CHAPITRE 15
FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

PARTIE 15.1 : FONCTIONS DE CLASSE C^1 ET C^2

REMARQUE 15.1 : Soit $p \in \mathbb{N}^* \setminus \{2\}$, Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *et* $a \in \Omega$ *avec* $r > 0$ *tel que* $B(a,r) \subset \Omega$. *Pour tout* $k \in [\![1;p]\!]$, *on définit la fonction* $\varphi_k :]-r;r[\to \mathbb{R}$ *par* $\forall t \in]-r;r[,\ \varphi_k(t) = f(a+te_k)$.

DÉFINITION 15.1 :
Avec ces notations, si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *et si* $v \neq 0 \in \mathbb{R}^p$, *on dit que* f **admet en** a **une dérivée selon le vecteur** v *si la fonction* $\varphi_{a,v} :]-\alpha;\alpha[\to \mathbb{R}$ *définie par* $\varphi_{a,v}(t) = f(a+tv)$ *admet une dérivée en* 0 *avec* $\alpha = \dfrac{r}{||v||}$.
Dans ce cas, on note $D_v f(a)$ *cette dérivée, qui vaut donc* $D_v f(a) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t}$.

DÉFINITION 15.2 :
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *et* $a \in \Omega$, *avec les notations précédentes, on dit que* f **admet une dérivée partielle d'ordre** 1 **par rapport à la** k**-ième variable** *si* φ_k *est dérivable en* 0 *et on définit alors cette dérivée partielle par, notée* $\partial_k f(a)$ *ou* $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ *par* $\partial_k f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \varphi_k'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+te_k)-f(a)}{t}$.

REMARQUE 15.2 : Si la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est définie par* $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ *et* $a = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$, *on note plutôt* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a_1+t,a_2)-f(a_1,a_2)}{t}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a_1,a_2+t)-f(a_1,a_2)}{t}$.

DÉFINITION 15.3 :
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, *on dit que* f **est de classe** C^1 **sur** Ω **si ses dérivées partielles d'ordre** 1 **existent et sont continues sur** Ω. *On note* $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions de classe* C^1 *sur* Ω.

DÉFINITION 15.4 :
$f : \Omega \to \mathbb{R}$ *admet en* $a \in \Omega$ *un* **développement limité d'ordre** 1 *s'il existe* $a_1, \cdots, a_p$ *tels que :*
$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + a_1h_1 + \cdots + a_ph_p + o\big(||h||\big) \text{ si } h = (h_1, \cdots, h_p)$$
ce qui signifie : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall h \in \mathbb{R}^p,\ ||h|| \leqslant \alpha \Longrightarrow \big|f(a+h) - f(a) - a_1h_1 - \cdots - a_ph_p\big| \leqslant \varepsilon||h||$.

THÉORÈME ÉNORME 15.1 :
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ **de classe** C^1**, alors** f **admet en tout point** $a \in \Omega$ **un développement limité :**
$$f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + h_p \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) + o\big(||h||\big) \text{ si } h = (h_1, \cdots, h_p).$$
Une fonction de classe C^1 **sur** Ω **est continue sur** Ω**.**

THÉORÈME 15.2 :
Soit $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ **des fonctions de classe** C^1 **sur** Ω **telles que** g **ne s'annule pas sur** Ω**. Soit** $\varphi : I \to \mathbb{R}$ **de classe** C^1 **sur** I **intervalle ouvert avec** $f(\Omega) \subset I$**, alors** $f+g$, λf, fg, f/g **et** $\varphi \circ f$ **sont aussi de classe** C^1 **sur** Ω **et on a les relations :** $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f}{\partial x_k} + \dfrac{\partial g}{\partial x_k}$, $\dfrac{\partial(\lambda f)}{\partial x_k} = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ **et** $\dfrac{\partial(fg)}{\partial x_k} = g \times \dfrac{\partial f}{\partial x_k} + f \times \dfrac{\partial g}{\partial x_k}$, $\dfrac{\partial(f/g)}{\partial x_k} = \dfrac{1}{g^2}\Big(g \times \dfrac{\partial f}{\partial x_k} - f \times \dfrac{\partial g}{\partial x_k}\Big)$, $\dfrac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \times \big(\varphi' \circ f\big)$**.**

