DS 5.1 : EXTRAIT DE CCP PSI 2007 MATHS 2

PSI 1 2025/2026 **samedi 17 janvier 2026**

PARTIE 1 : UN COURT EXEMPLE

1.1 Par définition, $\boxed{G(u,v,w) = \begin{pmatrix} (u|u) & (u|v) & (u|w) \\ (v|u) & (v|v) & (v|w) \\ (w|u) & (w|v) & (w|w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a & 1-b \\ a & 2a^2-2a+1 & a \\ 1-b & a & 1+b^2 \end{pmatrix}}$ car $\mathbb{R}^3$ est muni ici de sa structure euclidienne canonique et, par exemple, $(u|v) = 1 \times a + 0 \times (1-a) + (-1) \times 0 = a$.

1.2.1 D'après l'énoncé, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u,v,w) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & 0 \\ -1 & 0 & b \end{pmatrix}$. Ainsi, après développement par rapport à la seconde ligne, on a $\boxed{\det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u,v,w)\big) = (1-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & b \end{vmatrix} = (1-a)(1+b)}$.

1.2.2 On sait que la famille (u,v,w) est liée si et seulement si $\det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u,v,w)\big) = 0$. D'après **1.2.1**, on a donc (u,v,w) est liée si et seulement si $a = 1$ ou $b = -1$. Traitons les deux cas :

<u>Si $a = +1$</u> on a dans ce cas $G(u,v,w) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1-b \\ 1 & 1 & 1 \\ 1-b & 1 & 1+b^2 \end{pmatrix}$ et, avec la formule de Sarrus, on a $\det(G(u,v,w)) = 2(1+b^2) + 1 - b + 1 - b - 2 - (1+b^2) - (1-b)^2 = 0$ (après calculs).

<u>Si $b = -1$</u> on a maintenant $G(u,v,w) = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ a & 2a^2-2a+1 & a \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix}$ et, toujours avec la formule de Sarrus, $\det(G(u,v,w)) = 4(2a^2-2a+1) + 2a^2 + 2a^2 - 4(2a^2-2a+1) - 2a^2 - 2a^2 = 0$.

On a vérifié dans les deux cas que $\boxed{\text{si } (u,v,w) \text{ est liée, alors } \det(G(u,v,w)) = 0.}$

1.2.3 Dans le calcul de $\det(G(u,v,w))$, après $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$, $\det(G(u,v,w)) = \begin{vmatrix} 2 & a & -1-b \\ a & 2a^2-2a+1 & 0 \\ 1-b & a & b(b+1) \end{vmatrix}$ donc, par linéarité selon C_3, on a $\det(G(u,v,w)) = (1+b)\begin{vmatrix} 2 & a & -1 \\ a & 2a^2-2a+1 & 0 \\ 1-b & a & b \end{vmatrix}$. Après $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et linéarité par rapport à L_3, il vient $\det(G(u,v,w)) = (1+b)^2 \begin{vmatrix} 2 & a & -1 \\ a & 2a^2-2a+1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Ensuite, après $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ et développement par rapport à la colonne 3, on a $\det(G(u,v,w)) = (1+b)^2 \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 2a^2-2a+1 \end{vmatrix}$ ce qui donne $\boxed{\det(G(u,v,w)) = (1+b)^2(a^2-2a+1) = (1+b)^2(1-a)^2.}$

On a donc $\det(G(u,v,w)) = \det(\mathrm{Mat}_{B_c}(u,v,w))^2$ donc $\boxed{\det(G(u,v,w)) \geqslant 0}$ et, toujours parce (u,v,w) est liée si et seulement si $\det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u,v,w)\big) = 0$, $\boxed{\det(G(u,v,w)) = 0 \text{ si et seulement si } (u,v,w) \text{ est liée.}}$

PARTIE 2 : ÉQUIVALENCE

$\boxed{\textbf{2.1.1}}$ On vérifie $\boxed{X_i^T C X_j = c_{i,j}}$ soit par calcul direct, soit en remarquant que c'est $(X_i|CX_j)$ pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et comme $(X_1, \cdots, X_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, qui est donc orthonormale pour ce produit scalaire, $(X_i|CX_j)$ est la i-ième coordonnée du vecteur CX_j, qui est la j-ième colonne de C.

