

DS 5.1 : EXTRAIT DE CCP PSI 2007 MATHS 2

PSI 1 2025/2026

samedi 17 janvier 2026

Le produit scalaire de deux vecteurs u et v d'un espace préhilbertien sera noté $(u|v)$.

Définition : pour n vecteurs v_1, \dots, v_n d'un espace préhilbertien réel H , on appelle matrice de GRAM des vecteurs v_1, \dots, v_n , la matrice $G(v_1, \dots, v_n) = (g_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $g_{i,j} = (v_i|v_j)$ pour $(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$. Pour les calculs de déterminant, lorsque vous utilisez des manipulations sur les lignes ou les colonnes, il vous est demandé d'indiquer précisément quelles manipulations vous effectuez.

PARTIE 1 : UN COURT EXEMPLE

On considère les trois vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} a \\ 1-a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^3 et les deux réels a et b .

L'espace \mathbb{R}^3 est muni de son produit scalaire canonique. On note \mathcal{B}_c la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1.1 Écrire la matrice de GRAM $G(u, v, w)$ des vecteurs u, v, w .

1.2 Des implications :

1.2.1 Calculer $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u, v, w))$, où $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u, v, w)$ est la matrice des vecteurs u, v, w dans \mathcal{B}_c .

1.2.2 En déduire que si la famille (u, v, w) est liée alors $\det(G(u, v, w)) = 0$.

1.2.3 Montrer que $\det(G(u, v, w)) \geq 0$ et étudier la réciproque de la question précédente.

PARTIE 2 : ÉQUIVALENCE

2.1 Condition de nullité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout entier $i \in \llbracket 1;n \rrbracket$, on note X_i la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient de la ligne i qui vaut 1.

2.1.1 Pour $(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$, calculer le produit $X_i^T C X_j$.

2.1.2 En déduire que $C = 0$ si et seulement si pour tout couple (X, Y) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$ on a $X^T C Y = 0$.

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base quelconque de E . Soit la matrice de GRAM des vecteurs e_1, \dots, e_n notée $A = G(e_1, \dots, e_n)$. Pour tout vecteur u de E , on note avec la même lettre majuscule U la matrice colonne des composantes du vecteur u relativement à la base \mathcal{B} .

2.2 Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E , justifier l'égalité $(x|y) = X^T A Y$.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base orthonormale de E . On note P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .

2.3 Condition suffisante : pour tout vecteur u de E , on note U' la matrice colonne des composantes du vecteur u relativement à la base \mathcal{B}' .

2.3.1 Que vaut $(x|y)$ en fonction de X' et Y' si $(x, y) \in E^2$?

2.3.2 Soit x un vecteur de E . Rappeler la relation entre les matrices X, X' et P .

2.3.3 En déduire que $P^T A P = I_n$.

2.3.4 Montrer que la matrice A est inversible et que $\det(A) > 0$.

2.3.5 Dédurre des résultats précédents que si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une famille libre de vecteurs d'un espace préhilbertien réel, la matrice $B = G(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifie $\det(B) > 0$.

2.4 *Condition nécessaire* : dans un espace préhilbertien réel H , on considère n vecteurs **quelconques** u_1, \dots, u_n ,

avec $n \geq 1$. Soit $M = G(u_1, \dots, u_n)$. À $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on associe le vecteur $v = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ de H .

2.4.1 Exprimer les coefficients de la matrice MX en fonction des produits scalaires $(u_i | v)$.

2.4.2 En déduire l'égalité $X^T M X = \|v\|^2$ où $\|v\|$ est la norme euclidienne du vecteur v .

2.4.3 Montrer que $MX = 0$ si et seulement si v est le vecteur nul.

2.4.4 On suppose que M est inversible, déduire de la question précédente que la famille (u_1, \dots, u_n) est libre.

2.5 *Produit scalaire constant* : dans cette question suppose $n \geq 2$ et on considère n vecteurs **unitaires** u_1, \dots, u_n d'un espace préhilbertien H tels qu'il existe un réel α pour lequel on a $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i \neq j \implies (u_i | u_j) = \alpha$. On note à nouveau M la matrice $M = G(u_1, \dots, u_n)$.

2.5.1 Justifier que $|\alpha| \leq 1$.

2.5.2 Calculer $\text{rg}(M - (1 - \alpha)I_n)$ et en déduire que $\chi_M = (X - 1 + \alpha)^{n-1}(X - 1 - (n - 1)\alpha)$.

2.5.3 Soit X un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\lambda = 1 + (n - 1)\alpha$. Montrer que $\alpha \geq -\frac{1}{n - 1}$.

2.5.4 On suppose cette fois que $\alpha = -\frac{1}{n - 1}$. Quelle est la valeur du vecteur $v = \sum_{i=1}^n u_i$?

PARTIE 3 : DISTANCE À UN SOUS-ESPACE

On considère une famille (v_1, \dots, v_n) d'un espace préhilbertien réel H avec $n \geq 2$.

3.1 *Opérations sur les vecteurs d'une matrice de GRAM* :

3.1.1 Exprimer $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n))$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ et de $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n))$.

