

# CHAPITRE 13

## ENDOM. D'UN ESPACE EUCLIDIEN

### PARTIE 13.1 : ISOMÉTRIES VECTORIELLES

#### THÉORÈME 13.1 :

Soit  $u$  un endomorphisme de  $E$  euclidien, les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$  ( $u$  est appelée isométrie vectorielle ou automorphisme orthogonal).
- (ii)  $u$  conserve le produit scalaire :  $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x|y)$ .
- (iii)  $u$  transforme une (ou toute) base orthonormale de  $E$  en une base orthonormale de  $E$ .

On note  $O(E)$  (groupe orthogonal de  $E$ ) l'ensemble des automorphismes orthogonaux de  $E$ .

REMARQUE 13.1 : • Si  $u \in O(E)$  et  $F$  stable par  $u$ , alors  $u_F \in O(F)$ .

- Soit  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases orthonormées d'un espace euclidien  $E$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ . Alors  $P \in O_n(\mathbb{R})$  donc  $P^{-1} = P^T$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P$ .

#### PROPOSITION 13.2 :

Soit  $u \in O(E)$ ,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  :  $(F \text{ est stable par } u) \iff (F^\perp \text{ est stable par } u)$ .

#### PROPOSITION 13.3 :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $M^T M = I_n$  ( $M$  est dite orthogonale).
- (ii)  $M M^T = I_n$ .
- (iii)  $M$  inversible et  $M^{-1} = M^T$ .
- (iv) Les vecteurs lignes de  $M$  forment une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  euclidien canonique.
- (v) Les vecteurs colonnes de  $M$  forment une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  eucl. canon..

On note  $O_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (groupe orthogonal d'ordre  $n$ ).

#### THÉORÈME ÉNORME 13.4 :

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$ , alors :  $u \in O(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$ .

REMARQUE 13.2 :  $O(E)$  est un sous-groupe de  $GL(E)$ .  $O_n(\mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$ .

Si  $u \in O(E)$ , on a  $\det(u) = \pm 1$ . Si  $M \in O_n(\mathbb{R})$  alors  $\det(M) = \pm 1$ .

#### DÉFINITION 13.1 :

$SO(E) = \{u \in O(E) \mid \det(u) = 1\}$  est appelé le **groupe spécial orthogonal** de  $E$  ou **groupe des rotations** de  $E$ . Les éléments de  $SO(E)$  sont aussi appelées **isométries directes** (vectorielles).

Soit  $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\}$  (ou  $SO(n)$ ) le **groupe spécial orthogonal** d'ordre  $n$ .

REMARQUE 13.3 : •  $SO(E)$  est un sous-groupe de  $O(E)$ .  $SO_n(\mathbb{R})$  est un sous-groupe de  $O_n(\mathbb{R})$ .

- Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1 et  $A \in O(n)$ .

• Si  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ , alors  $|\lambda| = 1$ . Ainsi, si  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ , alors  $\lambda = \pm 1$ .

•  $A \in O(n) \setminus SO(n) \implies -1 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$  et, si  $n$  est impair,  $A \in SO(n) \implies 1 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ .

•  $A$  est donc diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  si et seulement si  $A^2 = I_n$ .

#### PROPOSITION 13.5 :

Si  $s$  est une symétrie de  $E$  :  $(s \text{ est orthogonale}) \iff (s \text{ est une isométrie})$ .

REMARQUE 13.4 : Dans un espace euclidien  $E$ , une orientation de  $E$  est le choix d'une base  $\mathcal{B}_0$  de référence qu'on dira directe. Pour toute autre base  $\mathcal{B}$  de  $E$  :

- $\mathcal{B}$  est dite directe si  $\det(\text{P}_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}}) > 0$ .
- $\mathcal{B}$  est dite indirecte si  $\det(\text{P}_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}}) < 0$ .

**DÉFINITION 13.2 :**

Soit  $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_n)$  une famille de  $n$  vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension  $n$ , alors  $\det_B(\mathcal{F})$  ne dépend pas de la base orthonormale directe  $B$  choisie. On note alors  $[v_1, \dots, v_n] = \det_B(v_1, \dots, v_n)$  (si  $B$  b.o.n.d.) appelé le **produit mixte** de  $\mathcal{F}$ .