$\boxed{\textbf{2.1.2}}$ $(\Longleftarrow)$ Si $X^T CY = 0$ pour tout couple $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ alors, en prenant $X = X_i$ et $Y = X_j$, on obtient $c_{i,j} = 0$ d'après **2.1.1** pour tout couple $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ donc $C = 0$.

$(\Longrightarrow)$ Si $C = 0$, on a donc $CY = 0$ pour $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ puis $X^T CY = X^T(CY) = X^T 0 = 0$ pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Par double implication, on a $\boxed{C = 0 \Longleftrightarrow \big(\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ X^T CY = 0\big).}$

$\boxed{\textbf{2.2}}$ Si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ et $y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j \in E$, on a $(x|y) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i y_j (e_i|e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i y_j$ par bilinéarité du produit scalaire. D'autre part, par définition du produit matriciel, on a $[AY]_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ puis $X^T AY = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i [AY]_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j$ donc $\boxed{(x|y) = X^T AY.}$

$\boxed{\textbf{2.3.1}}$ Comme $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale de E, d'après le cours, $\boxed{(x|y) = X'^T Y'.}$

$\boxed{\textbf{2.3.2}}$ Comme $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)$, d'après le cours, $\boxed{X = PX'.}$

$\boxed{\textbf{2.3.3}}$ Pour $(x, y) \in E^2$, on a $(x|y) = X^T AY = X'^T Y'$ donc $(PX')^T A (PY') = X'^T Y'$ ou $X'^T (P^T AP - I_n) Y' = 0$. Cette relation étant valable pour tout couple $(X', Y') \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, on en déduit, d'après **2.1.2**, que $\boxed{P^T AP = I_n.}$

$\boxed{\textbf{2.3.4}}$ On a $A = (P^T)^{-1} P^{-1}$ (P est une matrice de passage donc $\det(P) \neq 0$ et P est inversible) d'après **2.3.3**. On en déduit que $\det(A) = \det((P^{-1})^T)\det(P^{-1}) = \det(P^{-1})^2$ donc $\boxed{\det(A) > 0 \text{ et } A \text{ est inversible.}}$

$\boxed{\textbf{2.3.5}}$ On applique **2.3.4** à l'espace $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ dont $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ est une base car elle est libre par hypothèse et génératrice de F par construction. Ainsi, en notant $B = G(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\boxed{\det(B) > 0.}$

$\boxed{\textbf{2.4.1}}$ Pour $i \in [\![1; n]\!]$, on a $[MX]_i = \sum\limits_{j=1}^{n} (u_i|u_j) x_j$ par définition du produit matriciel puis, par linéarité à droite du produit scalaire, $[MX]_i = \Big(u_i \Big| \sum\limits_{j=1}^{n} x_j u_j\Big)$ donc $\boxed{[MX]_i = (u_i|v).}$

$\boxed{\textbf{2.4.2}}$ On a alors $X^T MX = X^T(MX) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i [MX]_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i (u_i|v) = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_i \Big| v\Big)$ par linéarité à gauche du produit scalaire cette fois-ci, donc $\boxed{X^T MX = ||v||^2.}$

$\boxed{\textbf{2.4.3}}$ $(\Longleftarrow)$ Si $MX = 0$ alors $X^T MX = 0$ donc $||v||^2 = 0$ donc $||v|| = 0$ et $v = 0_E$ par séparation.

$(\Longrightarrow)$ Si $v = 0$ alors $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $[MX]_i = (u_i|v) = 0$ donc $MX = 0$.

