

CHAPITRE 13

ENDOM. D'UN ESPACE EUCLIDIEN

PARTIE 13.1 : ISOMÉTRIES VECTORIELLES

THÉOREME 13.1 :

Soit u un endomorphisme de E euclidien, les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ (u est appelée **isométrie vectorielle** ou **automorphisme orthogonal**).
- (ii) u conserve le produit scalaire : $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
- (iii) u transforme une (ou toute) base orthonormale de E en une base orthonormale de E .

On note $O(E)$ (groupe orthogonal de E) l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E .

REMARQUE 13.1 : • Si $u \in O(E)$ et F stable par u , alors $u_F \in O(F)$.

- Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases orthonormées d'un espace euclidien E , $u \in \mathcal{L}(E)$ et P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Alors $P \in O_n(\mathbb{R})$ donc $P^{-1} = P^T$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P$.

PROPOSITION 13.2 :

Soit $u \in O(E)$, F un sous-espace vectoriel de E : $(F \text{ est stable par } u) \iff (F^\perp \text{ est stable par } u)$.

PROPOSITION 13.3 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $M^T M = I_n$ (M est dite **orthogonale**). (ii) $MM^T = I_n$. (iii) M inversible et $M^{-1} = M^T$.
- (iv) Les vecteurs lignes de M forment une base orthonormée de \mathbb{R}^n euclidien canonique.
- (v) Les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormée de \mathbb{R}^n eucl. canon..

On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (groupe orthogonal d'ordre n).

THÉOREME ÉNORME 13.4 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base orthonormée de E , alors : $u \in O(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$.

REMARQUE 13.2 : $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$. $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Si $u \in O(E)$, on a $\det(u) = \pm 1$. Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors $\det(M) = \pm 1$.

DÉFINITION 13.1 :

$SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det(u) = 1\}$ est appelé le **groupe spécial orthogonal** de E ou **groupe des rotations** de E . Les éléments de $SO(E)$ sont aussi appelées **isométries directes** (vectorielles).

Soit $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$ (ou $SO(n)$) le **groupe spécial orthogonal** d'ordre n .

REMARQUE 13.3 : • $SO(E)$ est un sous-groupe de $O(E)$. $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $A \in O(n)$.
 - Si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $|\lambda| = 1$. Ainsi, si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$, alors $\lambda = \pm 1$.
 - $A \in O(n) \setminus SO(n) \implies -1 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et, si n est impair, $A \in SO(n) \implies 1 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$.
 - A est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $A^2 = I_n$.

PROPOSITION 13.5 :

Si s est une symétrie de E : $(s \text{ est orthogonale}) \iff (s \text{ est une isométrie})$.

REMARQUE 13.4 : Dans un espace euclidien E , une orientation de E est le choix d'une base \mathcal{B}_0 de référence qu'on dira **directe**. Pour toute autre base \mathcal{B} de E :

- \mathcal{B} est dite **directe** si $\det(P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}}) > 0$.
- \mathcal{B} est dite **indirecte** si $\det(P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}}) < 0$.

DÉFINITION 13.2 :

Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension n , alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ ne dépend pas de la base orthonormale directe \mathcal{B} choisie. On note alors $[v_1, \dots, v_n] = \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n)$ (si \mathcal{B} b.o.n.d.) appelé le **produit mixte** de \mathcal{F} .

REMARQUE 13.5 : Soit $D = \text{Vect}(e_1)$ une droite et $P = \text{Vect}(e_2, e_3) = D^\perp$ dans E de dimension 3 :

- On définit une orientation dans P si “on oriente D par e_1 ”, en disant que $\mathcal{B}' = (e_2, e_3)$ est directe dans P ssi $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est directe dans E (**orientation induite dans P par celle de D**).
- On définit une orientation dans D si “on oriente P par $\mathcal{B}' = (e_2, e_3)$ ” directe, en disant que (e_1) est directe dans D ssi $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est directe dans E (**orientation induite dans D par celle de P**).

DÉFINITION 13.3 :

Soit a et b deux vecteurs de E de dimension 3, on appelle **produit vectoriel** de a et b , qu'on note $a \wedge b$, l'unique vecteur de E qui vérifie $\forall x \in E, [a, b, x] = [b, x, a] = [x, a, b] = (a \wedge b | x) = (x | a \wedge b)$.

PROPOSITION 13.6 :

Le produit vectoriel est bilinéaire, antisymétrique, alternée. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ b.o.n.d de E :

- (i) $\forall (a, a') \in E^2, \forall b \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (\lambda a + \mu a') \wedge b = \lambda a \wedge b + \mu a' \wedge b$.
- (ii) $\forall a \in E, \forall (b, b') \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, a \wedge (\lambda b + \mu b') = \lambda a \wedge b + \mu a \wedge b'$.
- (iii) $\forall (a, b) \in E^2, a \wedge b = -b \wedge a$. (iv) $a \wedge b = 0_E \iff (a, b)$ liée. (v) $a \wedge b \in (\text{Vect}(a, b))^\perp$.
- (vi) Soit $a = xe_1 + ye_2 + ze_3, b = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3, a \wedge b$ dans la base \mathcal{B} est donné par :

$$a \wedge b = (yz' - zy')e_1 + (zx' - xz')e_2 + (xy' - yx')e_3 = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} e_3.$$
- (vii) On a aussi les produits vectoriels : $e_1 \wedge e_2 = e_3, e_2 \wedge e_3 = e_1$ et $e_3 \wedge e_1 = e_2$.