REMARQUE 13.5 : Soit  $D = \text{Vect}(e_1)$  une droite et  $P = \text{Vect}(e_2, e_3) = D^\perp$  dans  $E$  de dimension 3 :

- On définit une orientation dans  $P$  si “on oriente  $D$  par  $e_1$ ”, en disant que  $B' = (e_2, e_3)$  est directe dans  $P$  ssi  $B = (e_1, e_2, e_3)$  est directe dans  $E$  (**orientation induite dans  $P$  par celle de  $D$** ).
- On définit une orientation dans  $D$  si “on oriente  $P$  par  $B' = (e_2, e_3)$ ” directe, en disant que  $(e_1)$  est directe dans  $D$  ssi  $B = (e_1, e_2, e_3)$  est directe dans  $E$  (**orientation induite dans  $D$  par celle de  $E$** ).

**DÉFINITION 13.3 :**

Soit  $a$  et  $b$  deux vecteurs de  $E$  de dimension 3, on appelle **produit vectoriel** de  $a$  et  $b$ , qu'on note  $a \wedge b$ , l'unique vecteur de  $E$  qui vérifie  $\forall x \in E$ ,  $[a, b, x] = [b, x, a] = [x, a, b] = (a \wedge b|x) = (x|a \wedge b)$ .

**PROPOSITION 13.6 :**

Le **produit vectoriel est bilinéaire, antisymétrique, alternée**. Soit  $B = (e_1, e_2, e_3)$  b.o.n.d de  $E$  :

- (i)  $\forall (a, a') \in E^2, \forall b \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (\lambda a + \mu a') \wedge b = \lambda a \wedge b + \mu a' \wedge b$ .
- (ii)  $\forall a \in E, \forall (b, b') \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, a \wedge (\lambda b + \mu b') = \lambda a \wedge b + \mu a \wedge b'$ .
- (iii)  $\forall (a, b) \in E^2, a \wedge b = -b \wedge a$ .
- (iv)  $a \wedge b = 0_E \iff (a, b)$  liée.
- (v)  $a \wedge b \in (\text{Vect}(a, b))^\perp$ .
- (vi) Soit  $a = xe_1 + ye_2 + ze_3, b = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3$ ,  $a \wedge b$  dans la base  $B$  est donné par :  

$$a \wedge b = (yz' - zy')e_1 + (zx' - xz')e_2 + (xy' - yx')e_3 = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} e_3.$$
- (vii) On a aussi les produits vectoriels :  $e_1 \wedge e_2 = e_3, e_2 \wedge e_3 = e_1$  et  $e_3 \wedge e_1 = e_2$ .

**PROPOSITION 13.7 :**

Soit  $a, b$  et  $c$  trois vecteurs de  $E$ , alors on a les formules :

- (i)  $\|a \wedge b\| = \|a\| \|b\| |\sin(\theta)|$  (**norme du produit vectoriel**).
- (ii)  $a \wedge (b \wedge c) = (a|c)b - (a|b)c$  et  $(a \wedge b) \wedge c = (a|c)b - (b|c)a$  (**double produit vectoriel**).
- (iii)  $(a|b)^2 + \|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2$  (**identité de LAGRANGE**).

**THÉORÈME 13.8 :**

Si  $A \in O_2(\mathbb{R})$ ,  $\det(A) = 1 \implies A = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$  ; sinon,  $A = S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ .  
 $SO_2(\mathbb{R})$  est un groupe abélien (même isomorphe à  $\mathbb{U}$ ).

REMARQUE 13.6 :  $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, S_\theta^2 = I_2$  et  $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$  donc  $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$ . De plus,  $S_\theta S_{\theta'} = R_{-\theta-\theta'}$ .

**PROPOSITION 13.9 :**

Toute rotation  $u$  (c'est-à-dire  $u \in SO(E)$ ) de  $E$  de dimension 2 a la même matrice dans toute base orthonormée directe :  $R_\theta$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$  défini modulo  $2\pi$  qu'on choisit souvent dans  $[0; 2\pi[$  (ou dans  $] -\pi; \pi]$ ). Le réel  $\theta$  ainsi défini est appelé l'angle de la rotation  $u$ .

La composée de la rotation d'angle  $\theta$  et de la rotation d'angle  $\theta'$  est la rotation d'angle  $\theta + \theta'$ .

