DEVOIR 19 : VARIABLES ALÉATOIRES

PSI 1 2025-2026 **mardi 03 février 2026**

QCM

1 *DSE classiques : vrai ou faux ?*

1.1 $\forall x \in]-1;1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

1.2 $\forall x \in]-1;1[,\ \mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

1.3 $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

1.4 $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

2 *Couples de variables : soit X, Y deux VAD réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on suppose que $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis*

2.1 $\forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)\,\mathbb{P}(Y = y)$

2.2 $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$

2.3 X, Y suivent des lois unif. $\Longleftarrow$ (X, Y) suit une loi unif.

2.4 X, Y suivent des lois unif. $\Longrightarrow$ (X, Y) suit une loi unif.

3 *Indépendance : soit X_1, X_2, X_3, X_4 quatre variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*

3.1 X_1 et X_1^2 sont indépendantes

3.2 $X_1 + X_2$ et $X_3 + X_4$ sont indépendantes

3.3 $X_1 + X_2$ et $X_1 + X_3$ sont indépendantes

3.4 $X_1 \cos(X_2)$ et $\sin(X_3 + e^{X_4})$ sont indépendantes

4 *Lois usuelles : soit un entier $n \in \mathbb{N}$, trois réels $p \in]0;1[$, $\lambda, \mu > 0$, une variable aléatoire X suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, Y et Z suivant les lois de* Poisson *$\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$*

4.1 $\mathbb{P}(X > n+1, X > n) = \mathbb{P}(X > 1)$

4.2 $\mathbb{P}(X \geqslant n) = (1-p)^n$

4.3 $\lim_{m \to +\infty} \binom{m}{n} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^{m-n} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$

4.4 $\mathbb{P}(Y + Z = n) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!}$

Définition Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, E un ensemble quelconque.

Qu'est une variable aléatoire discrète de Ω dans E ?

Preuve Soit $p \in]0;1[$ et X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui suit la loi géométrique de paramètre p. Montrer que $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1 Soit une urne avec N boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages avec remise dans cette urne (on les suppose indépendants mutuellement et équiprobables) et on note X_k le numéro de la boule obtenue au k-ième tirage. On pose $M = \mathrm{Max}(X_1, \cdots, X_n)$.

a. Donner $M(\Omega)$. Déterminer $P(M = 1)$.

b. Quelle relation lie, pour $m \in [\![2;N]\!]$, les probabilités $P(M = m)$, $P(M \leqslant m)$ et $P(M \leqslant m-1)$?

c. Calculer $P(M \leqslant m)$ pour $m \in [\![1;N]\!]$. En déduire la loi de M.

Exercice 2 Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant respectivement une loi de Poisson de paramètres $\lambda > 0$ et la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.

Quelle est la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

DEVOIR 19 NOM : PRÉNOM :

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question $i.j$ vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Définition

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

DEVOIR 19	NOM : COCO	PRÉNOM : SINUS

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1		X		X	
2	X	X	X		
3		X		X	
4			X		

1.1 Faux : ça commence à $n = 1$ **1.2** Vrai : cours **1.3** Faux : il y a des $(-1)^n$ **1.4** Vrai : $x^2 \in \mathbb{R}$.
2.1 Vrai : $\Omega = \bigsqcup_{x \in X(\Omega)} (X = x)$ donc $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)$ par σ-additivité et on multiplie par $\mathbb{P}(Y = y)$
2.2 Vrai : $(X = x) = \bigsqcup_{y \in Y(\Omega)} (X = x, Y = y)$ et σ-additivité **2.3** Vrai : $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis et calcul **2.4** Faux : exemple carré magique vu en cours.
3.1 Faux : si $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$, on a $X_1 = X_1^2$ **3.2** Vrai : lemme des coalitions **3.3** Faux : si $X_2 = X_3 = 0$, $X_1 + X_2 = X_1 + X_3$ **3.4** Vrai : conservation d'indépendance et coalition.
4.1 Faux : c'est $P(X > n+1 | X > n) = P(X > 1)$ (sans mémoire) **4.2** Faux : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$: $P(X \geqslant 1) = 1 \neq 1 - p$ par exemple **4.3** Vrai : du cours car $\lim_{m \to +\infty} m\left(\frac{\lambda}{m}\right) = \lambda$ et loi des "évènements rares" : "binomiale converge vers POISSON" **4.4** Faux : $Y + Z$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$ si Y et Z sont indépendantes.

Définition Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, E un ensemble quelconque et $X : \Omega \to E$ une application.
On dit que X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ si :
- L'ensemble image $X(\Omega)$ (univers image) est fini ou dénombrable.
- $\forall x \in X(\Omega),\ X^{-1}(\{x\}) = (X = x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ fait partie de la tribu $\mathcal{A}$.

Preuve Par définition, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ d'où $(X > n) = \bigsqcup_{k=n+1}^{+\infty} (X = k)$ et $\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)$ par σ-additivité. Or, X suit la loi $\mathcal{G}(p)$, d'où $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$. Ainsi, en posant $j = k - n - 1$,
$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}p = p(1-p)^n \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^j = p(1-p)^n \times \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n$ car $|1-p| < 1$.

Exercice 1 **a.** Clairement $M(\Omega) = [\![1;N]\!]$. On a par construction $(M = 1) = (X_1 = 1) \cap \cdots \cap (X_n = 1)$ et $\forall k \in [\![1;n]\!],\ \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{N}$ donc $\mathbb{P}(M = 1) = \frac{1}{N^n}$ par indépendance de $X_1, \cdots, X_n$.

b. Si $m \geqslant 2$, $(M \leqslant m) = (M = m) \sqcup (M \leqslant m-1)$ donc $\mathbb{P}(M = m) = \mathbb{P}(M \leqslant m) - \mathbb{P}(M \leqslant m-1)$.

c. $(M \leqslant m) = (X_1 \leqslant m) \cap \cdots \cap (X_n \leqslant m)$ donc $\mathbb{P}(M \leqslant m) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant m)^n$ par indépendance (les X_k ont même loi). Mais $\mathbb{P}(X_1 \leqslant m) = \frac{m}{N}$ (équiprobabilité sur toutes les boules de l'urne) donc $P(M \leqslant m) = \frac{m^n}{N^n}$.

Par conséquent : $\forall m \in [\![1;N]\!],\ \mathbb{P}(M = m) = \frac{m^n - (m-1)^n}{N^n}$ (vrai aussi pour $m = 1$).

Exercice 2 Si $X \neq Y$, A est diagonalisable car elle a deux valeurs propres distinctes (X et Y).

Si $X = Y$, A n'est pas DZ car alors elle serait semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$ donc égale à D : NON !

Ainsi, la probabilité cherchée est $\mathbb{P}(X \neq Y)$ or $(X = Y) = \bigsqcup_{k=0}^{+\infty} (X = k, Y = k)$. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = k)$ par indépendance de X et Y et $\mathbb{P}(A\ \text{DZ}) = 1 - \mathbb{P}(X = Y)$ avec

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k p(1-p)^{k-1}}{k!} = \frac{pe^{-\lambda}}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k (1-p)^k}{k!} = \frac{pe^{-\lambda}}{1-p}\left(e^{\lambda(1-p)} - 1\right) = \frac{p}{1-p}\left(e^{-p\lambda} - e^{-\lambda}\right).$$