Par double implication, on a donc l'équivalence $\boxed{v = 0_E \Longleftrightarrow X^T MX = 0.}$

$\boxed{\textbf{2.4.4}}$ Si $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_i = 0$ avec $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors alors $v = 0_E$, ce qui donne $MX = 0$. Comme M est inversible par hypothèse, on en déduit $X = M^{-1}(MX) = 0$ donc $x_1 = \cdots = x_n = 0$ donc $\boxed{(u_1, \cdots, u_n) \text{ est libre.}}$

On vient de montrer avec **2.3** *et* **2.4** *que* $(u_1, \cdots, u_p)$ *est libre si et seulement si* $\det\big(G(u_1, \cdots, u_p)\big) > 0$.

2.5.1 D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a $|(u_1|u_2)| \leqslant ||u_1|| \times ||u_2|| = 1$ donc $\boxed{|\alpha| \leqslant 1.}$

2.5.2 La matrice $M - (1-\alpha)I_n$ est la matrice dont tous les coefficients valent α donc, selon les valeurs de α, on a $\boxed{\mathrm{rg}(M-(1-\alpha)I_n) = 1 \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ et } \mathrm{rg}(M-(1-\alpha)I_n) = 0 \text{ si } \alpha = 0.}$

On a donc $\mathrm{rg}(M-(1-\alpha)I_n) \leqslant 1 < n$ donc $1-\alpha$ est valeur propre de M et, par le théorème du rang, $\dim(E_{1-\alpha}(M)) = n - \mathrm{rg}\big(M-(1-\alpha)I_n\big) \geqslant n-1$. Or $\dim(E_{1-\alpha}(M)) \leqslant m_{1-\alpha}(M)$ d'après le cours donc $m_{1-\alpha}(M) \geqslant n-1$. Le polynôme caractéristique de M vérifie donc $X_M = (X-1+\alpha)^{n-1}(X-\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$, et comme $\chi_M = X^n - \mathrm{tr}(M)X^{n-1} + ...$, on obtient $\mathrm{tr}(M) = (n-1)(1-\alpha)+\lambda$ en identifiant. Comme $\mathrm{tr}(M) = n$, on a $\lambda = 1+(n-1)\alpha$ et $\boxed{\chi_M = (X-1+\alpha)^{n-1}(X-1-(n-1)\alpha).}$

2.5.3 On a $MX = \lambda X$ donc $X^TMX = \lambda X^TX = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ et, avec **2.4.2**, $X^TMX = ||v||^2 \geqslant 0$. Comme $X \neq 0$, on a $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ donc, comme $\lambda = \dfrac{||v||^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$, on en déduit $\lambda = 1+(n-1)\alpha \geqslant 0$ ce qui donne $\boxed{\alpha \geqslant \dfrac{-1}{n-1}.}$

2.5.4 Si $\alpha = -\dfrac{1}{n-1}$ alors $\lambda = 0$ est valeur propre de M et on vérifie que le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 0. En utilisant à nouveau **2.4.2**, on a $X^TMX = ||v||^2$ mais, comme $MX = 0$, on en déduit $||v||^2 = 0$ donc $\boxed{v = 0_E.}$

PARTIE 3 : DISTANCE À UN SOUS-ESPACE

3.1.1 On obtient $\det\big(G(v_1, \cdots, v_{n-1}, \lambda v_n)\big) = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_{n-1}) & \lambda(v_1|v_n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_{n-1}|v_1) & \cdots & (v_{n-1}|v_{n-1}) & \lambda(v_{n-1}|v_n) \\ \lambda(v_n|v_1) & \cdots & \lambda(v_n|v_{n-1}) & \lambda^2(v_n|v_n) \end{vmatrix}$ par définition de $G(v_1, \cdots, v_{n-1}, \lambda v_n)$ et par bilinéarité du produit scalaire. Ainsi, par linéarité du déterminant par rapport à la dernière ligne et la dernière colonne, on a $\boxed{\det\big(G(v_1, \cdots, v_{n-1}, \lambda v_n)\big) = \lambda^2 \det\big(G(v_1, \cdots, v_{n-1}, v_n)\big).}$

