SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 11 VARIABLES ALÉATOIRES

11.1 Variables aléatoires infinies

11.1 **a.** Quand on repasse à l'origine, pour la suite de l'expérience, c'est comme si on repartait de $(0,0)$ à l'instant 0, les probabilités des transitions ne sont pas modifiées. C'est un processus sans mémoire. En notant R_1 le temps du premier retour à l'origine : $R_1(\omega) = +\infty$ si on ne revient jamais et $R_1(\omega) = k$ tel que $\forall i \in [\![1;k-1]\!]$, $Z_i \neq (0,0)$ et $Z_k = (0,0)$. On note de même R_2 le temps du second retour. Alors $(N \geqslant 2) = \bigcup\limits_{1 \leqslant i < j} (R_1 = i,\ R_2 = j)$ (réunion d'évènements incompatibles). Ainsi, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(N \geqslant 2) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \Big(\sum\limits_{j=i+1}^{+\infty} \mathbb{P}(R_1 = i,\ R_2 = j) \Big) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \Big(\sum\limits_{j=i+1}^{+\infty} \mathbb{P}(R_1 = i)\,\mathbb{P}_{R_1=i}(R_2 = j) \Big)$.
Le fait que le processus soit sans mémoire nous dit que $\mathbb{P}_{R_1=i}(R_2 = j) = \mathbb{P}(R_1 = j - i)$ ainsi, il vient $\mathbb{P}(N \geqslant 2) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \Big(\sum\limits_{j=i+1}^{+\infty} \mathbb{P}(R_1 = j - i) \Big) \mathbb{P}(R_1 = i) = \Big(\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(R_1 = i) \Big)^2 = \big(\mathbb{P}(N \geqslant 1) \big)^2$ car on peut décomposer $(N \geqslant 1) = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} (R_1 = i)$ (incompatibles deux à deux). De même, $\mathbb{P}(N \geqslant k) = \mathbb{P}(N \geqslant k-1)\,\mathbb{P}(N \geqslant 1)$ ce qui donne par une récurrence simple : $\forall k \geqslant 0,\ \mathbb{P}(N \geqslant k) = \mathbb{P}(N \geqslant 1)^k$.

b. $(N = +\infty) = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} (N \geqslant k)$ et la suite $\big((N \geqslant k) \big)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante donc, par continuité croissante :
$\mathbb{P}(N = +\infty) = \lim\limits_{k \to +\infty} \mathbb{P}(N \geqslant k) = \lim\limits_{k \to +\infty} \mathbb{P}(N \geqslant 1)^k$. Ainsi $\mathbb{P}(N = +\infty) = 1 \iff \sum\limits_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(N \geqslant 1)^k$ diverge car $\sum\limits_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(N \geqslant 1)^k$ diverge si $\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1$ et $\sum\limits_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(N \geqslant 1)^k$ converge si $\mathbb{P}(X \geqslant 1) < 1$ (série géométrique).

c. On a $\mathbb{P}(Z_n = (0,0)) = 0$ si n est impair. Si $n = 2p$ est pair, il faut autant de Sud que de Nord et autant d'Ouest que d'Est pour qu'on revienne en $(0,0)$ à l'instant n. Ainsi en notant $2k$ le nombre de déplacements "horizontaux" dans les $2p$ premiers déplacements ($k \in [\![0;p]\!]$ et ceci constitue une partition), on obtient la relation $\mathbb{P}(Z_{2p} = (0,0)) = \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{2p}{k}\binom{2p-k}{k}\binom{2p-2k}{p-k}\frac{1}{4^{2p}}$ (choix des k Sud parmi les $2p$ déplacements, des k Nord, des $p-k$ Est - le reste ce sera des Ouest forcément).
Alors $\mathbb{P}(Z_{2p} = (0,0)) = \frac{1}{4^{2p}} \sum\limits_{k=0}^{p} \frac{(2p)!}{k!k!(p-k)!(p-k)!} = \frac{1}{4^{2p}} \sum\limits_{k=0}^{p} \binom{2p}{k}\binom{2p}{p-k}$.

d. D'après la formule de Vandermonde : $\mathbb{P}(Z_n = (0,0)) = \mathbb{P}(Z_{2p} = (0,0)) = \frac{1}{4^{2p}} \binom{4p}{2p}^2 = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}^2$ et avec Stirling on trouve, si n pair, $\mathbb{P}(Z_n = (0,0)) = \frac{1}{4^n}\frac{(2n)!^2}{(n!)^4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{4n}}{e^{4n}4^n}\frac{4\pi n(2n)^{4n}}{4\pi^2 n^2 n^{4n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n}$.
Par conséquent $\sum\limits_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(Z_n = (0,0))$ diverge par comparaison aux séries de Riemann.

e. On a $\mathbb{E}(N_p) = 1 \times \mathbb{P}(Z_p = (0,0)) + 0 \times \mathbb{P}(Z_p \neq (0,0)) = \mathbb{P}(Z_p = (0,0))$.
Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(N_0 + \cdots + N_p) = \sum\limits_{k=0}^{p} \mathbb{P}(Z_k = (0,0))$ ce qui prouve la question précédente que $\lim\limits_{p \to +\infty} \mathbb{E}(N_0 + \cdots + N_p) = +\infty$. Comme $N = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} N_n$, on a $N \geqslant N_0 + \cdots + N_p$ et on a admis provisoirement que $\mathbb{E}(N_0 + \cdots + N_p) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N_0 + \cdots + N_p \geqslant k)$. Or $(N_0 + \cdots + N_p \geqslant k) \subset (N \geqslant k)$ donc

$\mathbb{P}(N_0 + \cdots + N_p \geqslant k) \leqslant \mathbb{P}(N \geqslant k)$. Par conséquent, comme $\lim\limits_{p \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N_0 + \cdots + N_p \geqslant k) = +\infty$, la série $\sum\limits_{k \geqslant 1} \mathbb{P}(N \geqslant k)$ diverge. On a bien prouvé que $\mathbb{P}(N = +\infty) = 1$.

11.2 **a.** X_1 est une loi de premier succès dans une répétition indépendantes d'expériences suivant $\mathcal{B}(p)$. Alors X_1 suit une loi géométrique de paramètre p. Alors d'après le cours : $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{1-p}{p^2}$.
b. Si on impose $(X_1 = i)$, pour obtenir $X_2 = j$, il faut continuer les tirages par $FFFF \cdots FFP$ (avec face des tirages $i+1$ à $j-1$ et pile au tirage j). Ainsi, il vient $\mathbb{P}_{(X_1=i)}(X_2 = j) = (1-p)^{j-i-1}p$. On en déduit que $\mathbb{P}(X_2 = j) = \sum\limits_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}_{(X_1=i)}(X_2 = j)\,\mathbb{P}(X_1 = i) = \sum\limits_{i=0}^{j-1} (1-p)^{j-i-1}pp(1-p)^{i-1} = (j-1)(1-p)^{j-2}p^2$. Par conséquent, $\mathbb{E}(X_2) = \sum\limits_{j=2}^{+\infty} j\,\mathbb{P}(X_2 = j) = \sum\limits_{j=2}^{+\infty} j(j-1)(1-p)^{j-2}p^2 = 2p^2 \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \dbinom{j}{2}(1-p)^{k-2} = \dfrac{2p^2}{(1-(1-p))^3} = \dfrac{2}{p}$.
c. De même, par le théorème du transfert, $\mathbb{E}(X_2(X_2-2)) = \sum\limits_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)(1-p)^{k-2}p^2$ ce qui donne $\mathbb{E}(X_2(X_2-2)) = 6p^2(1-p) \sum\limits_{k=3}^{+\infty} \dbinom{k}{3}(1-p)^{k-3} = \dfrac{6p^2(1-p)}{1-(1-p))^4} = \dfrac{6(1-p)}{p^2}$. Alors par linéarité de l'espérance, $\mathbb{V}(X_2) = \mathbb{E}(X_2^2) - \mathbb{E}(X_2)^2 = \mathbb{E}(X_2(X_2-2)) + 2\,\mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(X_2)^2 = \dfrac{6(1-p)}{p^2} + \dfrac{4}{p} - \dfrac{4}{p^2} = \dfrac{2(1-p)}{p^2}$.
d. Chaque tirage élémentaire de la forme $FFFPFP \cdots FFPPFFFFP$ où l'on a n piles (dont le dernier) parmi les k premiers lancers a une probabilité de $p^n(1-p)^{k-n}$. Pour en connaître leur nombre, comme le dernier tirage est imposé car $X_n = n$, il ne reste plus qu'à choisir l'emplacement des $n-1$ autres pile parmi les $k-1$ premiers lancers. Ainsi $\mathbb{P}(X_n = k) = 0$ si $k < n$ et $\mathbb{P}(X_n = k) = \dbinom{nk-1}{n-1}p^n(1-p)^{n-k}$ sinon. On en déduit que $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} k\dbinom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n} = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} n\dbinom{k}{n}p^n(1-p)^{k-n} = \dfrac{np^n}{(1-(1-p))^{n+1}}$ d'après l'exercice précédent donc $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{n}{p}$ comme attendu.