PROPOSITION 13.7 :

Soit a, b et c trois vecteurs de E , alors on a les formules :

- (i) $\|a \wedge b\| = \|a\| \|b\| |\sin(\theta)|$ (norme du produit vectoriel).
- (ii) $a \wedge (b \wedge c) = (a|c)b - (a|b)c$ et $(a \wedge b) \wedge c = (a|c)b - (b|c)a$ (double produit vectoriel).
- (iii) $(a|b)^2 + \|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2$ (identité de LAGRANGE).

THÉOREME 13.8 :

Si $A \in O_2(\mathbb{R}), \det(A) = 1 \implies A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$; sinon, $A = S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.
 $SO_2(\mathbb{R})$ est un groupe abélien (même isomorphe à \mathbb{U}).

REMARQUE 13.6 : $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, S_\theta^2 = I_2$ et $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$ donc $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$. De plus, $S_\theta S_{\theta'} = R_{\theta-\theta'}$.

PROPOSITION 13.9 :

Toute rotation u (c'est-à-dire $u \in SO(E)$) de E de dimension 2 a la même matrice dans toute base orthonormée directe : R_θ avec $\theta \in \mathbb{R}$ défini modulo 2π qu'on choisit souvent dans $[0; 2\pi[$ (ou dans $] -\pi; \pi]$). Le réel θ ainsi défini est appelé l'angle de la rotation u .
 La composée de la rotation d'angle θ et de la rotation d'angle θ' est la rotation d'angle $\theta + \theta'$.

PROPOSITION 13.10 :

Les isométries indirectes u de E de dimension 2 sont les réflexions. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E , alors si $S_\theta = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ où u est une réflexion, alors elle se fait par rapport à la droite engendrée par le vecteur unitaire $a = \cos(\theta/2)e_1 + \sin(\theta/2)e_2$.

THÉORÈME ÉNORME 13.11 :**Classification des isométries d'un plan euclidien orienté E ($E_1 = E_1(A)$ et $E_{-1} = E_{-1}(A)$) :**

isométrie	$\dim(E_1)$	$\dim(E_{-1})$	nb de refl.	$\det(A)$	$\in \text{SO}(E)$	$\text{tr}(A)$
identité : rotation d'angle 0	2	0	0	1	OUI	2
réflexion	1	1	1	-1	NON	0
(vraie) rotation d'angle $\pm\theta \in]0; \pi[$	0	0	2	1	OUI	$2\cos\theta$
symétrie centrale (rotation d'angle π)	0	2	2	1	OUI	-2

THÉORÈME ÉNORME 13.12 :**Soit $u \in \text{SO}(E)$ une isométrie directe (une rotation de E) de E de dimension 3, on a deux cas :**

- (i) Si $\dim(E_1(u)) = 3$ alors $u = \text{id}_E$.
(ii) Si $\dim(E_1(u)) = 1$ alors $D = E_1(u) = \text{Vect}(a)$ avec a unitaire, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans

$$\text{toute base orthonormée directe } \mathcal{B} = (a, b, c) \text{ de } E : \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

La droite D est l'axe de la rotation u (orienté par a) et θ est l'angle de la rotation u .**PROPOSITION 13.13 :****Soit la rotation u d'axe D orienté par a unitaire et d'angle θ , si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ avec \mathcal{B} b.o.n :**

- $\cos\theta = \frac{\text{tr}(A) - 1}{2}$ puisque $\text{tr}(A) = \text{tr}(u) = 1 + 2\cos\theta$.
- $\sin\theta$ est du même signe que $[x, u(x), a] = [a, x, u(x)]$ si $x \notin D$.

REMARQUE 13.7 : (HP) Soit la rotation u d'axe D orienté par a unitaire et d'angle θ :

$$\forall x \in E, u(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)(a \wedge x) + (1 - \cos\theta)(a|x)a.$$

*En particulier, si $x \in D^\perp$, la formule se réduit à $u(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)(a \wedge x)$ ce qui nous donne les relations : $(x|u(x)) = (\cos\theta)||x||^2$ et $x \wedge u(x) = (\sin\theta)||x||^2 a$.***PROPOSITION 13.14 :****Si \mathcal{B} est orthonormée, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \text{O}_3(\mathbb{R})$ et $A^T = A$: u est une symétrie orthogonale :**

- (i) $\text{tr}(A) = -3 \iff \dim(E_1(u)) = 0 \iff \dim(E_{-1}(u)) = 3 \iff u = -\text{id}_E$ (symétrie centrale).
(ii) $\text{tr}(A) = -1 \iff \dim(E_1(u)) = 1 \iff \dim(E_{-1}(u)) = 2 \iff u$ est un demi-tour.
(iii) $\text{tr}(A) = 1 \iff \dim(E_1(u)) = 2 \iff \dim(E_{-1}(u)) = 1 \iff u$ est une réflexion de plan $E_1(u)$.
(iv) $\text{tr}(A) = 3 \iff \dim(E_1(u)) = 3 \iff \dim(E_{-1}(u)) = 0 \iff u = \text{id}_E$.