DÉFINITION 15.5 :
Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *est de classe* C^1 *et* $a \in \Omega$, *on définit la* **différentielle de** f **en** a, *c'est la forme linéaire* $df(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *vérifiant* $\forall h = (h_1, \cdots, h_p) \in \mathbb{R}^p,\ df(a)(h) = \sum_{k=1}^{p} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ *aussi noté* $df(a).h$.

THÉORÈME ÉNORME 15.3 :
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ **de classe** C^1 **et** $x = (x_1, \cdots, x_p) : I \to \Omega$ **de classe** C^1 **sur un intervalle** I. **Alors la fonction** $g : I \to \mathbb{R}$ **définie par** $g(t) = f\big(x_1(t), \cdots, x_p(t)\big)$ **est de classe** C^1 **sur** I **et :**

$$\forall t \in I,\ g'(t) = x_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(x(t)\big) + \cdots + x_p'(t)\frac{\partial f}{\partial x_p}\big(x(t)\big) \text{ (c'est la règle de la chaîne)} .$$

THÉORÈME ÉNORME 15.4 :
Soit Ω **et** Γ **des ouverts de** $\mathbb{R}^2$ **et** $x, y : \Omega \to \mathbb{R}$ **de classe** C^1, $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ **de classe** C^1, **le tout vérifiant** $\forall (u,v) \in \Omega,\ \big(x(u,v), y(u,v)\big) \in \Gamma$. **Alors** $g : \Omega \to \mathbb{R}$ **définie par** $g(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ **est de classe** C^1 **sur** Ω **avec les relations :**

$$\forall (u,v) \in \Omega,\ \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) & = & \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v),y(u,v)\big) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) & = & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v),y(u,v)\big) \end{cases} .$$

REMARQUE 15.3 : Comme on écrit (même en mathématique) rarement les points en lesquels on calcule les dérivées partielles, ces deux formules s'abrègent en : $\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u} & = & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial v} & = & \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$.

PROPOSITION 15.5 :
Soit C **un ouvert convexe et** $f : C \to \mathbb{R}$ **de classe** C^1, **alors** f **constante** $\iff \Big(\forall k \in [\![1;p]\!],\ \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0\Big)$.

DÉFINITION 15.6 :
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *de classe* C^1, *pour tout* $a \in \Omega$ *on définit le* **gradient de** f **en** a, *noté* $\nabla f(a)$ *ou* $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a)$, *par la relation* $\forall h \in \mathbb{R}^p,\ \forall a \in \Omega,\ df(a).h = df(a)(h) = \big(\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a)|h\big) = \big(\nabla f(a)|h\big)$.

PROPOSITION 15.6 :
Avec ces notations, $\forall a \in \Omega,\ \nabla f(a) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) e_k$.

REMARQUE 15.4 : La valeur de $df(a).v$ *est la "vitesse de variation de* f *à partir de* a *dans la direction du vecteur* v*", alors* $df_a.v = D_v f(a) = \big(\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a)\big|v\big)$ *est maximal quand* v *et* $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a)$ *sont "positivement" colinéaires ce qui montre que la direction de* $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a)$ *est la "ligne de plus grande pente".*

PROPOSITION 15.7 :
Soit $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ **sont de classe** C^1 **sur** Ω, g **ne s'annulant pas sur** Ω, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ **de classe** C^1 **sur** I **intervalle ouvert avec** $f(\Omega) \subset I$ **et** $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, **alors** $\overrightarrow{\text{grad}}\,(\lambda f + \mu g) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, f + \mu \overrightarrow{\text{grad}}\, g$, $\overrightarrow{\text{grad}}\,(fg) = f \times \overrightarrow{\text{grad}}\, g + g \times \overrightarrow{\text{grad}}\, f$, $\overrightarrow{\text{grad}}\,\big(f/g\big) = \frac{1}{g^2}\big(g \times \overrightarrow{\text{grad}}\, f - f \times \overrightarrow{\text{grad}}\, g\big)$ **et** $\overrightarrow{\text{grad}}\,(\varphi \circ f) = \big(\varphi' \circ f\big)\overrightarrow{\text{grad}}\, f$.