11.3 **a.** Les $p_{i,j}$ sont positifs. Ils définissent bien une loi de probabilité conjointe car leur somme totale

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} p_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} \frac{\lambda^i e^{-\lambda} p^j q^{i-j}}{j!(i-j)!} \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \times \left(\sum_{j=0}^{i} \frac{i!}{j!(i-j)!} \times p^j q^{i-j} \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{\lambda} e^{-\lambda} = 1.$$

En effet, par le binôme de Newton : $\sum\limits_{j=0}^{i} \dfrac{i!}{j!(i-j)!} \times p^j q^{i-j} = (p+q)^i = 1$.
On aurait pu aussi le vérifier en sommant par lignes :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=j}^{+\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda} p^j q^{i-j}}{j!(i-j)!} \right) = e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j p^j}{j!} \left(\sum_{i=j}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{i-j}}{(i-j)!} \right) = e^{-\lambda} e^{-\lambda q} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda p)^j}{j!} = e^{-\lambda} e^{-\lambda q} e^{\lambda p} = 1.$$

•] Loi marginale de Y : $\forall j \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y = j) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} p_{i,j} = \dfrac{(\lambda p)^j}{j!} \times e^{-\lambda p}$: Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

• Loi marginale de X : $\mathbb{P}(X = i) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} p_{i,j} = \sum\limits_{j=0}^{i} \dfrac{\lambda^i e^{-\lambda} p^j q^{i-j}}{j!(i-j)!} = \dfrac{\lambda^i}{i!} \times e^{-\lambda} \times \sum\limits_{j=0}^{i} \dfrac{i!}{j!(i-j)!} \times p^j q^{i-j}$ donc $\mathbb{P}(X = i) = \dfrac{\lambda^i}{i!} \times e^{-\lambda} \times (p+q)^i = \dfrac{\lambda^i}{i!} \times e^{-\lambda}$: X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

b. • Loi conditionnelle de Y sachant $(X = i)$: $\mathbb{P}_{X=i}(Y = j) = \dfrac{\mathbb{P}(X = i,\ Y = j)}{\mathbb{P}(X = i)} = \dfrac{i!}{j!(i-j)!} p^j q^{i-j}$ si $0 \leqslant j \leqslant i$ et $\mathbb{P}_{X=i}(Y = j) = 0$ sinon. La loi conditionnelle de Y sachant $(X = i)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(i, p)$.
Ce n'est pas la loi de Y : les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes.
c. • Loi de $Z = X - Y$: $p_{i,j}$ est nul dès que $j > i$. Par conséquent, X est presque sûrement supérieur à Y. Z est une variable aléatoire à valeurs entières positives ou nulles. $\forall k \in \mathbb{N},\ (Z = k) = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} \big((X = j + k) \cap (Y = j)\big)$.

Ainsi $\mathbb{P}(Z=k)=\sum_{j=0}^{+\infty}p_{j+k,j}=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{j!k!}p^jq^k=\frac{(\lambda q)^k}{k!}\times e^{-\lambda}\times\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(\lambda p)^j}{j!}=\frac{(\lambda q)^k}{k!}\times e^{-\lambda}\times e^{\lambda p}=\frac{(\lambda q)^k}{k!}\times e^{-\lambda q}$.
$Z=X-Y$ suit donc la loi de POISSON $\mathcal{P}(\lambda q)$.

- Loi conditionnelle de Y sachant $Z=n$: $\mathbb{P}_{Z=n}(Y=j)=\frac{\mathbb{P}(Y=j,\ X-Y=n)}{\mathbb{P}(Z=n)}=\frac{\mathbb{P}(Y=j,\ X=j+n)}{\mathbb{P}(Z=n)}$ ce qui donne après calculs $\mathbb{P}_{Z=n}(Y=j)=\frac{(\lambda p)^j}{j!}e^{-\lambda p}$. La loi conditionnelle de Y sachant $(Z=n)$ est la loi binomiale $\mathcal{P}(\lambda p)$. C'est exactement la loi de Y et ceci $\forall n\in\mathbb{N}$: les variables Y et $Z=X-Y$ sont donc indépendantes.

On pouvait s'attendre au résultat en constatant au départ que $(Y=j,\ Z=i)=(X=i+j,\ Y=j)$ ce qui entraîne : $\mathbb{P}(Y=j,\ Z=i)=\mathbb{P}(X=i+j,\ Y=j)=p_{i+j,j}=\frac{\lambda^{i+j}e^{-\lambda}p^jq^i}{j!i!}=\frac{\lambda^{i+j}e^{-\lambda p-\lambda q}p^jq^i}{j!i!}$ car $p+q=1$ donc $\mathbb{P}(Y=j,\ Z=i)=\left(\frac{(\lambda p)^j}{j!}\times e^{-\lambda q}\right)\left(\frac{(\lambda q)^i}{i!}\times e^{-\lambda q}\right)$ donc on se doute bien qu'on va obtenir de l'indépendance avec $P(Y=j)=\frac{(\lambda p)^j}{j!}\times e^{-\lambda q}$ et $\mathbb{P}(Z=i)=\frac{(\lambda p)^i}{i!}\times e^{-\lambda p}$.

On peut alors utiliser le cours pour dire que comme $X=Y+Z$ et que Y suit une loi $\mathcal{P}(\lambda q)$ et Z une loi $\mathcal{P}(\lambda p)$ et qu'elles sont indépendantes, on a X qui suit une loi $\mathcal{P}(\lambda p+\lambda q)=\mathcal{P}(\lambda)$.

11.4 **a.** On doit avoir $\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)=1$, ce qui équivaut à $C\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k}=\frac{C}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3C}{2}$ donc $C=\frac{2}{3}$. Ainsi $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(1+X=k)=\mathbb{P}(X=k-1)=\frac{2}{3}\frac{1}{3^{k-1}}$ donc $1+X$ suit une loi géométrique de paramètre $p=\frac{2}{3}$.

b. On a $Z(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(Z\leqslant k)=\mathbb{P}(X\leqslant k,\ Y\leqslant k)=\mathbb{P}(X\leqslant k)\mathbb{P}(Y\leqslant k)$ par indépendance.
Or $\mathbb{P}(X\leqslant k)=\mathbb{P}(Y\leqslant k)=\sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(X=j)=\frac{2}{3}\frac{1-(1-p)^{k+1}}{1-(1-p)}=1-\frac{1}{3^{k+1}}$. Ainsi $\mathbb{P}(Z\leqslant k)=\left(1-\frac{1}{3^{k+1}}\right)^2$.

Alors : $\forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(Z=k)=\mathbb{P}(Z\leqslant k)-\mathbb{P}(Z\leqslant k-1)=\left(1-\frac{1}{3^{k+1}}\right)^2-\left(1-\frac{1}{3^k}\right)^2$.

On a $W(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(W>k)=\mathbb{P}(X>k,\ Y>k)=\mathbb{P}(X>k)\mathbb{P}(Y>k)$ par indépendance. Or on a $\mathbb{P}(X>k)=\mathbb{P}(Y>k)=1-\mathbb{P}(X\leqslant k)=\frac{1}{3^{k+1}}$. Ainsi $\mathbb{P}(W>k)=\frac{1}{9^{k+1}}$. Comme $\mathbb{P}(W>-1)=1=\frac{1}{9^{-1+1}}$), il vient $\forall k\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(W=k)=\mathbb{P}(W>k-1)-\mathbb{P}(W>k)=\frac{1}{9^k}-\frac{1}{9^{k+1}}=\frac{8}{9}\left(\frac{1}{9}\right)^k$.

On en déduit que $1+W$ suit une loi géométrique de paramètre $q=\frac{8}{9}$.

On sait alors d'après le cours que $\mathbb{E}(1+W)=\frac{1}{q}=\frac{9}{8}$ donc, par linéarité : $\mathbb{E}(W)=\frac{1}{8}$. Toujours par linéarité : $W+Z=X+Y$ et $\mathbb{E}(1+X)=\mathbb{E}(1+Y)=\frac{1}{p}=\frac{3}{2}$ donc $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)=\frac{1}{2}$ d'où $\mathbb{E}(Z)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

11.5 Notons $p_{i,j}=\mathbb{P}\big((X,Y)=(i,j)\big)$. On veut $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}p_{i,j}=1$. Or $\sum_{i=0}^{+\infty}p_{i,j}=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\alpha}{2^ij!}=\frac{\alpha}{j!}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$. De plus, $\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}p_{i,j}\right)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{2\alpha}{j!}=2\alpha e$. Ainsi : $\alpha=\frac{1}{2e}$ d'où $\forall(i,j)\in\mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}((X,Y)=(i,j))=\frac{e^{-1}}{2^{i+1}j!}$.
Les lois marginales sont aisées à déterminer :

- $\forall i\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=i)=\sum_{j=0}^{+\infty}p_{i,j}=\frac{e^{-1}}{2^{i+1}}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}=\frac{1}{2^{i+1}}$.
- $\forall j\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y=j)=\sum_{i=0}^{+\infty}p_{i,j}=\frac{e^{-1}}{j!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{i+1}}=\frac{e^{-1}}{j!}=\frac{1^j}{j!}e^{-1}$.

$1+X$ sui la loi géométrique de paramètre $p=\frac{1}{2}$ et Y suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda=1$.

11.6 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, comme $\{S = n\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{N = k,\ X_1 + \cdots + X_k = n\}$ (réunion disjointe), on obtient la relation $\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k,\ X_1 + \cdots + X_k = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} (N = k)\, \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k = n)$ par indépendance mutuelle. Pour $t \in]-1;1[$, $G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\, \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k = n)t^n \Big)$. D'après l'énoncé, $G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\, \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k = n)t^n \Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k = n)t^n \Big) \mathbb{P}(N = k)$ donc $G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} G_{X_1 + \cdots + X_k}(t)\, \mathbb{P}(N = k)$. Or, par indépendance mutuelle, on a $G_{X_1 + \cdots + X_k} = \prod_{i=1}^{k} G_{X_i} = G_{X_1}^k$ et on arrive enfin à $G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\big(G_{X_1}(t)\big)^k = G_N\big(G_X(t)\big)$.

b. G_X et G_n sont donc des fonctions dérivables en 1 d'après le cours et, par composition, G_S aussi avec $G_S'(1) = G_X'(1)G_N'\big(G_X(1)\big) = G_X'(1)G_N'(1))$ car $G_X(1) = 1$. D'après le cours, $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\, \mathbb{E}(X)$.

c. • $\forall t \in \mathbb{R},\ G_S(t) = e^{\lambda(1-p+pt-1)} = e^{\lambda p(t-1)}$ donc S suit la loi $\mathcal{P}(\lambda p)$.

• Si $|t| < 1$, $G_S(t) = \dfrac{q(1-p+pt)}{1-(1-q)(1-p+pt)} = \dfrac{q(1-p)+pqt}{p+q-pq-p(1-q)t} = \dfrac{q(1-p)+pqt}{p+q-pq} \times \dfrac{1}{1 - \frac{p(1-q)t}{p+q-pq}}$.