3.1.2 De même, par définition de $D = \det\big(G(v_1, \cdots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_1)\big)$ et par bilinéarité du produit scalaire, on a
$D = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_{n-1}) & (v_1|v_n) + \lambda(v_1|v_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_{n-1}|v_1) & \cdots & (v_{n-1}|v_{n-1}) & (v_{n-1}|v_n) + \lambda(v_{n-1}|v_1) \\ (v_n|v_1) + \lambda(v_1|v_1) & \cdots & (v_n|v_{n-1}) + \lambda(v_1|v_{n-1}) & ||v_n + \lambda v_1||^2 \end{vmatrix}$. Dans ce déterminant, on effectue l'opération $L_n \longleftarrow L_n - \lambda L_1$ pour avoir $D = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_{n-1}) & (v_1|v_n) + \lambda(v_1|v_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_{n-1}|v_1) & \cdots & (v_{n-1}|v_{n-1}) & (v_{n-1}|v_n) + \lambda(v_{n-1}|v_1) \\ (v_n|v_1) & \cdots & (v_n|v_{n-1}) & (v_n|v_n) + \lambda(v_n|v_1) \end{vmatrix}$ après calculs. Puis, après $C_n \longleftarrow C_n - \lambda C_1$, $\boxed{\det\big(G(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_1)\big) = \det\big(G(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n)\big).}$

3.2.1 Comme $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $(v_i|w) = 0$ car $v_i \in F$ et $w \in F^{\perp}$, tous les termes de la dernière colonne du déterminant $\det\big(G(v_1, \cdots, v_n, w)\big)$ sont nuls, sauf celui en case $(n+1, n+1)$ qui vaut $(w|w) = ||w||^2$. Par développement de ce déterminant par rapport à la dernière colonne, $\boxed{\det\big(G(v_1, \cdots, v_n, w)\big) = ||w||^2 \times \det\big(G(v_1, \cdots, v_n)\big).}$

3.2.2 D'après le cours, on a $d(v, F) = ||v - p_F(v)||$ où $p_F(v)$ est le projeté orthogonal de v sur F. Le résultat de la question **3.1.2** se généralise avec v_k à la place de v_1 pour $k \in [\![1; n-1]\!]$ et, plus généralement, on établit que si $y \in \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_n)$ alors $\det\big(G(v_1, \cdots, v_n, v + y)\big) = \det\big(G(v_1, \cdots, v_n, v)\big)$. Si on applique cela avec $y = -p_F(v) \in F$, on obtient $\det\big(G(v_1, \cdots, v_n, v)\big) = \det\big(G(v_1, \cdots, v_n, v - y)\big)$ et, par définition d'un projecteur orthogonal, on a $v - p_F(v) \in F^{\perp} = \mathrm{vect}(v_1, \cdots, v_n)^{\perp}$, donc, d'après **3.2.1** appliqué avec $w = v - p_F(v)$, on obtient $\boxed{\det\big(G(v_1, \cdots, v_n, v) = ||v - p_F(v)||^2 \times \det\big(G(v_1, \cdots, v_n)\big) = d(v, F)^2 \times \det\big(G(v_1, \cdots, v_n)\big).}$

3.2.3 On a vu en **1.2.3** que $\det(G(u, v, w)) = (1+b)^2(a-1)^2$. On calcule aussi $\det(G(u, v)) = \begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 1 - 2a + 2a^2 \end{vmatrix}$ et $\det(G(u, v)) = 2 - 4a + 3a^2$ donc $(2 - 4a + 3a^2)d(w, F)^2 = (1 + b)^2(a - 1)^2$ d'après **3.2.1**. Comme $2 - 4a + 3a^2 = 2(1-a)^2 + a^2 > 0$, on en déduit $\boxed{d(w, F) = \sqrt{\dfrac{(1+b)^2(a-1)^2}{2 - 4a + 3a^2}}.}$

On retrouve $d(w, F) = 0$ *si* $a = 1$ *ou* $b = -1$*, ce qui est logique puisque dans ce cas* $w \in F$ *d'après la partie* **1**.