**PROPOSITION 13.10 :**

Les isométries indirectes  $u$  de  $E$  de dimension 2 sont les réflexions. Soit  $B = (e_1, e_2)$  une base orthonormée de  $E$ , alors si  $S_\theta = \text{Mat}_B(u)$  où  $u$  est une réflexion, alors elle se fait par rapport à la droite engendrée par le vecteur unitaire  $a = \cos(\theta/2)e_1 + \sin(\theta/2)e_2$ .

**THÉORÈME ÉNORME 13.11 :****Classification des isométries d'un plan euclidien orienté  $E$  ( $E_1 = E_1(A)$  et  $E_{-1} = E_{-1}(A)$ ) :**

isométrie	$\dim(E_1)$	$\dim(E_{-1})$	nb de réfl.	$\det(A)$	$\in SO(E)$	$\text{tr}(A)$
identité : rotation d'angle 0	2	0	0	1	OUI	2
réflexion	1	1	1	-1	NON	0
(vraie) rotation d'angle $\pm\theta \in ]0; \pi[$	0	0	2	1	OUI	$2 \cos \theta$
symétrie centrale (rotation d'angle $\pi$ )	0	2	2	1	OUI	-2

**THÉORÈME ÉNORME 13.12 :**Soit  $u \in SO(E)$  une isométrie directe (une rotation de  $E$ ) de  $E$  de dimension 3, on a deux cas :

- (i) Si  $\dim(E_1(u)) = 3$  alors  $u = \text{id}_E$ .
- (ii) Si  $\dim(E_1(u)) = 1$  alors  $D = E_1(u) = \text{Vect}(a)$  avec  $a$  unitaire, il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que dans toute base orthonormée directe  $\mathcal{B} = (a, b, c)$  de  $E$  :  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

La droite  $D$  est l'axe de la rotation  $u$  (orienté par  $a$ ) et  $\theta$  est l'angle de la rotation  $u$ .**PROPOSITION 13.13 :**Soit la rotation  $u$  d'axe  $D$  orienté par  $a$  unitaire et d'angle  $\theta$ , si  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  avec  $\mathcal{B}$  b.o.n :

- $\cos \theta = \frac{\text{tr}(A) - 1}{2}$  puisque  $\text{tr}(A) = \text{tr}(u) = 1 + 2 \cos \theta$ .
- $\sin \theta$  est du même signe que  $[x, u(x), a] = [a, x, u(x)]$  si  $x \notin D$ .

*REMARQUE 13.7 : (HP) Soit la rotation  $u$  d'axe  $D$  orienté par  $a$  unitaire et d'angle  $\theta$  :*

$$\forall x \in E, u(x) = (\cos \theta)x + (\sin \theta)(a \wedge x) + (1 - \cos \theta)(a|x)a.$$

En particulier, si  $x \in D^\perp$ , la formule se réduit à  $u(x) = (\cos \theta)x + (\sin \theta)(a \wedge x)$  ce qui nous donne les relations :  $(x|u(x)) = (\cos \theta)||x||^2$  et  $x \wedge u(x) = (\sin \theta)||x||^2a$ .**PROPOSITION 13.14 :**Si  $\mathcal{B}$  est orthonormée,  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_3(\mathbb{R})$  et  $A^T = A$  :  $u$  est une symétrie orthogonale :

- (i)  $\text{tr}(A) = -3 \iff \dim(E_1(u)) = 0 \iff \dim(E_{-1}(u)) = 3 \iff u = -\text{id}_E$  (symétrie centrale).
- (ii)  $\text{tr}(A) = -1 \iff \dim(E_1(u)) = 1 \iff \dim(E_{-1}(u)) = 2 \iff u$  est un demi-tour.
- (iii)  $\text{tr}(A) = 1 \iff \dim(E_1(u)) = 2 \iff \dim(E_{-1}(u)) = 1 \iff u$  est une réflexion de plan  $E_1(u)$ .
- (iv)  $\text{tr}(A) = 3 \iff \dim(E_1(u)) = 3 \iff \dim(E_{-1}(u)) = 0 \iff u = \text{id}_E$ .