On développe avec la série géométrique, $G_S(t) = \dfrac{q(1-p)+pqt}{p+q-pq} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\dfrac{p(1-q)}{p+q-pq}\Big)^n t^n$. En identifiant, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(S = n) = \dfrac{q(1-p)}{p+q-pq}\Big(\dfrac{p(1-q)}{p+q-pq}\Big)^n + \dfrac{pq}{p+q-pq}\Big(\dfrac{p(1-q)}{p+q-pq}\Big)^{n-1} = \dfrac{p^n q(1-q)^{n-1}}{(p+q-pq)^{n+1}}$ (unicité des coefficients d'une série entière). De plus, $\mathbb{P}(S = 0) = \dfrac{q(1-p)}{p+q-pq}$.

11.2 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

11.7 Soit X_i la VA égale au nombre de point obtenu à la question i. Soit A_i l'évènement "l'élève répond juste la première fois à la question i", B_i : "l'élève répond juste la seconde fois à la question i. On note n le nombre de questions et aussi X la note qu'obtient le candidat : $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Alors $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(A_i) = \dfrac{1}{k}$ (réponse au hasard parmi k réponses possibles).

De plus, $\mathbb{P}\Big(X_i = \dfrac{1}{2}\Big) = \mathbb{P}(\overline{A_i} \cap B_i) = \mathbb{P}_{\overline{A_i}}(B_i)\, \mathbb{P}(\overline{A_i}) = \dfrac{1}{k-1}\, \dfrac{k-1}{k} = \dfrac{1}{k}$.

Ainsi : $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 1) - \mathbb{P}\Big(X_i = \dfrac{1}{2}\Big) = \dfrac{k-2}{k}$.

On en déduit que $\mathbb{E}(X_i) = 0 \times \mathbb{P}(X_i = 0) + \dfrac{1}{2} \times \mathbb{P}\Big(X_i = \dfrac{1}{2}\Big) + 1 \times \mathbb{P}(X_i = 1) = \dfrac{3}{2k}$ donc, par linéarité de l'espérance, la moyenne que peut obtenir l'élève est de $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \dfrac{3n}{2k}$. Si on veut que cette moyenne soit égale à 5, $\dfrac{3n}{2k} = 5 \Longleftrightarrow 3n = 10k$. Mais 3 et 10 sont premiers entre eux donc ceci implique que $10|n$ et $3|k$ par le théorème de Gauss. Réciproquement, si $n = 10p$ est un multiple de 10 et $k = 3p$, on a $\mathbb{E}(X) = 5$.

La note moyenne que peut obtenir l'élève est de 5 ssi il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 10p$ et $k = 3p$.

11.8 **a.** Comme $\text{rang}\,(U\,{}^tU) \leqslant \text{Min}(\text{rang}\,(U), \text{rang}\,({}^tU)) \leqslant 1$ car U est une matrice colonne, on a $\text{rang}\,(M) \in \{0, 1\}$. Or $\text{Tr}\,(M) = \text{Tr}\,(U\,{}^tU) = ||U||^2$ donc si $M = 0$, on a $U = 0$ et, si $U = 0$, il est clair que $M = 0$. Ainsi,

$M = 0 \iff U = 0$ donc $\text{rang}\,(M) = 0 \iff U = 0$: $\text{rang}\,(M)$ suit la loi de BERNOULLI de paramètre $q = \mathbb{P}(U \neq 0)$.

Comme $(U = 0) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k = 0)$ et que les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, $\mathbb{P}(\text{rang}\,(M) = 0) = \mathbb{P}(U = 0) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = 0) = (1-p)^n$ d'où $\mathbb{P}(\text{rang}\,(M) = 1) = 1 - (1-p)^n$.

Ainsi, $\text{rang}\,(M)$ suit une loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(q)$ de paramètre $q = 1 - (1-p)^n$.

b. Classiquement : $M^2 = U{}^tUU{}^tU = U({}^tUU){}^tU = ||U||^2 M$ et $||U||^2 = \text{Tr}\,({}^tUU) = \text{Tr}\,(U{}^tU) = \text{Tr}\,(M)$ donc $M^2 = \text{Tr}\,(M) M$. On en déduit que $(M^2 = M) = (\text{Tr}\,(M) = 1) \cup (M = 0)$ (réunion disjointe) donc $\mathbb{P}(M^2 = M) = \mathbb{P}(\text{Tr}\,(M) = 1) + \mathbb{P}(M = 0)$ mais $\text{Tr}\,(M) = 1 \iff X_1^2 + \cdots + X_n^2 = 1 \iff X_1 + \cdots + X_n = 1$ donc $\mathbb{P}(\text{Tr}\,(M) = 1) = \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1}$ car $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit d'après le cours la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. La probabilité que M soit une matrice de projection est $\mathbb{P}(M^2 = M) = np(1-p)^{n-1} + (1-p)^n = (1-p)^{n-1}((n-1)p + 1)$.

11.9 **a.** En prenant $B = (i)$, on a $A = M$ et $\chi_A = X^2$ donc A est nilpotente et non nulle. Si elle était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale avec les valeurs propres sur la diagonale. Or a seule valeur propre de A est 0 donc A serait semblable à la matrice 0 donc égale à 0 : NON ! A n'est donc pas diagonalisable.
b. D'abord le cas $n = 1$: $\chi_A = X^2 - b^2(1 + b^2)$ qui est scindé à racines simples si $b \notin \{0, i, -i\}$. Donc A est diagonalisable si et seulement si $b \notin \{i, -i\}$.
Dans le cas $n = 2$, la matrice $A' = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ diagonale par blocs est donc semblable à A par l'indication. A est donc DZ si et seulement si chacun des blocs l'est donc si $\text{Sp}(B) \cap \{i, -i\} = \emptyset$.
c. Les valeurs propres de B sont les $X_1, \ldots, X_n$. Si $n \not\equiv 0$ [4] alors p vaut 1 car i et $-i$ ne peuvent pas être dans $\text{Sp}(B)$. Si $n \equiv 0$ [4], alors par indépendance, $p = \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$.

11.10 **a.** Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $(Y = n) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (Y = n, X = k)$ (réunion d'évènements incompatibles) donc, par σ-additivité, comme $\mathbb{P}(Y = n, X = k) = 0$ si $k > n$ par hypothèse, on a $\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y = n, X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^n (1-p)^n p = a^n (1-p)^n p \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = p(2a(1-p))^n$. De plus, comme Y est aussi à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (Y = n)$ (incompatibles) donc, toujours par σ-additivité, il vient $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n) = p \sum_{n=0}^{+\infty} (2a(1-p))^n = \frac{p}{1 - 2a(1-p)}$ (la série converge forcément).
Ainsi, $p = 1 - 2a(1-p)$ devient $a = \frac{1}{2}$ car $p \neq 1$.

b. On a déjà calculé $\mathbb{P}(Y = n) = p(1-p)^n$ à la question précédente sachant que $a = \frac{1}{2}$. Ainsi, $1 + Y$ suit la loi géométrique de paramètre p car $\mathbb{P}(Y + 1 = n) = \mathbb{P}(Y = n - 1) = p(1-p)^{n-1}$.

c. $\forall k \in \mathbb{N}$, $(X = k) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (Y = n,\ X = k)$ (réunion disjointe) donc, par σ-additivité, on obtient comme avant $\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n,\ X = k) = p \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-p)^n$. Or, en dérivant k fois la relation classique $\forall x \in]-1; 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ (série entière de rayon de convergence 1), on obtient la formule du binôme négatif $\forall x \in]-1; 1[$, $\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \iff \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$.

Ainsi $\mathbb{P}(X=k)=p\left(\frac{1-p}{2}\right)^k\times\frac{1}{\left(1-(\frac{1-p}{2})\right)^{k+1}}=\left(\frac{2p}{1+p}\right)\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k=\left(\frac{2p}{1+p}\right)\left(1-\frac{2p}{1+p}\right)^k$ après simplification. Ainsi, $1+X$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{2p}{1+p}$.

d. $\mathbb{P}(X=Y=0)=p\neq\frac{2p^2}{1+p}=\mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0)$ car $p^2\neq p$: X et Y ne sont pas indépendantes.

e. Z prend presque sûrement ses valeurs dans $\mathbb{N}$ d'après les conditions imposées à X et Y et pour $m\in\mathbb{N}$, comme avant, on a $(Z=m)=\bigcup_{k=0}^{+\infty}(X=k,\ Y=m+k)$ donc $\mathbb{P}(Z=m)=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{m+k}{k}a^{m+k}(1-p)^{m+k}p$. Comme $\binom{m+k}{k}=\binom{m+k}{m}$ et en posant $i=m+k$, on a $\mathbb{P}(Z=m)=\sum_{i=m}^{+\infty}\binom{i}{m}(a(1-p))^ip$ donc $\mathbb{P}(Z=m)=p(a(1-p))^m\sum_{i=m}^{+\infty}\binom{i}{m}(a(1-p))^{i-m}=p\left(\frac{1-p}{2}\right)^m\times\frac{1}{\left(1-(\frac{1-p}{2})\right)^{m+1}}=\frac{2p}{1+p}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^m$.

Ainsi, $1+Z$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{2p}{1+p}$, comme X.

f. Comme $\mathbb{P}(Y=n)=p(1-p)^n>0$, la loi de X sachant $(Y=n)$ existe pour tout $n\in\mathbb{N}$. Si $k>n$, $\mathbb{P}(X=k|Y=n)=0$ par hypothèse et, si $k\in[\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k|Y=n)=\frac{\mathbb{P}(X=k,Y=n)}{\mathbb{P}(Y=n)}$ par définition donc $\mathbb{P}(X=k|Y=n)=\frac{\binom{n}{k}(1/2)^n(1-p)^np}{p(1-p)^n}=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. X sachant $(Y=n)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$.

11.11 **a.** En supposant que les résultats des parties sont indépendantes, X étant le nombre de succès dans une répétition de n expériences suivant une loi de Bernoulli de loi $\mathcal{B}(0.4)$ (gagner ou pas la partie de golf), X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(7,0.4)$. Ainsi : $\forall k\in[\![0;7]\!],\ \mathbb{P}(X=k)=\binom{k}{7}0.4^k0.6^{7-k}$.

