est dense dans (E, N_2).**

REMARQUE 12.3 : • Ces notions topologiques dépendent en général des normes employées.
• *En dimension finie, elles sont toutes équivalentes : on parle de la* **topologie des normes**.

PARTIE 12.2 : LIMITE ET CONTINUITÉ PONCTUELLE

DÉFINITION 12.5 :
Soit $(E, ||.||_E)$, $(F, ||.||_F)$ *deux espaces vectoriels normés,* $A \subset E$, $f : A \to F$, a *un point de* E *adhérent à* A, $\ell \in F$, *on dit que* f **tend vers** ℓ **en** a *si* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in A,\ ||x - a||_E \leqslant \alpha \Longrightarrow ||f(x) - \ell||_F \leqslant \varepsilon$.
le vecteur ℓ *est noté* $\lim\limits_a f$ *ou* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *:* **limite de** f **en** a.
Soit A *est une partie de* E, $f : A \to F$, $a \in A$, *on dit que* f *est* **continue en** a *si* $\lim\limits_a f = f(a)$.

REMARQUE 12.4 : • Si E *et* F *sont de dimensions finies, cela ne dépend pas des normes.*
• *Si* f *admet une limite en* a *alors elle est unique, ce qui justifie la notation* $\lim\limits_a f$.

THÉORÈME 12.5 :
Soit $f : A \to F$, a adhérent à A et $b \in F$, alors on a l'équivalence qui constitue la caractérisation séquentielle de la limite : $\left(\lim\limits_a f = b\right) \Longleftrightarrow \left(\forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}},\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = b\right)$.
Soit $f : A \to F$ et $a \in A$, alors on adapte pour obtenir la caractérisation séquentielle de la continuité : $\left(f \text{ continue en } a\right) \Longleftrightarrow \left(\forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}},\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = f(a)\right)$.

PROPOSITION 12.6 :
Soit E et F des espaces vectoriels normés, $A \subset E$, $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_p)$ une base de F de dimension p, $f : A \to F$ et, pour $k \in [\![1; p]\!]$, les applications $f_k : A \to \mathbb{K}$ telles que : $\forall x \in A,\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} f_k(x) v_k$. Si $b \in F$, on pose $b = \sum\limits_{k=1}^{p} b_k v_k$. Alors on a : $\lim\limits_a f = b \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1; p]\!],\ \lim\limits_a f_k = b_k$.

PROPOSITION 12.7 :
Soit f et g définies de A dans F et a adhérent à A, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$:
- **si f et g admettent des limites finies en a alors $\lim\limits_a (\alpha f + \beta g) = \alpha \lim\limits_a f + \beta \lim\limits_a g$;**
- **si f et g sont continues en a alors $\alpha f + \beta g$ est aussi continue en a.**

Soit $f : A \to F$ et $g : B \to G$ telles que $f(A) \subset B$:
- **si $b = \lim\limits_a f$ et $\lim\limits_b g$ existent, alors $g \circ f$ admet une limite en a et $\lim\limits_a g \circ f = \lim\limits_b g$;**
- **si f est continue en a et si g continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.**

Soit $\lambda : A \to \mathbb{K}$, $f : A \to F$ et a adhérent à A :
- **si λ et f admettent des limites en a alors λf aussi et $\lim\limits_a (\lambda f) = \lim\limits_a \lambda \times \lim\limits_a f$;**
- **si λ et f sont continues en a alors λf est continue en a.**

Soit $f : A \to \mathbb{K}$ et a adhérent à A :
- **si f admet une limite $\ell \neq 0_F$ en a, f ne s'annule pas au vois. de a et $\lim\limits_a (1/f) = \left(\lim\limits_a f\right)^{-1}$.**
- **si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$ alors $1/f$ est continue en a.**

PARTIE 12.3 : CONTINUITÉ SUR UNE PARTIE

DÉFINITION 12.6 :
Soit E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \to F$.
On dit que f est **continue sur** A *si f est continue en tout point (ou vecteur) a de A.*
On note $C^0(A, F)$ l'ensemble des fonctions continues sur A et à valeurs dans F.

REMARQUE 12.5 : Le caractère continu ou non des applications dépend des normes employées, mais ne change pas si on prend des normes équivalentes. En dimension finie, cela ne dépend pas des normes.

THÉORÈME 12.8 :
Soit $f : A \to F$, la fonction f est continue sur A si et seulement si pour toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers un vecteur $a \in A$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(a)$.

REMARQUE 12.6 : Soit E un espace vectoriel normé, $f : E \to E$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in E$, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ où f est continue alors $f(\ell) = \ell$ (vecteur fixe de f).

PROPOSITION 12.9 :
Si $(f, g) \in C^0(A, F)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ alors $\alpha f + \beta g \in C^0(A, F)$ (combinaison linéaire).
Ainsi $C^0(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$.
Si $f \in C^0(A, F)$, si $g \in C^0(B, G)$ et si $f(A) \subset B$ alors $g \circ f \in C^0(A, G)$ (composition).
Si $f \in C^0(A, F)$ et $B \subset A$ alors $f|_B \in C^0(B, F)$ (restriction).
Si $f \in C^0(A, F)$ alors $||f|| \in C^0(A, \mathbb{R})$ (norme).