**THÉORÈME ÉNORME 13.15 :**Classification des isométries d'un espace euclidien orienté  $E$  de dimension 3 (en adoptant à nouveau les abréviations  $E_1 = E_1(A)$  et  $E_{-1} = E_{-1}(A)$ ) :

isométrie	$\dim(E_1)$	$\dim(E_{-1})$	nb de réfl.	$\det(A)$	$\in SO(3)$	$\text{tr}(A)$
identité	3	0	0	1	OUI	3
réflexion	2	1	1	-1	NON	1
rotation d'angle $\pm\theta \in ]0; \pi[$	1	0	2	1	OUI	$1 + 2 \cos \theta \in ]-1; 3[$
demi-tour, retournement	1	2	2	1	OUI	-1
symétrie centrale	0	3	3	-1	NON	-3
rotation-miroir	0	1	3	-1	NON	$-1 + 2 \cos \theta \in ]-3; 1[$

REMARQUE HP 13.8 : Dans un espace préhilbertien réel  $E$ , on se donne une famille finie de  $p$  vecteurs de  $E$  notée  $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ . On appelle **matrice de GRAM** de  $\mathcal{F}$  la matrice  $G = ((v_i|v_j))_{1 \leq i, j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

- On a l'équivalence :  $(\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p) \text{ est libre}) \iff G \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$ .
- Si  $\mathcal{F}$  est libre, soit  $v \in E$ , on note  $d = d(v, \mathcal{F})$  la distance de  $v$  à  $\mathcal{F}$ . Alors en notant  $G(v_1, \dots, v_p)$  le déterminant (dit de GRAM) de la matrice de  $G$  :  $d^2 = \frac{G(v_1, \dots, v_p, v)}{G(v_1, \dots, v_p)}$ .

## PARTIE 13.2 : ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS ET MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES

### THÉORÈME ÉNORME 13.16 :

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u(y))$  ( $u$  est dit **autoadjoint** et on note  $u \in S(E)$ ).
- (ii) Il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est symétrique.
- (iii) Dans toute base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$ , on a  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$ .

REMARQUE 13.9 : Soit  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux valeurs propres de  $u$  symétrique, alors  $E_{\lambda_1}(u) \perp E_{\lambda_2}(u)$ .

### PROPOSITION 13.17 :

Soit  $p$  un projecteur de  $E$  :  $(p \text{ est un projecteur orthogonal}) \iff (p \text{ est autoadjoint})$ .

Soit  $s$  une symétrie de  $E$  :  $(s \text{ est une symétrie orthogonale}) \iff (s \text{ est autoadjoint})$ .

### PROPOSITION 13.18 :

Si  $u \in S(E)$  et si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est aussi stable par  $u$ .

### THÉORÈME ÉNORME 13.19 :

Soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ , alors  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  et il existe une bon de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ . Autrement dit,  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$  (sevs orthogonaux 2 à 2).

Si  $A \in S_n(\mathbb{R})$  alors il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $D = P^T A P$  soit diagonale ( $A$  et  $D$  orthosemblables).

EXEMPLE FONDAMENTAL 13.1 : Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ .  $A$  est symétrique et non DZ.

### DÉFINITION 13.4 :

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on dit que :

- $u$  est un **endomorphisme autoadjoint positif** si  $\forall x \in E, (u(x)|x) \geq 0$  ( $u \in S^+(E)$ ).
- $u$  est un **endom. autoadjoint défini positif** si  $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, (u(x)|x) > 0$  ( $u \in S^{++}(E)$ ).

REMARQUE FONDAMENTALE 13.10 : Si  $u$  est un endomorphisme de  $E$ , on a l'équivalence :

$$u \in S^{++}(E) \iff (\varphi : (x, y) \mapsto (u(x)|y) \text{ est un produit scalaire sur } E).$$

### THÉORÈME 13.20 :

Soit  $u$  un **endom. autoadjoint de  $E$** ,  $u \in S^+(E) \iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+$  et  $u \in S^{++}(E) \iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique alors :

$$(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A X \geq 0) \iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+ \iff (\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = B^T B) \quad (A \in S_n^+(\mathbb{R})).$$

$$(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0 \implies X^T A X > 0) \iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^* \iff (\exists B \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), A = B^T B) \quad (A \in S_n^{++}(\mathbb{R})).$$

REMARQUE 13.11 : • Si  $u \in S^+(E)$  (resp.  $u \in S^{++}(E)$ ),  $\text{tr}(u) \geq 0$  et  $\det(u) \geq 0$  (resp.  $\text{tr}(u), \det(u) > 0$ ).

- $\forall A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \exists!(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}), A = OS$  (décomposition polaire).