Comme $Y=30(7-X)$ et que $X(\Omega)=[\![0;7]\!]$, on a $Y(\Omega)=\{0,30,60,90,120,150,180,210\}$.

b. Comme $(X=4)=(Y=90)$, on a $P(Y=90)=\mathbb{P}(X=4)=\binom{7}{4}(0.4)^4(0.6)^3\sim 0.19$.

c. Par linéarité de l'espérance, comme $\mathbb{E}(X)=7\times 0.4=2.8$, il vient :

$$\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(210-30X)=210-30\,\mathbb{E}(X)=210-30\times 2.8=210-84=126.$$

Question supplémentaire : on sait que $\mathbb{V}(aX+b)=a^2\,\mathbb{V}(X)$ en général et on connaît la variance d'une VA X qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$: $\mathbb{V}(X)=np(1-p)$.

Dans notre cas : $\mathbb{V}(Y)=\mathbb{V}(210-30X)=\mathbb{V}(30X)=900\,\mathbb{V}(X)=900\times 7\times 0.4\times 0.6=1512$.

11.12 **a.** X_n est le nombre de succès dans une suite de n expériences indépendantes suivant la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$ (prendre ou pas la boule 1 parmi n boules avec probabilité uniforme). Ainsi X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{n}\right)$ ce qui se traduit par $\forall k\in[\![0;n]\!],\ \mathbb{P}(X_n=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-k}$.

On sait d'après le cours qu'en notant $p=\frac{1}{n}$, on a $\mathbb{E}(X_n)=np=1$ et $\mathbb{V}(X_n)=np(1-p)=\frac{n-1}{n}$.

b. Pour $k\in\mathbb{N}^*$ fixé, $\forall n\geqslant k,\ \mathbb{P}(X_n=k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-1)^{n-k}}{n^n}$ et avec l'équivalent $q!\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{2\pi q}\left(\frac{q}{e}\right)^q$ de Stirling, on a $\mathbb{P}(X_n=k)\underset{+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{2\pi n}n^ne^{n-k}}{k!\sqrt{2\pi(n-k)}(n-k)^{n-k}e^n}\times\frac{(n-1)^{n-k}}{n^n}$ ce qui devient après simplification $\mathbb{P}(X_n=k)\underset{+\infty}{\sim}\frac{e^{-k}}{k!}\left(\frac{n-1}{n-k}\right)^{n-k}$. Or $\left(\frac{n-1}{n-k}\right)^{n-k}=e^{(n-k)\ln\left(\frac{n-1}{n-k}\right)}=e^{(n-k)\ln\left(1+\frac{k-1}{n-k}\right)}\to e^{k-1}$ par continuité de l'exponentielle et car $\ln\left(1+\dfrac{k-1}{n-k}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k-1}{n-k}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{e^{-k}e^{k-1}}{k!} = \dfrac{1}{ek!}$.

Ou alors on écrit $\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-k}$ et on conclut comme avant que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{e^{-k}e^{k-1}}{k!} = \dfrac{1}{ek!}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-k} = \dfrac{1}{e}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} = \dfrac{1}{k!}$.

La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X suivant la loi de POISSON de paramètre 1.

c. Comme $\Omega = (X_n \text{ pair}) \cup (X_n \text{ impair})$ (incompatibles), alors $1 = \mathbb{P}(X_n \text{ pair}) + \mathbb{P}(X_n \text{ impair}) = q(n) + p(n)$. Par définition, $q(n) = \mathbb{P}(X_n \text{ pair})$ or on décompose $(X_n \text{ pair}) = \bigcup\limits_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\,\text{pair}}} (X_n = k) = \bigcup\limits_{0\leqslant 2k\leqslant n} (X_n = 2k)$ (incompatibles), d'où par σ-additivité : $q(n) = \sum\limits_{0\leqslant 2k\leqslant n} \mathbb{P}(X_n = 2k) = \sum\limits_{0\leqslant 2k\leqslant n} \dbinom{n}{2k}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{2k}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-2k}$.

De même $p(n) = \sum\limits_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \mathbb{P}(X_n = 2k+1) = \sum\limits_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \dbinom{n}{2k+1}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{2k+1}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-2k-1}$.

Par conséquent : $q(n) - p(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-k} = \left(\dfrac{n-1}{n} - \dfrac{1}{n}\right)^n = \left(\dfrac{n-2}{n}\right)^n$ (car on a $(-1)^{2k} = 1$ et $(-1)^{2k+1} = -1$). Puisque $p(n) - q(n) = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)\right)$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(q(n)-p(n)\big) = e^{-2}$ car $\ln\left(1-\frac{2}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{n}$. Ainsi, comme $p(n) = \dfrac{p(n)+q(n)+p(n)-q(n)}{2}$ et $q(n) = \dfrac{p(n)+q(n)+q(n)-p(n)}{2}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} p(n) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2e^2} \sim 0.43$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q(n) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2e^2} \sim 0.57$.

d. Si on ne fait que des 1 (ou des 2), $\mathbb{P}(X_n = n) = \dfrac{1}{n^n}$ (ou $\mathbb{P}(Y_n = n) = \dfrac{1}{n^n}$). Mais il est impossible d'avoir $X_n = Y_n = n$: $\mathbb{P}(X_n = Y_n = n) = 0 \neq \mathbb{P}(X_n = n)\,\mathbb{P}(Y_n = n)$. Ainsi, X_n et Y_n ne sont pas indépendants.

11.13 On numérote les figurines de 1 à n, on note X_k le numéro de la figurine obtenue au paquet k.

a. $N_1 = T_1 = 1$ et T_2 suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$: $\forall k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(T_2 = k) = \dfrac{n-1}{n}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$ ($k-1$ échecs consécutifs et un succès). En effet, la probabilité d'avoir une figurine différente vaut $\dfrac{n-1}{n}$ car il y a n figurines et une déjà obtenue au premier paquet.

b. Soit $(\lambda_2,\lambda_3) \in (\mathbb{N}^*)^2$, si $\lambda_2 \geqslant \lambda_3$, $\mathbb{P}\big(T_2 = \lambda_2,\ T_3 = \lambda_3\big) = 0$ par construction de T_2, T_3. De plus, si $\lambda_2 < \lambda_3$, $\mathbb{P}\big(T_2 = \lambda_2,\ T_3 = \lambda_3\big) = \mathbb{P}(N_2 = 1+\lambda_2, N_3 = 1+\lambda_2+\lambda_3)$ qui vaut, en revenant aux évènements élémentaires, $\mathbb{P}(N_2 = 1+\lambda_2, \{X_{\lambda_2+1},\cdots,X_{\lambda_2+\lambda_3-1}\} \in \{X_1, X_{\lambda_2}\}, X_{1+\lambda_2+\lambda_3} \notin \{X_1, X_{\lambda_2}\})$. Par indépendance de $(X_k)_{k\geqslant 1}$, $\mathbb{P}\big(T_2 = \lambda_2,\ T_3 = \lambda_3\big) = \mathbb{P}(N_2 = 1+\lambda_2)P(\{X_{\lambda_2+1},\cdots,X_{\lambda_2+\lambda_3-1}\} \in \{X_1, X_{\lambda_2}\}, X_{1+\lambda_2+\lambda_3} \notin \{X_1, X_{\lambda_2}\})$ ce qui donne finalement $\mathbb{P}\big(T_2 = \lambda_2,\ T_3 = \lambda_3\big) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\lambda_2-1}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\left(\dfrac{2}{n}\right)^{\lambda_3-1}\left(\dfrac{n-2}{n}\right)$.

Par conséquent : $\mathbb{P}(T_3 = \lambda_3) = \sum\limits_{\lambda_2=2}^{\lambda_3-1} \mathbb{P}\big(T_2 = \lambda_2,\ T_3 = \lambda_3\big) = \left(\dfrac{(n-1)(n-2)}{n^2}\right)\left(\dfrac{2}{n}\right)^{\lambda_3-1}\sum\limits_{\lambda_2=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\lambda_2-1}$ donc $\mathbb{P}(T_3 = \lambda_3) = \left(\dfrac{(n-1)(n-2)}{n^2}\right)\left(\dfrac{2}{n}\right)^{\lambda_3-1}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-1} = \left(\dfrac{n-2}{n}\right)\left(\dfrac{2}{n}\right)^{\lambda_3-1}$.

On en déduit que T_3 suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{n-2}{n}$ car $\dfrac{2}{n} = 1 - \dfrac{n-2}{n}$.

c. On vérifie $\mathbb{P}\big(T_2 = \lambda_2,\ T_3 = \lambda_3\big) = \mathbb{P}(T_2 = \lambda_2)\,\mathbb{P}(T_3 = \lambda_3) = \dfrac{n-1}{n}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\lambda_2-1}\left(\dfrac{n-2}{n}\right)\left(\dfrac{2}{n}\right)^{\lambda_3-1}$ ce qui prouve que T_2 et T_3 sont indépendantes.

d. Comme à la question **b.**, pour $m \in [\![1;n]\!]$, T_m suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{n-m+1}{n}$ (quand on a

$m-1$ figurines, on attend d'en avoir une de plus avec une probabilité de l'avoir à chaque paquet de $\dfrac{n-m+1}{n}$).
En supposant $T_1, \cdots, T_n$ deux à deux indépendants (ce qu'on pourrait démontrer par indépendance des $(X_k)_{k\geqslant 1}$), on a donc $N_n = T_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} T_k$. Comme l'espérance est linéaire, on a $\mathbb{E}(N_n) = n\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} = H_n$ donc $\mathbb{E}(N_n) \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$ classiquement. Par indépendance, $\mathbb{V}(N_n) = \sum\limits_{k=2}^{n}\mathbb{V}(T_k)$ car $\mathbb{V}(N_1) = 0$. Or T_k suit la loi géométrique $p_k = \dfrac{n-k+1}{n}$ donc $\mathbb{V}(T_k) = \dfrac{1-p_k}{p_k^2} = \dfrac{(k-1)n}{(n-k+1)^2}$ donc, en posant $j = n-k+1$, on a $\mathbb{V}(N_n) = \sum\limits_{j=1}^{n-1}\dfrac{(n-j)n}{j^2}$ ce qui donne $\mathbb{V}(N_n) = n^2\sum\limits_{j=1}^{n-1}\dfrac{1}{j^2} - n\sum\limits_{j=1}^{n-1}\dfrac{1}{j}$. Or on sait que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ et que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ donc $n\sum\limits_{j=1}^{n-1}\dfrac{1}{j} \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n) \underset{+\infty}{=} o\left(n^2\sum\limits_{j=1}^{n-1}\dfrac{1}{j^2}\right)$ car $n^2\sum\limits_{j=1}^{n-1}\dfrac{1}{j^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2 n^2}{6}$. Ainsi, $\mathbb{V}(N_n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n^2\pi^2}{6}$.

e. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\Big(\big|N_n - \mathbb{E}(N_n)\big| > \varepsilon\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(N_n)}{\varepsilon^2}$. On en déduit en prenant $\alpha > 0$ et $\varepsilon = \alpha\,\mathbb{E}(N_n)$ que $\mathbb{P}\Big(\big|N_n - \mathbb{E}(N_n)\big| > \alpha\,\mathbb{E}(N_n)\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(N_n)}{\alpha^2\,\mathbb{E}(N_n)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6\alpha^2\ln(n)^2}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi : $\forall \alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{N_n}{\mathbb{E}(N_n)} - 1\right| > \alpha\right) = 0$.