PROPOSITION 12.10 :
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé, F un espace vectoriel normé de dimension finie p et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de F. Si $f : A \to F$, on note $f_1, \cdots, f_p$ les applications de A dans $\mathbb{K}$ définies par $\forall x \in A,\ f(x) = \sum\limits_{k=1}^{p} f_k(x)e_k$. Alors on dispose de l'équivalence suivante :

$$\big(f \text{ est continue sur } A\big) \iff \big(f_1, \cdots, f_p \text{ sont continues sur } A\big).$$

PROPOSITION 12.11 :
Si $\lambda \in C^0(A, \mathbb{K})$ et $f \in C^0(A, F)$ alors $\lambda f \in C^0(A, F)$ (multiplication par un scalaire).
Si $\lambda \in C^0(A, \mathbb{K})$ et $\mu \in C^0(A, \mathbb{K})$ alors $\lambda\mu \in C^0(A, \mathbb{K})$ (produit de fonctions scalaires).
Par conséquent : $C^0(A, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.
Si $f \in C^0(A, \mathbb{K})$ vérifie $\forall x \in A,\ f(x) \neq 0$ alors $\frac{1}{f} \in C^0(A, \mathbb{K})$ (inverse d'une fonction scalaire).

THÉORÈME 12.12 :
Soit E un espace vectoriel normé, $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue sur E et $a \in \mathbb{R}$:
- **$f^{-1}(]a; +\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty; a[)$ sont des ouverts de E.**
- **$f^{-1}(\{a\})$, $f^{-1}([a; +\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty; a])$ sont des fermés de E.**

THÉORÈME ÉNORME 12.13 :
Si E est un espace vectoriel de dimension finie, $A \subset E$ et $f : A \to \mathbb{R}$ continue sur A et $K \subset A$ une partie compacte de E ($K \neq \emptyset$) : $\underset{K}{\mathrm{Min}}\, f$ et $\underset{K}{\mathrm{Max}}\, f$ existent ("f est bornée et atteint ses bornes").

REMARQUE 12.7 : Si K est une partie compacte de E (espace vectoriel de dimension finie) et $f : K \to \mathbb{R}_+^*$ est continue sur K alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in K,\ f(x) \geqslant \alpha$.

DÉFINITION 12.7 :
Soit $f : A \to F$, *où* A *est une partie d'un espace vectoriel normé* E, F *un espace normé et* $k \in \mathbb{R}_+$.
On dit que f *est* k**-lipschitzienne** *si* $\forall (x,y) \in A^2,\ ||f(x) - f(y)||_F \leqslant k||x - y||_E$.
On dit que f *est* **lipschitzienne** *s'il existe* $k \geqslant 0$ *tel que* f *soit* k*-lipschitzienne.*

PROPOSITION 12.14 :
Si f, g sont lipschitziennes sur A : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,\ (\alpha f + \beta g)$ est lipschitzienne sur A.
Si f est lipschitzienne sur A, g lipschitzienne sur B, $f(A) \subset B$: $g \circ f$ est lipschitzienne sur A.

THÉORÈME 12.15 :
Si f est lipschitzienne sur A alors f est continue sur A.

THÉORÈME ÉNORME 12.16 :
Soit $\left(E, ||\,.\,||_E\right)$ un espace normé de dimension finie, $\left(F, ||\,.\,||_F\right)$ un espace normé de dimension quelconque. Toute application linéaire de E vers F est lipschitzienne donc continue.

REMARQUE 12.8 : Avec les hypothèses du théorème ci-dessus, si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, *on a même mieux :* $|||f||| = \underset{||x||_E=1}{\mathrm{Max}} ||f(x)||_F$. *C'est-à-dire qu'il existe* $x \neq 0_E$ *dans* E *tel que* $||f(x)||_F = |||f||| \times ||x||_E$.

PROPOSITION 12.17 :
Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés de dimensions finies et $B : E \times F \to G$ bilinéaire :
- **Il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (x,y) \in E \times F,\ ||B(x,y)||_G \leqslant k \times ||x||_E \times ||y||_F$.**
- **B est continue sur $E \times F$.**

REMARQUE 12.9 : • *L'application* $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *définie par* $\varphi(A,B) = AB$ *est continue.*
- *L'application* $\theta : \mathcal{L}(E)^2 \to \mathcal{L}(E)$ *définie par* $\theta(u,v) = u \circ v$ *est continue si* E *de dimension finie.*
- *L'application* $\psi : K \times E \to E$ *telle que* $\psi(\lambda, x) = \lambda x$ *est continue si* E *est de dimension finie.*
- *Tout produit scalaire sur un espace euclidien est continu.*

DÉFINITION 12.8 :
Soit $p \geqslant 1$, F, $E_1, \cdots, E_p$ *des espaces vectoriels normés. Alors* $f : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ *est dite* p**-linéaire** *si pour tout* $k \in [\![1;p]\!]$ *et tout* $(p-1)$*-uplet* $(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \cdots \times E_p$, *l'application* $\varphi_k : E_k \to F$ *définie par* $f_k(x) = f(x_1, \cdots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \cdots, x_p)$ *est linéaire.*

THÉORÈME 12.18 :
Toute application multilinéaire en dimension finie est continue.

DÉFINITION 12.9 :
Soit $p \geqslant 1$, *on dit que* $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}$ *est une application polynomiale si elle est combinaison linéaire d'applications du type* $(x_1, \cdots, x_p) \mapsto x_1^{k_1} \cdots x_p^{k_p}$.

REMARQUE 12.10 : $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est polynomiale en ses coefficients, multilinéaire donc continue.*