DÉFINITION 15.7 :
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \Omega$ *et* $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, *on dit que* f *admet en* a **une dérivée partielle d'ordre** 2 **par rapport à** x_j **puis** x_i *si* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ *existe sur un voisinage de* a *et* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ *admet une dérivée partielle d'ordre* 1 *par rapport à* x_i *en* a, *on note alors* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ *cette valeur. Si* $i = j$, *on note* $\frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(a)$ *à la place de* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a)$.

DÉFINITION 15.8 :
On dit que f est de classe C^2 sur Ω si toutes les dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues sur Ω. On note $C^2(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 de Ω dans $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 15.8 :
Une fonction de classe C^2 est de classe C^1. Soit $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^2 sur Ω telles que g ne s'annule pas sur Ω. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur I intervalle ouvert avec $f(\Omega) \subset I$, alors $f+g$, λf, f/g et $\varphi \circ f$ sont de classe C^2 sur Ω et $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $\dfrac{\partial^2(f+g)}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$, $\dfrac{\partial^2(\lambda f)}{\partial x_i \partial x_j} = \lambda \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ mais aussi $\dfrac{\partial^2(fg)}{\partial x_i \partial x_j} = \Big(\dfrac{\partial g}{\partial x_i}\Big)\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\Big) + \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\Big)\Big(\dfrac{\partial g}{\partial x_j}\Big) + g\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + f\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$.

<u>REMARQUE 15.5</u> : $C^2(\Omega, \mathbb{R})$ est donc une algèbre qui contient les fonctions polynomiales et les fonctions rationnelles (là où elles sont définies).

THÉORÈME ÉNORME 15.9 :
Si $f : \Omega \to F$ de classe C^2 sur un ouvert Ω alors $\forall (i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ (SCHWARZ).

<u>REMARQUE FONDAMENTALE 15.6</u> : $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $\varphi(r,\theta) = \big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)$ désigne le passage en polaires (non injectif) ou, si on le veut bijectif, $\varphi : U = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi;\pi[\to P$ avec $P = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ et toujours $\varphi(r,\theta) = \big(r\cos\theta, r\sin\theta\big) = (x,y)$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = 2\,\mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\Big)$.

- *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on pose $g = f \circ \varphi$ c'est-à-dire $g(r,\theta) = f\big(r\cos\theta, r\sin\theta\big)$: f et g représentent la même quantité physique (température, enthalpie, pression,...) mais pas avec les mêmes coordonnées.*
- *Si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, alors g est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$.*
- *On pose $e_r = \big(\cos\theta, \sin\theta\big)$ et $e_\theta = \big(-\sin\theta, \cos\theta\big)$, la base (e_r, e_θ) est aussi une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^2$. Si $(x,y) \neq (0,0) \iff r \neq 0$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \dfrac{\partial g}{\partial r} e_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta} e_\theta$.*

PARTIE 15.2 : EXTREMA

DÉFINITION 15.9 :
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$, on dit que f admet en a :
- *(i) un* **maximum local** *(resp. minimum) si $\exists r > 0$, $\forall x \in B(a,r)$, $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$).*
- *(ii) un* **extremum local** *si f possède en a un maximum local ou un minimum local.*
- *(iii) un* **maximum global** *(resp. minimum) (ou absolu) si $\forall x \in \Omega$, $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$).*
- *(iv) un* **extremum global** *(ou absolu) si f possède en a un maximum global ou un minimum global.*

PROPOSITION 15.10 :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur Ω et $a \in \Omega$, si f admet un extremum local en a alors $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a) = 0$, c'est-à-dire $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$.