Soit $\varepsilon \in]0;1[$, il existe d'après **d.** un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left|\dfrac{\mathbb{E}(N_n)}{n\ln(n)} - 1\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ ce qui implique que $\dfrac{\mathbb{E}(N_n)}{n\ln(n)} < 2$.
Or, par inégalité triangulaire, on a $\dfrac{|N_n - n\ln(n)|}{n\ln(n)} \leqslant \dfrac{|N_n - \mathbb{E}(N_n)|}{n\ln(n)} + \dfrac{|\mathbb{E}(N_n) - n\ln(n)|}{n\ln(n)}$ ce qu'on peut réécrire $\left|\dfrac{N_n}{n\ln(n)} - 1\right| \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(N_n)}{n\ln(n)}\left|\dfrac{N_n}{\mathbb{E}(N_n)} - 1\right| + \left|\dfrac{\mathbb{E}(N_n)}{n\ln(n)} - 1\right|$. Par conséquent, $\forall n \geqslant n_0$, si $\left|\dfrac{N_n}{n\ln(n)} - 1\right| > \varepsilon$, comme $\left|\dfrac{\mathbb{E}(N_n)}{n\ln(n)} - 1\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, on a $\dfrac{\mathbb{E}(N_n)}{n\ln(n)}\left|\dfrac{N_n}{\mathbb{E}(N_n)} - 1\right| > \varepsilon - \dfrac{\varepsilon}{2} = \dfrac{\varepsilon}{2}$. De plus, comme $\dfrac{\mathbb{E}(N_n)}{n\ln(n)} < 2$, on en déduit que $\left|\dfrac{N_n}{\mathbb{E}(N_n)} - 1\right| > \dfrac{\varepsilon}{4} = \alpha$. On vient d'établir que $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{N_n}{n\ln(n)} - 1\right| > \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{N_n}{\mathbb{E}(N_n)} - 1\right| > \alpha\right)$.
On a montré que $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{N_n}{\mathbb{E}(N_n)} - 1\right| > \alpha\right) = 0$ et on en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{N_n}{n\ln(n)} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0$.

11.14 **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par indépendance de X et Y, $\mathbb{P}(S = n) = \mathbb{P}(X + Y = n) = \sum\limits_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = n-k)$ donc $\mathbb{P}(S = n) = \sum\limits_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = n-k) = \sum\limits_{k=0}^{n} p(1-p)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1} = (n+1)p^2(1-p)^{n-2}$.

b. Soit $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{S=n}(X = k) = \dfrac{\mathbb{P}(X = k, S = n)}{\mathbb{P}(S = n)} = \dfrac{\mathbb{P}(X = k, Y = n-k)}{\mathbb{P}(S = n)}$ donc $\mathbb{P}_{S=n}(X = k) = 0$ si $k > n$ et $\mathbb{P}_{S=n}(X = k) = \dfrac{p(1-p)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1}}{(n+1)p^2(1-p)^{n-2}} = \dfrac{1}{n+1}$, la loi de X sachant $S = n$ est la loi uniforme sur $[\![0;n]\!]$.

c. Prenons d'abord $n = 0$, alors $\mathbb{P}_{Z>0}(Z > 1) = 1-p$. Mais comme Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a $(Z > 0) = \Omega$ donc $\mathbb{P}_{Z>0}(Z > 1) = \mathbb{P}(Z > 1) = 1 - p = 1 - \mathbb{P}(Z = 1)$ donc $\mathbb{P}(Z = 1) = p$.
Montrons par récurrence que, $\forall n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(Z > n) = (1-p)^n$. La propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
Soit $n \geqslant 2$ et $\mathbb{P}(Z > n) = (1-p)^n$, $\mathbb{P}_{Z>n}(Z > n+1) = 1 - p = \dfrac{\mathbb{P}(Z > n+1)}{\mathbb{P}(Z > n)}$ car il est clair que l'on a $(Z > n+1, Z > n) = (Z > n+1)$. Ainsi, par hypothèse de récurrence : $\mathbb{P}(Z > n+1) = (1-p)^{n+1}$.
On a donc par principe de récurrence : $\forall n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(Z > n) = (1-p)^n$ (vrai même pour $n = 0$) donc $\forall n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(Z > n) - \mathbb{P}(Z > n-1) = (1-p)^n - (1-p)^{n-1} = p(1-p)^{n-1}$. Ainsi, $Z \sim \mathcal{G}(p)$.
Comme une loi géométrique modélise le numéro du premier succès (pile) dans une répétition infinie de tirages

de pile ou face (où la probabilité de faire pile est p), le fait que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ signifie qu'en moyenne on va attendre $\dfrac{1}{p}$ coups pour faire un pile dans cette configuration.

11.15 **a.** Il suffit de vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) \geqslant 0$ et que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$ ce qui est bien le cas par définition même de la fonction ζ de RIEMANN.

Comme $A_k = (X \in k\mathbb{N}^*) = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} (X = nk)$, on a par σ-additivité : $\mathbb{P}(A_k) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = nk)$ ce qui permet de calculer $\mathbb{P}(A_k) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\zeta(a)(nk)^a} = \dfrac{1}{k^a} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{k^a}$.

b. Comme i et j sont premiers entre eux : (i divise n et j divise n) $\iff$ ij divise n : on a $(A_i \cap A_j) = A_{ij}$ donc $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_{ij})$: $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \dfrac{1}{(ij)^a} = \dfrac{1}{i^a} \times \dfrac{1}{j^a} = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j)$ donc A_i et A_j sont indépendants.

c. X admet un moment d'ordre 1 si et seulement si $\sum\limits_{n \geqslant 1} n\,\mathbb{P}(X = n)$ converge, c'est-à-dire si $a > 2$ par critère de RIEMANN. Alors $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \dfrac{1}{\zeta(a)n^a} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\zeta(a)n^{a-1}} = \dfrac{\zeta(a-1)}{\zeta(a)}$.

d. De même, X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si $\sum\limits_{n \geqslant 1} n^2\,\mathbb{P}(X = n)$ converge, c'est-à-dire si $a > 3$. Alors $\mathbb{V}(X) = E(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\zeta(a)n^{a-2}} - \left(\dfrac{\zeta(a-1)}{\zeta(a)}\right)^2 = \dfrac{\zeta(\alpha-2)\zeta(\alpha) - \zeta(\alpha-1)^2}{\zeta(\alpha)^2}$.

Pour aller plus loin : $(X = 1) = \overline{(X \geqslant 2)}$ or comme tout entier au moins égal à 2 possède un diviseur premier, on a $(X \geqslant 2) = \bigcup\limits_{p \in \mathcal{P}} A_p$ où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers. En les numérotant dans l'ordre croissant $(p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 \ldots)$, on a $(X \geqslant 2) = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_{p_n}$ donc $\overline{(X \geqslant 2)} = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \overline{A_{p_n}} = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{A_{p_k}}$ ce qui donne par continuité décroissante : $\mathbb{P}(X = 1) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_{p_k}}\Big) = \lim\limits_{n \to +\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\overline{A_{p_k}}\big)$ par indépendance de ces évènements. On obtient donc $\dfrac{1}{\zeta(a)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\overline{A_{p_k}}\big) = \lim\limits_{n \to +\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \Big(1 - \dfrac{1}{p_k^a}\Big) = \prod\limits_{p \in \mathcal{P}} \Big(1 - \dfrac{1}{p^a}\Big)$.

Ainsi $\zeta(a) = \prod\limits_{p \in \mathcal{P}} \left(\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{p^a}}\right)$.

11.16 **a.** Comme $p \neq 0$ et $p \neq 1$, on en déduit que $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$. Par indépendance de X_n et X_{n+1}, il vient $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = p^2$. Ainsi Y_n suit la loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(1, p^2)$. D'après le cours, $\mathbb{E}(Y_n) = p^2$, $\mathbb{V}(Y_n) = p^2(1 - p^2)$.

b. Bien sûr, si $i = j$, Y_i et Y_j sont plus que dépendantes (elles sont égales). Si $i < j$, on distingue deux cas :

• si $j = i + 1$, alors $(Y_i = 1, Y_{i+1} = 1) = (X_i = 1, X_{i+1} = 1, X_{i+2} = 1)$. Ainsi, par indépendance mutuelle de X_i, X_{i+1}, X_{i+2}, on a $\mathbb{P}(Y_i = 0, Y_{i+1} = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1)\,\mathbb{P}(X_{i+1} = 1)\,\mathbb{P}(X_{i+2} = 1) = p^3$. Or, d'après la question **a.**, $\mathbb{P}(Y_i = 1)\,\mathbb{P}(Y_{i+1} = 1) = p^4$. Comme $p \neq 0$ et $p \neq 1$, Y_i et Y_{i+1} ne sont pas indépendantes.