DS 5.2 : INSPIRÉ DE CCP PSI 2013 MATHS 1

PSI 1 2025/2026 **samedi 17 janvier 2026**

PARTIE 1 : ÉTUDE DE DEUX FONCTIONS

1.1 La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on a $e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, $\boxed{t \mapsto e^{-t^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+.}$

1.2.1 La fonction $t \mapsto \cos(2bt)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\left|\cos(2bt)e^{-t^2}\right| \leqslant e^{-t^2}$ donc, d'après la question précédente et par comparaison, $\boxed{t \mapsto \cos(2bt)e^{-t^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+.}$

1.2.2 La fonction $f_n : t \mapsto t^{2n}e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées donc, par comparaison aux intégrales de Riemann, $\boxed{f_n : t \mapsto t^{2n}e^{-t^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+.}$ Dans I_n, on pose $u_n : t \mapsto \dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}$ et $v : t \mapsto e^{-t^2}$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{t \to +\infty} u_n(t)v(t) = 0 = u_n(0)v(0)$ par croissances comparées donc $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} u_n'(t)v(t)dt = \big[u_n(t)v(t)\big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u_n(t)v'(t)dt$, qui s'écrit aussi $I_n = \left[\dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} - \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}\left(-2te^{-t^2}\right)dt$ donc $\boxed{I_n = \dfrac{2}{2n+1}I_{n+1}.}$

1.2.3 Puisque la relation finale est donnée, on peut procéder par récurrence :

Initialisation : $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après l'énoncé (intégrale de Gauss) donc $I_0 = \dfrac{(2.0)!}{2^{2.0}(0!)} \times \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)} \times \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, alors $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2} \times I_n = \dfrac{2n+1}{2} \times \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)} \times \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après **1.2.2** et par hypothèse de récurrence et $I_{n+1} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2(2(n+1))2^{2n}(n!)} \times \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} = \dfrac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)} \times \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Par principe de récurrence, on a bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)} \times \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

1.2.4 Soit $b \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on a $e^{2ibt} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n i^n b^n t^n}{n!}$ puis, comme $i^{2p} = (-1)^p \in \mathbb{R}$ et $i^{2p+1} = i(-1)^p \in i\,\mathbb{R}$, en séparant les termes d'indices pairs et impairs dans cette somme de série, comme tout converge par croissances comparées, $e^{2ibt} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{2^{2p}(-1)^p b^{2p} t^{2p}}{(2p)!} + i \sum\limits_{p=0}^{+\infty} \dfrac{2^{2p+1}(-1)^p b^{2p+1} t^{2p+1}}{(2p+1)!}$. Comme, de plus, on a $e^{2ibt} = \cos(2bt) + i\sin(2bt)$, en identifiant, on a $\boxed{\cos(2bt) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \dfrac{4^p b^{2p}}{(2n)!} t^{2p}.}$

1.2.5 Soit $b \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, d'après la question précédente, $\cos(2bt)e^{-t^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{(2bt)^{2n}}{(2n)!} e^{-t^2}$. Pour intégrer terme à terme, on pose $g_n : t \mapsto (-1)^n \dfrac{(2bt)^{2n}}{(2n)!} e^{-t^2}$.

- (H_1) $\sum\limits_{n \geqslant 0} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $t \mapsto \cos(2bt)e^{-t^2}$ d'après **1.2.4**.
- (H_2) Toutes les fonctions g_n et la fonction $t \mapsto \cos(2bt)e^{-t^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ par opérations.
- (H_3) Toutes fonctions g_n sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ d'après **1.2.2**.
- (H_4) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} |g_n(t)|\,dt = \dfrac{(2b)^{2n}}{(2n)!} I_n = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \dfrac{b^{2n}}{n!}$ par linéarité de l'intégrale et d'après **1.2.3** donc $\sum\limits_{n \geqslant 0} \int_0^{+\infty} |g_n(t)|\,dt$ converge d'après l'énoncé (et la somme vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{b^2}$).