THÉORÈME ÉNORME 13.15 :**Classification des isométries d'un espace euclidien orienté E de dimension 3 (en adoptant à nouveau les abréviations $E_1 = E_1(A)$ et $E_{-1} = E_{-1}(A)$):**

isométrie	$\dim(E_1)$	$\dim(E_{-1})$	nb de refl.	$\det(A)$	$\in \text{SO}(3)$	$\text{tr}(A)$
identité	3	0	0	1	OUI	3
réflexion	2	1	1	-1	NON	1
rotation d'angle $\pm\theta \in]0; \pi[$	1	0	2	1	OUI	$1 + 2\cos\theta \in]-1; 3[$
demi-tour, retournement	1	2	2	1	OUI	-1
symétrie centrale	0	3	3	-1	NON	-3
rotation-miroir	0	1	3	-1	NON	$-1 + 2\cos\theta \in]-3; 1[$

REMARQUE HP 13.8 : Dans un espace préhilbertien réel E , on se donne une famille finie de p vecteurs de E notée $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$. On appelle **matrice de GRAM** de \mathcal{F} la matrice $G = ((v_i | v_j))_{1 \leq i, j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

- On a l'équivalence : $(\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p) \text{ est libre}) \iff G \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$.
- Si \mathcal{F} est libre, soit $v \in E$, on note $d = d(v, F)$ la distance de v à F . Alors en notant $G(v_1, \dots, v_p)$ le déterminant (dit de GRAM) de la matrice de $G : d^2 = \frac{G(v_1, \dots, v_p, v)}{G(v_1, \dots, v_p)}$.

PARTIE 13.2 : ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS ET MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES

THÉORÈME ÉNORME 13.16 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\forall (x, y) \in E^2, (u(x) | y) = (x | u(y))$ (u est dit **autoadjoint** et on note $u \in S(E)$).
- (ii) Il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.
- (iii) Dans toute base orthonormée \mathcal{B} de E , on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$.

REMARQUE 13.9 : Soit λ_1 et λ_2 deux valeurs propres de u symétrique, alors $E_{\lambda_1}(u) \perp E_{\lambda_2}(u)$.

PROPOSITION 13.17 :

Soit p un projecteur de E : (p est un projecteur orthogonal) \iff (p est autoadjoint).

Soit s une symétrie de E : (s est une symétrie orthogonale) \iff (s est autoadjoint).

PROPOSITION 13.18 :

Si $u \in S(E)$ et si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors F^\perp est aussi stable par u .

THÉORÈME ÉNORME 13.19 :

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E , alors χ_u est scindé sur \mathbb{R} et il existe une bon de E formée de vecteurs propres de u . Autrement dit, $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ (sevs orthogonaux 2 à 2).

Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^T A P$ soit diagonale (A et D orthosemblables).

EXEMPLE FONDAMENTAL 13.1 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$. A est symétrique et non DZ.

DÉFINITION 13.4 :

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que :

- u est un **endomorphisme autoadjoint positif** si $\forall x \in E, (u(x) | x) \geq 0$ ($u \in S^+(E)$).
- u est un **endom. autoadjoint défini positif** si $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, (u(x) | x) > 0$ ($u \in S^{++}(E)$).

REMARQUE FONDAMENTALE 13.10 : Si u est un endomorphisme de E , on a l'équivalence :

$$u \in S^{++}(E) \iff (\varphi : (x, y) \mapsto (u(x) | y) \text{ est un produit scalaire sur } E).$$

THÉORÈME 13.20 :

Soit u un endom. autoadjoint de E , $u \in S^+(E) \iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$ et $u \in S^{++}(E) \iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique alors :

$$\begin{aligned} (\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0) &\iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+ \iff (\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = B^T B) & (A \in S_n^+(\mathbb{R})). \\ (\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0 \implies X^T A X > 0) &\iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^* \iff (\exists B \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), A = B^T B) & (A \in S_n^{++}(\mathbb{R})). \end{aligned}$$

REMARQUE 13.11 : • Si $u \in S^+(E)$ (resp. $u \in S^{++}(E)$), $\text{tr}(u) \geq 0$ et $\det(u) \geq 0$ (resp. $\text{tr}(u), \det(u) > 0$).

- $\forall A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \exists (O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}), A = OS$ (décomposition polaire).