• si $j > i + 1$, alors Y_i dépend de X_i et X_{i+1} alors que Y_{i+1} dépend de X_j et X_{j+1}, on sent que Y_i et Y_{i+1} sont indépendantes (lemme des coalitions). Or $(Y_i = 1, Y_j = 1) = (X_i = 1, X_{i+1} = 1, X_j = 1, X_{j+1} = 1)$, donc, comme avant : $\mathbb{P}(Y_i = 1, Y_j = 1) = p^4 = \mathbb{P}(Y_i = 1)\,\mathbb{P}(Y_j = 1)$. On vérifie de même qu'on a les égalités $\mathbb{P}(Y_i = 1, Y_j = 0) = p^2(1 - p^2) = \mathbb{P}(Y_i = 1)\,\mathbb{P}(Y_j = 0)$, $\mathbb{P}(Y_i = 0, Y_j = 1) = (1 - p^2)p^2 = \mathbb{P}(Y_i = 0)\,\mathbb{P}(Y_j = 1)$ et $\mathbb{P}(Y_i = 0, Y_j = 0) = (1 - p^2)^2 = \mathbb{P}(Y_i = 0)\,\mathbb{P}(Y_j = 0)$. Ainsi Y_i et Y_j sont bien indépendantes : $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$.

c. On traite trois cas selon le couple (n, m) :

- Si $n = m$, comme $Y_n Y_m = Y_n^2 = Y_n$, on en déduit que $\mathbb{E}(Y_n Y_m) = \mathbb{E}(Y_n) = p^2$.

- Si $|n-m| = 1$, $\mathbb{E}(Y_nY_m) = p^3$.
- Si $|n-m| \geqslant 2$, par indépendance de Y_n et Y_m, $\mathbb{E}(Y_nY_m) = \mathbb{E}(Y_n)\,\mathbb{E}(Y_m) = p^4$.

Par linéarité de l'espérance, comme $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{E}(Y_k) = p^2$, on a $\mathbb{E}\Big(\dfrac{Z_n}{n}\Big) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{E}(Y_k) = \dfrac{np^2}{n} = p^2$.

d. Comme Y_n et Y_m sont indépendantes dès que $|n-m| \geqslant 2$, on a $\mathbb{V}(Z_n) = \sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{V}(Y_k) + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1}\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1})$ d'après le cours. Si $i \in [\![1;n-1]\!]$, $\mathrm{Cov}(Y_i,Y_{i+1}) = \mathbb{E}(Y_iY_{i+1}) - \mathbb{E}(Y_i)\,\mathbb{E}(Y_{i+1}) = p^3 - p^4 = p^3(1-p)$ donc $\mathbb{V}(Z_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p)$. Comme $p^3(1-p) \geqslant 0$, $V(Z_n) \leqslant Cn$ avec $C = p^2(1-p^2) + 2p^3(1-p)$ donc $C = p^2(1-p)[1+p+2p] = [p(1-p)](1+3p)p \leqslant \dfrac{1}{4} \times 4 \times 1 = 1$ et $\mathbb{V}\Big(\dfrac{Z_n}{n}\Big) = \dfrac{1}{n^2}\mathbb{V}(Z_n) \leqslant \dfrac{C}{n}$.

D'après l'inégalité de Tchebychev, on a la majoration $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\Big(\Big|\dfrac{Z_n}{n} - p^2\Big| > \varepsilon\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(Z_n)}{\varepsilon^2}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p)}{n^2\varepsilon^2} = 0$ donc, par encadrement : $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\Big(\Big|\dfrac{Z_n}{n} - p^2\Big| \geqslant \varepsilon\Big) = 0$.

Par inégalité de Bienaymé-Tchebychev, nous avons $\mathbb{P}\Big(\Big|\dfrac{S_n}{n} - p^2\Big| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{V}\Big(\dfrac{S_n}{n}\Big) \leqslant \dfrac{C^2}{n\varepsilon^2}$.

On conclut bien que $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\Big(\Big|\dfrac{Z_n}{n} - p^2\Big| \geqslant \varepsilon\Big) = 0$ par théorème d'encadrement.

11.17 **a.** On constate que $X+Y=Z$. Ainsi, $(k,l) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(X=k, Y=l) = \mathbb{P}(X=k, Z=k+l)$.

Si $r_{k+l} = 0$, $(Z=k+l)$ est négligeable, $(X=k, Z=k+l)$ aussi : $\mathbb{P}(X=k,Y=l) = r_{k+l}\dbinom{k+l}{k}p^k(1-p)^l = 0$.
Si $r_{k+l} > 0$, $\mathbb{P}(X=k, Z=k+l) = \mathbb{P}_{(Z=k+l)}(X=k)\,\mathbb{P}(Z=k+l)$. Or la loi conditionnelle de X sachant $Z=k+l$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(k+l,p)$ donc $\mathbb{P}_{Z=k+l}(X=k) = \dbinom{k+l}{k}p^k(1-p)^{l+k-k}$

On conclut, et ceci dans tous les cas : $\mathbb{P}(X=k,Y=l) = r_{k+l}\dbinom{k+l}{k}p^k(1-p)^l$.

b. On sait que $(X=k) = \bigcup\limits_{l=0}^{+\infty}(X=k,Y=l)$. Ces évènements étant incompatibles deux à deux, on trouve par σ-additivité : $\mathbb{P}(X=k) = \sum\limits_{l=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k,Y=l) = p_k = \sum\limits_{l=0}^{+\infty} r_{k+l}\dbinom{k+l}{k}p^k(1-p)^l$.
Par symétrie : $\mathbb{P}(Y=l) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k,Y=l) = q_l = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} r_{k+l}\dbinom{k+l}{k}p^k(1-p)^l$.

c. Si Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors $\mathbb{P}(X=k) = \sum\limits_{l=0}^{+\infty}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k+l}}{(k+l)!}\dbinom{k+l}{k}p^k(1-p)^l$ d'où $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{p^ke^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\sum\limits_{l=0}^{+\infty}\dfrac{(\lambda(1-p))^l}{l!} = \dfrac{(p\lambda)^ke^{-\lambda}}{k!}e^{\lambda(1-p)} = \dfrac{(p\lambda)^ke^{-\lambda p}}{k!}$ et X suit la loi de Poisson de paramètre λp. De même $\mathbb{P}(Y=l) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k+l}}{(k+l)!}\dbinom{k+l}{k}p^k(1-p)^l = \dfrac{((1-p)\lambda)^le^{-\lambda(1-p)}}{l!}$ et Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$. Ainsi les variables aléatoires X et Y sont indépendantes car $\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=l) = \dfrac{(p\lambda)^ke^{-\lambda p}}{k!}\,\dfrac{((1-p)\lambda)^le^{-\lambda(1-p)}}{l!} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k+l}}{(k+l)!}\dbinom{k+l}{k}p^k(1-p)^l = \mathbb{P}(X=k,Y=l)$.

d. On écrit $(Z=n) = \bigcup\limits_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}^2\\ k+l=n}}(X=k,Y=l)$. C'est la réunion dénombrable d'évènements incompatibles deux à deux donc $r_n = \mathbb{P}(Z=n) = \sum\limits_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}^2\\ k+l=n}}(X=k,Y=l) = \sum\limits_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}^2\\ k+l=n}}\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=l) = \sum\limits_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}^2\\ k+l=n}}p_kq_l$.

e. Comme Z est non presque sûrement nulle, il existe $s \geqslant 1$ tel que $r_s > 0$. Ainsi $p_0 = \sum_{l=0}^{+\infty} r_l \binom{l}{0} p^0(1-p)^l > 0$ et $p_1 = \sum_{l=0}^{+\infty} r_{l+1} \binom{l+1}{1} p(1-p)^l > 0$. De même $q_0 > 0$ et $q_1 > 0$.

f. D'après la question **a.**, on a les relations $\mathbb{P}(X = k+1, Y = l) = r_{k+l+1} \binom{k+l+1}{k+1} p^{k+1}(1-p)^l = p_{k+1}q_l$ et $\mathbb{P}(X = k, Y = l+1) = r_{k+l+1} \binom{k+l+1}{k} p^k(1-p)^{l+1} = p_k q_{l+1}$.

- Si $r_{k+l+1} = 0$, on a $p_k q_{l+1} = p_{k+1}q_l = 0$ donc $p_k q_{l+1}(l+1)p = p_{k+1}q_l(k+1)p = 0$.
- Si $r_{k+l+1} > 0$, on fait le rapport de ces deux relations pour avoir $\dfrac{r_{k+l+1}\binom{k+l+1}{k+1}p^{k+1}(1-p)^l}{r_{k+l+1}\binom{k+l+1}{k}p^k(1-p)^{l+1}} = \dfrac{p_{k+1}q_l}{p_k q_{l+1}}$

donc $\dfrac{p_{k+1}q_l}{p_k q_{l+1}} = \dfrac{(k+l+1)!k!(l+1)!p^{k+1}(1-p)^l}{(k+1)!l!(k+l+1)!p^k(1-p)^{l+1}} = \dfrac{(l+1)p}{(k+1)(1-p)}$.
Dans les deux cas, $p_k q_{l+1}(l+1)p = p_{k+1}q_l(k+1)(1-p)$.

g. On prend $k = 0$ dans l'équation de la question précédente et il vient $p_0 q_{l+1}(l+1)p = p_1 q_l(1-p)$ d'où $q_{l+1} = b\dfrac{q_l}{l+1}$ en notant $b = \dfrac{p_1(1-p)}{p_0 p}$. Par une récurrence facile, on montre que $\forall l \in \mathbb{N},\ q_l = \dfrac{b^l}{l!}q_0$.
De même, on trouve que $\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = \dfrac{a^k}{k!}p_0$ où $a = \dfrac{q_1 p}{q_0(1-p)}$.

Comme $\sum_{l=0}^{+\infty} q_l = 1$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$, on en déduit que $q_0 = e^{-b}$ et que $p_0 = e^{-a}$. Alors, par définition, Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(b)$ et X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(a)$.

h. D'après **c.** et **g.**, si Z est une variable aléatoire non presque sûrement nulle à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $X = \sum_{i=1}^{Z} U_i$ et $Y = \sum_{i=1}^{Z}(1-U_i)$, alors : Z suit une loi de Poisson si et seulement si X et Y sont indépendantes.