Par le théorème d'intégration terme à terme, on en déduit que $h(b) = \int_0^{+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\,dt = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt$

donc $\boxed{h(b) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{(2b)^{2n}}{(2n)!} I_n = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{b^{2n}}{n!}}$ donc $\boxed{h(b) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2} \text{ si } b \in \mathbb{R}}$ d'après l'énoncé.

1.3.1 Pour dériver sous le signe somme, on pose $a : (b,t) \mapsto \cos(2bt)e^{-t^2}$ de sorte que $h(b) = \int_0^{+\infty} a(b,t)\,dt$.

- (H_1) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $b \mapsto a(b,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par opérations.
- (H_2) Pour tout $b \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto a(b,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après **1.2.1.**.
- (H_3) Pour tout $b \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial a}{\partial b}(b,t) = -2t\sin(2bt)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par opérations.
- (H_4) Pour tout $(b,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, on a $\left|\dfrac{\partial a}{\partial b}(b,t)\right| \leqslant 2te^{-t^2} = \psi(t)$ car $|\sin(2bt)| \leqslant 1$ avec ψ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\psi(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.

Par dérivation sous le signe somme, $\boxed{h \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall b \in \mathbb{R},\ h'(b) = \int_0^{+\infty} (-2t)\sin(2bt)e^{-t^2}\,dt.}$

$\boxed{1.3.2}$ Dans cette dernière intégrale, on pose $u : t \mapsto \sin(2bt)$ et $v : t \mapsto e^{-t^2}$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $u(0)v(0) = 0 = \lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t)$ donc $h'(b) = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt = -\int_0^{+\infty} (2b\cos(2bt))e^{-t^2}dt$ par intégration par parties puis $h'(b) = -2bh(b)$ par linéarité. On a bien $\boxed{\forall b \in \mathbb{R},\ h'(b) + 2bh(b) = 0.}$

$\boxed{1.3.3}$ Les solutions réelles y sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle $(E)\ :\ y' + 2xy = 0$ sont, d'après le cours, les fonctions pour lesquelles il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y : x \mapsto \lambda e^{-x^2}$. Comme h est solutions réelle sur $\mathbb{R}$ de (E) d'après **1.3.2** et que $h(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après l'énoncé, on a $\boxed{\forall b \in \mathbb{R},\ h(b) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.}$

$\boxed{1.4.1}$ On pose, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x,t) = \exp\left(-t^2 - \dfrac{x^2}{t^2}\right)$ et on applique le théorème de continuité :

(H_1) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations.

(H_2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.

(H_3) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|f(x,t)| \leqslant e^{-t^2}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec **1.1**.

Par théorème de continuité sous le signe somme, $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$. De plus, grâce au terme x^2, comme $(-x)^2 = x^2$, la fonction $\boxed{\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \dfrac{x^2}{t^2}\right) dt \text{ est paire.}}$

$\boxed{1.4.2}$ Posons à nouveau $f(x,t) = \exp\left(-t^2 - \dfrac{x^2}{t^2}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$:

(H_1) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.

(H_2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par domination d'après **1.4.1**.

(H_3) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-2x}{t^2}\exp\left(-t^2 - \dfrac{x^2}{t^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations.