3.1.2 Exprimer $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_1))$ en fonction de $\det(G(v_1, \dots, v_n))$.

3.2 *Application à la distance* : soit $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ le sous-espace vectoriel de H engendré par v_1, \dots, v_n .

3.2.1 Soit $w \in F^\perp$. Exprimer $\det(G(v_1, \dots, v_n, w))$ en fonction de w et de $\det(G(v_1, \dots, v_n))$.

3.2.2 Soit $v \in H$, on note $d(v, F)$ la distance du vecteur v au sous-espace vectoriel F . Montrer l'égalité

$$\det(G(v_1, \dots, v_n, v)) = (d(v, F))^2 \det(G(v_1, \dots, v_n)).$$

3.2.3 Calculer $d(w, F)$ avec $F = \text{Vect}(u, v)$, où u, v et w sont les vecteurs définis dans la partie 1.

DS 5.2 : INSPIRÉ DE CCP PSI 2013 MATHS 1

PSI 1 2025/2026

samedi 17 janvier 2026

On rappelle la décomposition en série entière de la fonction exponentielle sur \mathbb{C} :

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

PARTIE 1 : ÉTUDE DE DEUX FONCTIONS

1.1 Justifier que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Dans la suite du problème, on admettra que la valeur de cette intégrale est $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1.2 Étude de la fonction h : par une première méthode

1.2.1 Justifier, pour tout réel b , que $t \mapsto \cos(2bt) \exp(-t^2)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

On définit donc la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall b \in \mathbb{R}, h(b) = \int_0^{+\infty} \cos(2bt) \exp(-t^2) dt.$$

1.2.2 Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt$ et déterminer une relation entre I_n et I_{n+1} .

1.2.3 En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1.2.4 Pour $b \in \mathbb{R}$ fixé, en utilisant $\cos(2bt) = \operatorname{Re}(e^{2ibt})$, justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\cos(2bt) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{4^n b^{2n}}{(2n)!} t^{2n}.$$

1.2.5 En déduire une expression de $h(b)$ à l'aide de la somme d'une série, puis que

$$h(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}.$$

1.3 Étude de la fonction h : par une seconde méthode, soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(b, t) = \cos(2bt) \exp(-t^2)$.

On admet juste ici, comme montré en question 1.2.1, que $t \mapsto f(b, t)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ pour tout réel b .

1.3.1 Montrer que h est de classe C^1 sur \mathbb{R} et donner une expression de $h'(b)$ sous forme intégrale.

1.3.2 En déduire que $\forall b \in \mathbb{R}, h'(b) + 2bh(b) = 0$.

1.3.3 Établir comme en question 1.2.5 que $\forall b \in \mathbb{R}, h(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$.

1.4 Étude de la fonction φ :

1.4.1 Montrer que l'on définit une fonction φ paire et continue sur \mathbb{R} en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) dt.$$

1.4.2 Montrer que φ est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$.

1.4.3 Déterminer une constante α telle que pour tout $x \in]0; +\infty[$ on ait :

$$\varphi'(x) = \alpha \varphi(x).$$

Indication : on pourra utiliser un changement de variable.

1.4.4 Expliciter $\varphi(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$, puis pour $x \in \mathbb{R}$.

PARTIE 2 : TRANSFORMÉE DE FOURIER

2.1 Étude de la fonction ψ :

2.1.1 Vérifier que l'on définit une fonction ψ , continue sur \mathbb{R} , paire en posant

$$\forall a \in \mathbb{R}, \psi(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2at)}{1+t^2} dt.$$

2.1.2 Calculer $\psi(0)$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et j_p la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, j_p(x) = \frac{1 - \exp(-p^2(1+x^2))}{2(1+x^2)}.$$

Dans la suite de cette partie, on fixe un réel a .

On pose alors $u_{n,p} = \int_0^n j_p(x) \cos(2ax) dx$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

2.2 Justifier l'existence de $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_{n,p}$ et l'exprimer sous forme d'une intégrale.

2.3 Convergence simple : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $k_n(y) = \int_0^n y \exp(-y^2 x^2) \cos(2ax) dx$.

2.3.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, montrer que k_n est une fonction continue sur \mathbb{R}_+ .

2.3.2 Montrer que $(k_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions qui converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers une fonction k que l'on explicitera en fonction de h .

2.4 Justifier l'intégrabilité sur $[0; +\infty[$ de la fonction $y \mapsto k_n(y) \exp(-y^2)$.

2.5 Vérifier que $j_p(x) = \int_0^p y e^{-(1+x^2)y^2} dy$ si $p \in \mathbb{N}^*$.

On admet alors la possibilité de permuter les deux intégrales (FUBINI), c'est-à-dire que, pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$u_{n,p} = \int_0^n \left(\int_0^p y e^{-(1+x^2)y^2} \cos(2ax) dy \right) dx = \int_0^p \left(\int_0^n y \cos(2ax) e^{-(1+x^2)y^2} dx \right) dy.$$

2.6 Calculer $\psi(a)$.