11.18 **a.** Le nombre de victoires V de Pierre parmi les $2n$ premières parties suit (les parties sont indépendantes mutuellement) une loi binomiale $\mathcal{B}(2n, p)$. Ainsi $a_{2n} = \mathbb{P}(V = n) = \binom{2n}{n} p^n(1-p)^{2n-n} = \binom{2n}{n}(p(1-p))^n$.
Bien sûr, il ne peut pas y avoir d'égalité du nombre de victoires après un nombre impair de parties.

b. Pour $n \geqslant 1$, posons les évènements $B_n =$ "il y a égalité pour la première fois après n parties" tel que $b_{2n} = \mathbb{P}(B_{2n})$ et $A_n =$ "il y a égalité après n parties" tel que $a_{2n} = \mathbb{P}(A_{2n})$. On pose $a_0 = b_0 = 0$.
Pour $n \geqslant 1$, s'il y a égalité du nombre de parties gagnées après $2n$ parties, alors il y a eu égalité pour la première fois du nombre de parties gagnées au bout de $2k$ parties avec $k \in [\![1; n]\!]$. Ceci nous donne la partition suivante : $A_{2n} = \bigcup_{k=1}^{n}(A_{2n} \cap B_{2k})$. Comme ces évènements sont incompatibles, on en déduit que $a_{2n} = \mathbb{P}(A_{2n}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{2n} \cap B_{2k}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{B_{2k}}(A_{2n})\mathbb{P}(B_{2k})$. Clairement, pour tout entier $k \in [\![1; n-1]\!]$, on a $\mathbb{P}_{B_{2k}}(A_{2n}) = a_{2(n-k)}$ (si on a égalité après $2k$ parties, avoir égalité après $2n$ parties revient à avoir égalité sur une période de $2(n-k)$ parties - elles sont indépendantes mutuellement). Par contre, comme $B_{2n} \subset A_{2n}$, on a $\mathbb{P}_{B_{2n}}(A_{2n}) = 1$. Ainsi $a_{2n} = b_{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} b_{2k}a_{2(n-k)} = b_{2n} + \sum_{k=0}^{n} b_{2k}a_{2(n-k)}$ car on a posé $a_0 = b_0 = 0$.
Sous réserve de convergence, c'est-à-dire si $|x| < R$ où $R = \mathrm{Min}(R_a, R_b)$ (avec des notations évidentes), on a par produit de Cauchy de séries absolument convergentes :

$$A(x)B(x) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_{2n}x^{2n}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\Big(\sum_{k=0}^{n} b_{2k}a_{2(n-k)}\Big)x^{2n}\Big) = A(x) - B(x).$$

c. Soit $x \neq 0$, si $u_n = a_{2n}x^{2n}$, alors $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dbinom{2(n+1)}{n+1}p^{n+1}(1-p)^{n+1}}{\dbinom{2n}{n}p^n(1-p)^n}x^2 = \dfrac{2(2n+1)}{n+1}p(1-p)x^2$ qui tend vers $\ell = 4p(1-p)x^2$. Par la règle deD'ALEMBERT, si $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{4p(1-p)}}$, alors $\ell < 1$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge ce qui prouve que $R_a \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{4p(1-p)}}$. Si $|x| > \dfrac{1}{\sqrt{4p(1-p)}}$, on a $\ell > 1$ et, par D'ALEMBERT, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge donc $R_a \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{4p(1-p)}}$. Par conséquent, le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n}x^{2n}$ vaut $R_a = \dfrac{1}{\sqrt{4p(1-p)}}$.
Il vaut donc $R_a = +\infty$ si $p = 0$ ou $p = 1$ qui sont des cas inintéressants où l'un ou l'autre des deux joueurs gagne presque sûrement toutes les parties.

d. Si $p \neq \dfrac{1}{2}$, on a $4p(1-p) = 1-(1-2p)^2 < 1$ (parabole atteignant son maximum en $\dfrac{1}{2}$) donc $R_a > 1$ et $A(1)$ est bien défini car $1 \in]R_a; R_a[$ (intervalle ouvert de convergence).
Réciproquement, si $p = \dfrac{1}{2}$, alors $a_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}}{e^{2n}} \times \dfrac{1}{2^{2n}} \times \dfrac{e^{2n}}{(2\pi n)n^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ avec la formule de STIRLING donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_{2n}$ diverge d'après RIEMANN et $A(1)$ n'est pas défini.
En conclusion : $A(1)$ existe si et seulement si $p \neq \dfrac{1}{2}$.

e. On sait que $\forall y \in]-1;1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+y}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}y^n$. Pour $x \in]-R_a; R_a[$, $y = -4p(1-p)x^2 \in]-1;1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^2}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}4^np^n(1-p)^n(-1)^nx^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}p^n(1-p)^nx^{2n} = A(x)+1$. On en déduit bien que $\forall x \in]-R_a; R_a[$, $A(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} - 1$.

Comme $B_{2n} \subset A_{2n}$, on a $0 \leqslant b_{2n} \leqslant a_{2n}$ donc $R_a \leqslant R_b$. On a donc $\forall x \in]-R_a; R_a[$, $B(x) = \dfrac{A(x)}{A(x)+1}$ d'après la relation de la question **b.**. Ainsi : $\forall x \in]-R_a; R_a[$, $B(x) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} - 1}{\dfrac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}} = 1 - \sqrt{1-4pqx^2}$.

f. Or, $\forall y \in]-1;1[$, $\sqrt{1+y} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n(n!)^2(2n-1)}y^n$. Pour $x \in]-R_a; R_a[$, $y = -4p(1-p)x^2 \in]-1;1[$ donc $B(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n(n!)^2(2n-1)}4^np^n(1-p)^n(-1)^nx^{2n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2(2n-1)}p^n(1-p)^nx^{2n}$. On peut identifier car les rayons sont strictement positifs et $\forall n \geqslant 1$, $b_{2n} = \dbinom{2n}{n}\dfrac{p^n(1-p)^n}{2n-1}$ (inutile ici).
Mais cette expression de b_{2n} nous permet de trouver R_b. En effet, pour $x \neq 0$, en posant $v_n = b_{2n}x^{2n}$, on a $0 < \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\dbinom{2(n+1)}{n+1}p^{n+1}(1-p)^{n+1}(2n-1)}{\dbinom{2n}{n}p^n(1-p)^n(2n+1)}x^2 = \dfrac{2(2n-1)}{n+1}p(1-p)x^2$ qui tend aussi vers $\ell = 4p(1-p)x^2$.
Comme à la question **c.**, on a $R_b = R_a = \dfrac{1}{\sqrt{4p(1-p)}}$. Si $p \neq \dfrac{1}{2}$, $1 \in]-R_b; R_b[$ donc $B(1)$ existe. Si $p = \dfrac{1}{2}$, $b_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2(2n-1)}p^n(1-p)^n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$ avec STIRLING à nouveau donc $B(1)$ existe pour tout $p \in [0;1]$.

Notons l'évènement $J =$ "ne jamais obtenir égalité du nombre de parties gagnées par Pierre et Marie". Alors on a clairement $\overline{J} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_{2n}$ (réunion d'évènements deux à deux incompatibles).

Ainsi, par σ-additivité : $\eta = \mathbb{P}(J) = 1 - \mathbb{P}(\overline{J}) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n} = 1 - B(1)$. Or, en posant $f_n : x \mapsto b_{2n}x^{2n}$, on a $||f_n||_{\infty,[0;1]} = b_{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_{2n}$ converge, ainsi par convergence normale de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0;1]$ et continuité de toutes les f_n, on a B continue sur $[0;1]$ (ce qui était évident si $R_b > 1$ mais pas clair si $p = \frac{1}{2}$). Ainsi $\eta = 1 - B(1) = 1 - \lim_{x\to 1^-} B(x) = \sqrt{1-4p(1-p)}$.

11.19 On note $p = 0,4$ la probabilité que le caractère soit présent chez une personne. Quand on étudie un échantillon de 200 personnes, le nombre X de personnes qui ont cette caractéristique suit la loi binomiale $\mathcal{B}(200, p)$. Or $X = \sum_{k=1}^{200} X_k$ où les X_k suivent la loi de BERNOULLI de paramètre p et sont supposés mutuellement indépendants. $\mathbb{E}(X_1) = m = 0,4$ et $\mathbb{V}(X_1) = \sigma^2 = 0,4\times 0,6 = 0,24$. Ainsi, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{200}{k} p^k(1-p)^{200-k}$.
Ainsi $\mathbb{P}\Big(0,3 < \dfrac{X}{200} < 0,5\Big) = \mathbb{P}(60 < X < 100) = \sum_{k=61}^{99} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=61}^{99} \binom{200}{k} p^k(1-p)^{200-k} \sim 0.995$.
Loi faible des grands nombres avec $\varepsilon = 0,1$: $\mathbb{P}\Big(\big|\dfrac{X}{200} - 0,4\big| \geqslant 0,1\Big) \leqslant \dfrac{0,24}{2}$. Donc $\mathbb{P}\big(60 < X < 100\big) \geqslant 0,88$.
Le calcul direct est donc beaucoup plus précis que la majoration générale.