(H_4) Si $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{2x}{t^2}\exp\left(-t^2 - \dfrac{x^2}{t^2}\right) \leqslant \dfrac{2b}{t^2}\exp\left(-t^2 - \dfrac{a^2}{t^2}\right) = \theta_{a,b}(t)$ pour tout $x \in [a;b]$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $\theta_{a,b}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car on a $\theta_{a,b}(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $\theta_{a,b}(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{2b}{t^2}e^{-a^2/t^2}$ donc $\lim\limits_{t\to0^+} \theta_{a,b}(t) = 0$ par croissances comparées.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, on en déduit que $\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$ et qu'on a, par la formule de LEIBNIZ, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(x) = -2x\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}\exp\left(-t^2 - \dfrac{x^2}{t^2}\right) dt.}$

$\boxed{1.4.3}$ Pour $x > 0$, dans l'intégrale ci-dessus, on pose $t = \dfrac{x}{u} = \alpha_x(u)$ avec α_x qui est de classe C^1 strictement décroissante et bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\varphi'(x) = -2x\int_{+\infty}^0 \left(\dfrac{u^2}{x^2}\right)\exp\left(-\dfrac{x^2}{u^2} - u^2\right)\left(\dfrac{-x}{u^2}\right)du$ par changement de variable, qui se simplifie en $\boxed{\varphi'(x) = -2\varphi(x).}$

$\boxed{\textbf{1.4.4}}$ On en déduit, comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(x) = \lambda e^{-2x}$. Par continuité de φ en 0 d'après **1.4.1**, on a $\lambda = \varphi(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après l'énoncé donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2x}$ puis, par parité de φ, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|x|}.}$

PARTIE 2 : TRANSFORMÉE DE FOURIER

$\boxed{\textbf{2.1.1}}$ Pour $a \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, posons $m(a,t) = \dfrac{\cos(2at)}{1+t^2}$:

- (H_1) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $a \mapsto m(a,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations.
- (H_2) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto m(a,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par opérations.
- (H_3) Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|m(a,t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} = p(t)$ car $|\cos(2at)| \leqslant 1$ et p est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $p(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$.

Par théorème de continuité sous le signe somme, $\boxed{\psi \text{ est définie et continue et paire sur } \mathbb{R}}$ car $\cos$ est paire.

$\boxed{\textbf{2.1.2}}$ $\psi(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \Big[\mathrm{Arctan}(t)\Big]_0^{+\infty}$ donc $\boxed{\psi(0) = \dfrac{\pi}{2}.}$

$\boxed{\textbf{2.2}}$ Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés, on pose $v_p(x) = j_p(x)\cos(2ax)$ pour $x \in [0,n]$:

- (H_1) $(v_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0;n]$ vers $v : x \mapsto \dfrac{\cos(2ax)}{2(1+x^2)} = \dfrac{m(a,x)}{2}$ car $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} e^{-p^2(1+x^2)} = 0$.
- (H_2) Toutes les fonctions v_p et la fonction v sont continues sur $[0;n]$.
- (H_3) Pour $(p,x) \in \mathbb{N}^* \times [0;n]$, $|v_p(x)| \leqslant \dfrac{1}{2(1+x^2)}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{2(1+x^2)}$ est continue donc intégrable sur le segment $[0;n]$.

Par le théorème de convergence dominée, $\boxed{\displaystyle\lim_{p\to+\infty} u_{n,p} = \int_0^n \frac{\cos(2ax)}{2(1+x^2)}dx.}$

Ou par convergence uniforme sur le segment $[0;n]$ *avec* $||v_p - v||_{\infty;[0;n]} \leqslant \dfrac{1}{2}e^{-p^2}$ *et* $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} e^{-p^2} = 0$.

$\boxed{\textbf{2.3.1}}$ Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés, on pose $h(y,x) = y\cos(2ax)e^{-x^2y^2}$:

- (H_1) Pour tout $x \in [0;n]$, la fonction $y \mapsto h(y,x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par opérations.
- (H_2) Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(y,x)$ est continue par morceaux sur $[0;n]$ par opérations.
- (H_3) Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}_+$, $y \in [a;b]$ et $x \in [0;n]$, alors $|h(y,x)| \leqslant b$ et la fonction $x \mapsto b$ est continue donc intégrable sur le segment $[0;n]$.