DÉFINITION 15.10 :
Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur Ω, on dit $a \in \Omega$ est un **point critique** *de f si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a) = 0$.*

<u>REMARQUE 15.7</u> : • Cette propriété est fausse sur un ensemble non ouvert.
- *Ainsi, avec ces conditions : $\big(f$ admet un extremum local en $a\big) \Longrightarrow \big(a$ est un point critique de $f\big)$.*
- *La réciproque de cette implication est fausse.*

THÉORÈME 15.11 :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et a un point critique de f :

(i) **si $H_f(a) \in S_p^{++}(\mathbb{R})$ (resp. $S_p^{--}(\mathbb{R})$), f admet en a un minimum (resp. maximum) local.**
(ii) **si $H_f(a) \notin S_p^{+}(\mathbb{R})$ (resp. $S_p^{-}(\mathbb{R})$), f n'a pas de minimum (resp. maximum) local en a.**
(iii) **si $H_f(a) \in \big(S_p^{+}(\mathbb{R}) \setminus S_p^{++}(\mathbb{R})\big) \cup \big(S_p^{-}(\mathbb{R}) \setminus S_p^{--}(\mathbb{R})\big)$, alors on ne peut rien dire.**

REMARQUE 15.8 : Supposons que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$) admette un point critique en $a \in \Omega$, avec les notations de MONGE *: $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$:*

(i) Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ (resp. $r < 0$), f admet en a un minimum (resp. maximum) local,
(ii) Si $rt - s^2 < 0$, f admet en a un point selle (ou point col).
(iii) Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.

PARTIE 15.3 : COURBES ET SURFACES

DÉFINITION 15.11 :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1, la courbe Γ définie par : $\Gamma = \big\{(x,y) \in \Omega \mid f(x,y) = 0\big\}$ (équation implicite), on dit qu'un point $M_0 = (x_0, y_0)$ de Γ est **un point régulier** *si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0) \neq 0$.*

REMARQUE 15.9 : Avec les notations précédentes, on admet l'existence d'un paramétrage local de classe C^1 de la courbe Γ au voisinage d'un point régulier ; si $f(x_0,y_0) = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0,y_0) \neq 0$ alors il existe $r > 0$ tel que $B(M_0, r) \subset \Omega$, un intervalle ouvert I contenant 0, $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $\big(x(0), y(0)\big) = M_0$ et $\forall (x,y) \in B(M_0,r),\ (x,y) \in \Gamma \iff \big(\exists t \in I,\ x = x(t)$ et $y = y(t)\big)$.

PROPOSITION 15.12 :
En un point où il est non nul, le gradient est orthogonal aux lignes de niveau $f(x,y) = \lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

REMARQUE 15.10 : Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)$ est donc un vecteur normal à la tangente à Γ au point M_0 ce qui fait que la tangente à Γ en M_0 a pour équation : $(x - x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$.

DÉFINITION 15.12 :
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1, la surface S telle que : $S = \big\{(x,y,z) \in \Omega \mid f(x,y,z) = 0\big\}$ (équation implicite), on dit qu'un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S est **un point régulier** *si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0) \neq 0$.*

DÉFINITION 15.13 :
Soit une surface S d'équation $f(x,y,z) = 0$ avec $f : \Omega \to \mathbb{R}$ C^1, I un intervalle, $x, y, z : I \to \mathbb{R}$ C^1 telles que $\forall t \in I,\ \big(x(t), y(t), z(t)\big) \in S$. On dit que **la courbe $\Gamma = \big\{\big(x(t), y(t), z(t)\big) \mid t \in I\big\}$ est tracée sur S.**

REMARQUE 15.11 : Soit une surface S : $f(x,y,z) = 0$ avec $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Les tangentes en un point M_0 régulier de S aux courbes de classe C^1 tracées sur S sont orthogonales à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)$.

DÉFINITION 15.14 :
Le plan tangent à la surface S en M_0 régulier est le plan orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)$ passant par M_0.

PROPOSITION 15.13 :
Ce plan tangent à S en M_0 point régulier a pour équation :

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0$$