On en déduit par théorème de continuité sous le signe somme que $\boxed{k_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$

$\boxed{\textbf{2.3.2}}$ Si $y = 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $k_n(0) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n(0) = 0 = k(0)$.

Si $y \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto y\cos(2ax)e^{-x^2y^2} = h(y,x)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $h(y,x) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} y\cos(2ax)e^{-x^2y^2}\,dx$. On pose alors $t = xy$ ou $x = \dfrac{t}{y}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{y}$ est de classe C^1, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, et on a la valeur de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(2a\frac{t}{y}\right)e^{-t^2}\,dt = h\left(\frac{a}{y}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2/y^2}$ d'après **1.2.5** ou **1.3.3**.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite de fonctions } (k_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}_+ \text{ vers } k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}}$ où la fonction k a été définie par $\boxed{k(0) = 0 \text{ et } k(y) = h\left(\dfrac{a}{y}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-a^2/y^2} \text{ si } y > 0.}$

$\boxed{\textbf{2.4}}$ La fonction k_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ d'après **2.3.1** donc $y \mapsto k_n(y)e^{-y^2}$ est aussi continue sur $\mathbb{R}_+$ par produit. De plus, $|k_n(y)| \leqslant \displaystyle\int_0^n y\,dy = \frac{n^2}{2}$ par inégalité triangulaire car $\forall x \in [0;n]$, $|\exp(-y^2x^2)\cos(2ax)| \leqslant 1$ donc $\left|k_n(y)e^{-y^2}\right| \leqslant \dfrac{n^2}{2}e^{-y^2}$ donc, par comparaison, $\boxed{\text{la fonction } y \mapsto k_n(y)e^{-y^2} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+.}$

$\boxed{\textbf{2.5}}$ Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_0^p ye^{-(1+x^2)y^2}\,dy = \left[-\frac{1}{2}\frac{e^{-(1+x^2)y^2}}{1+x^2}\right]_{y=0}^{y=p}$ donc $\boxed{\displaystyle\int_0^p ye^{-(1+x^2)y^2}\,dy = j_p(x).}$

$\boxed{\textbf{2.6}}$ D'après **2.2**, on a $\psi(a) = 2\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n,p}\right)$. On va donc calculer cette double limite autrement. Avec l'égalité admise et **2.5**, on a $u_{n,p} = \displaystyle\int_0^p k_n(y)e^{-y^2}\,dy$ et avec **2.4**, $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n,p} = \displaystyle\int_0^{+\infty} k_n(y)e^{-y^2}\,dy$. On va alors appliquer le théorème de convergence dominée pour calculer la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} k_n(y)e^{-y^2}\,dy$ quand n tend vers $+\infty$. On pose $w_n(y) = k_n(y)e^{-y^2}$ pour $y \in \mathbb{R}_+$:

- (H_1) La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $y \mapsto k(y)e^{-y^2}$ d'après **2.3.2**.
- (H_2) Les fonctions w_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$ d'après **2.3.1** et la fonction $y \mapsto k(y)e^{-y^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ d'après **2.3.2**.
- (H_3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, $|k_n(y)| \leqslant \displaystyle\int_0^n ye^{-x^2y^2}\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} ye^{-x^2y^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ avec le changement de variable affine $x = \dfrac{t}{y}$ facile à justifier donc $|w_n(y)| \leqslant \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-y^2}$ pour $y \in \mathbb{R}_+$ car $w_n(0) = 0$.
  La fonction $y \mapsto e^{-y^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après **1.1.**

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} w_n(y)\,dy = \int_0^{+\infty} k(y)e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{+\infty}\exp\left(-y^2 - \frac{a^2}{y^2}\right)dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\varphi(a)$ par théorème de convergence dominée. Avec **1.4.4**, $\boxed{\psi(a) = \dfrac{\pi}{2}e^{-2|a|} \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}}$ par parité de ψ.