11.20 **a.** En supposant $X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes (ce qui n'est pas clair dans l'énoncé), on sait d'après le cours que $G_V = G_{X_1} \cdots G_{X_n}$. Et puisqu'elles suivent toutes la même loi, on a même $G_V = (G_{X_1})^n$.
b. On admet pouvoir intervertir les indices dans la double série (théorème de FUBINI). Alors, on peut démontrer ce qui est admis : pour $n \in \mathbb{N}$, comme $\{V = n\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{N = k,\ X_1 + \cdots + X_k = n\}$ (réunion disjointe), on a : $\mathbb{P}(V = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k,\ X_1 + \cdots + X_k = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\,\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k = n)$ par indépendance mutuelle des variables aléatoires $N, X_1, \ldots, X_n, \ldots$.
Pour $t \in [-1;1]$ (au moins), $G_V(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(V = n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\,\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_k = n)t^n\Big)$. D'après FUBINI : $G_V(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\,\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_k = n)t^n\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1+\cdots+X_k = n)t^n\Big)\mathbb{P}(N = k)$
donc $G_V(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} G_{X_1+\cdots+X_k}(t)\,\mathbb{P}(N = k)$. Or, par indépendance mutuelle, on a $G_{X_1+\cdots+X_k} = \prod_{i=1}^{k} G_{X_i} = G_{X_1}^k$
et on arrive enfin à $G_V(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\big(G_{X_1}(t)\big)^k = G_N\big(G_{X_1}(t)\big)$.
Comme $G_V = G_N \circ G_{X_1}$ sur $[-1;1]$ et que les espérances sont finies, ces fonctions sont dérivables en 1 et on a $G'_V(1) = G'_{X_1}(G_N(1))G'_N(1)$. Mais comme $G_N(1) = 1$, cela donne $\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X_1)$ (formule de WALD).
c. On note X_i la variable aléatoire telle que $X_i = 1$ si la personne numéro i (dans la journée) choisit le guichet 1 et $X_i = 0$ si elle choisit le guichet 2. Par hypothèse, chaque X_i suit la loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(p)$ et les X_i sont supposées mutuellement indépendantes. Par conséquent, si V est le nombre de personnes se présentant au guichet G_1 dans la journée, on a $V = \sum_{i=1}^{N} X_i$ où N est le nombre de personnes allant à la poste en une journée : N suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ par hypothèse. D'après la formule de WALD, comme X_1 et N admettent des espérances finies, $\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X_1) = p\lambda$ (le nombre de personnes qui se présentent en moyenne à G_1).
<u>Questions subsidiaires</u> :
- Si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors $f(X_1)$ et $g(X_2)$ sont toujours indépendantes.
- Le rayon de convergence d'une série génératrice est supérieur ou égal à 1.
- Le théorème d'intégration terme à terme :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui vérifient les conditions :

(H_1) la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I vers S,

(H_2) les f_n sont continues par morc. et intég. sur I et S est continue par morceaux sur I,

(H_3) la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\int_I |f_n|\right)$ converge.

Alors on a les trois conclusions :

(R_1) La fonction S est intégrable sur I.

(R_2) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\int_I f_n$ converge.

(R_3) $\int_I S = \int_I\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n$.

• On peut dériver terme à terme dans l'intervalle ouvert $]-R;R[$ de convergence de la série entière donc le rayon R' de sa série dérivée vérifie $R' \geqslant R$. On peut intégrer terme à terme la série dérivée sur tout $\widetilde{[0;x]}$ inclus dans l'intervalle $]-R';R'[$ pour obtenir à nouveau la série entière originelle donc $R \geqslant R'$. Ainsi $R = R'$.

• Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors d'après le cours $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$.

• On sait que si $X \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0;1[$, alors $G_X(t) = 1 - p + pt$ d'après le cours.

11.21 **a.** Il est sous-entendu que $X_1(\Omega) = \mathbb{N}$. On veut alors que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X_1 = k) = 1$ donc que $\lambda\dfrac{1}{1-\frac{\theta}{1+\theta}} = 1$ ce qui impose $\lambda = \dfrac{1}{1+\theta}$. De plus, $G_{X_1}(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\theta^k}{(1+\theta)^{k+1}}t^k$ qui converge si et seulement si $|t| < 1 + \frac{1}{\theta} = R$. Et toujours avec les séries géométriques : $\forall t \in]-R;R[,\ G_{X_1}(t) = \dfrac{1}{1+\theta} \times \dfrac{1}{1-\frac{\theta t}{1+\theta}} = \dfrac{1}{1+\theta-\theta t} = \dfrac{1}{1+\theta(1-t)}$.

b. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(S_n) = n\,\mathbb{E}(X_1)$ car les $X_1, \cdots, X_n$ suivent toutes la même loi. Or, comme G_{X_1} est dérivable en 1, on a $\mathbb{E}(X_1) = G'_{X_1}(1) = \theta$ car $G'_{X_1}(t) = \dfrac{\theta}{(1+\theta-\theta t)^2}$. Ainsi : $\mathbb{E}(S_n) = n\theta$.

Comme les $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes (deux à deux ou mutuellement dans ce calcul ça ne change rien), on a $\mathbb{V}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) = n\,\mathbb{V}(X_1)$ car elles suivent toutes la même loi. Or $G''_{X_1}(t) = \dfrac{2\theta^2}{(1+\theta-\theta t)^3}$ donc $G''_{X_1}(1) = 2\theta^2$ et $\mathbb{V}(X_1) = G''_{X_1}(1) + G'_{X_1}(1) - G'_{X_1}(1)^2 = \theta(\theta+1)$. Ainsi $\mathbb{V}(S_n) = n\theta(\theta+1)$.

De plus, toujours par indépendance mutuelle (là c'est nécessaire) des variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$, on a $\forall t \in]-R;R[,\ G_{S_n}(t) = \prod\limits_{k=1}^{n} G_{X_k}(t) = G_{X_1}^n(t) = \left(\dfrac{1}{1+\theta-\theta t}\right)^n = \dfrac{1}{(1+\theta)^n}(1-x)^{-n}$ avec $x = \dfrac{\theta t}{1+\theta}$.

Or $\forall x \in]-1;1[,\ \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}x^k$, d'où $\dfrac{(n-1)!}{(1-x)^n} = \sum\limits_{k=n-1}^{+\infty}k(k-1)\cdots(k-n+2)x^{k-n+1} = \sum\limits_{j=0}^{+\infty}\dfrac{(n+j-1)!}{j!}x^j$ en dérivant $n-1$ fois. Ainsi $(1-x)^{-n} = \sum\limits_{j=0}^{+\infty}\dbinom{n+j-1}{n-1}x^j$. Alors $G_{S_n}(t) = \dfrac{1}{(1+\theta)^n}\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\dbinom{n+j-1}{n-1}\left(\dfrac{\theta t}{1+\theta}\right)^j$ qu'on simplifie en $G_{S_n}(t) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty}\dbinom{n+j-1}{n-1}\dfrac{\theta^j}{(1+\theta)^{n+j}}t^j$. Mais comme $G_{S_n}(t) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_n = j)t^j$, on peut identifier pour obtenir la loi de S_n : $\mathbb{P}(S_n = j) = \dbinom{n+j-1}{n-1}\dfrac{\theta^j}{(1+\theta)^{n+j}}$.

Questions supplémentaires :

• Pour une série de fonctions, on a le théorème :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, on suppose que :

(H_1) la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur I vers S,

(H_2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^1 sur I,

(H_3) $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f'_n$ CVU (ou CVN) sur I (ou CVU (ou CVN) sur tout segment de I).

Alors on peut conclure :

(R_1) S est de classe C^1 sur I.

(R_2) $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$, c'est-à-dire que $\forall x \in I$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(f'_n(x)\right)$.

Pour une série entière, on peut dériver terme à terme dans l'intervalle ouvert de convergence.

• La variable X admet une espérance finie si et seulement si la fonction génératrice G_X est dérivable en 1. Dans ce cas, on a $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$.

11.22 **a.** Comme $(X \geqslant n) = \bigcup_{k=n}^{+\infty} (X = k)$ (réunion dénombrable d'évènements incompatibles), par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(X \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = \dfrac{p(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)} = (1-p)^{n-1}$. Par construction, $(T \geqslant k) = (X \geqslant k) \cap (Y \geqslant k)$ pour $k \geqslant 1$. Par indépendance de X et Y, on en déduit que $\mathbb{P}(T \geqslant k) = \mathbb{P}(X \geqslant k)\,\mathbb{P}(Y \geqslant k) = (1-p)^{2(k-1)}$. Comme $\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(T \geqslant k) - \mathbb{P}(T \geqslant k+1)$ car $(T \geqslant k) = (T = k) \bigsqcup (T \geqslant k+1)$, on en déduit la loi de T donnée, pour $k \in \mathbb{N}^*$, par $\mathbb{P}(T = k) = (1-p)^{2(k-1)} - (1-p)^{2k} = (1-p)^{2(k-1)} p(2-p) = \left((1-p)^2\right)^{(k-1)} p(2-p)$.

La variable aléatoire T suit donc la loi géométrique de paramètre $p(2-p) = 1-(1-p)^2$.

b. D'après le cours, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$. La variable aléatoire $\dfrac{1}{X}$ est bornée donc elle admet une espérance finie et, par la formule de transfert, $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{p(1-p)^{n-1}}{n} = \dfrac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(1-p)^n}{n}$ et on reconnaît la série logarithmique : $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) = \dfrac{p}{1-p}\big(-\ln(1-(1-p))\big) = -\dfrac{p\ln(p)}{1-p} = \dfrac{p\ln(1/p)}{1-p}$.

c. • $(T \geqslant k, Z = 0) = (X = Y \geqslant k) = \bigcup_{i=k}^{+\infty} (X = Y = i)$ donc, par σ-additivité et par indépendance de X et Y, on a $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = 0) = \mathbb{P}(X = Y \geqslant k) = \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = i) = \sum_{i=k}^{+\infty} p^2(1-p)^{2(i-1)} = \dfrac{p^2((1-p)^2)^{k-1}}{1-(1-p)^2}$ ce qui se réduit à $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = 0) = \dfrac{p(1-p)^{2k-2}}{2-p}$.

• Si $z \geqslant 1$, on a $(T \geqslant k, Z = z) = \left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} (X = i, Y = i+z)\right) \cup \left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} (X = i+z, Y = i)\right)$ (réunion disjointe).

Par symétrie, indépendance et σ-additivité, il vient $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = z) = 2\sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = i+z)$ donc $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = z) = 2\sum_{i=k}^{+\infty} p^2(1-p)^{2i+z-2} = \dfrac{p^2(1-p)^{2k+z-2}}{1-(1-p)^2} = \dfrac{2p(1-p)^{2k+z-2}}{2-p}$.

d. • Comme $(Z = 0) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = Y = k)$, par incompatibilité des évènements de cette réunion et indépendance de X et Y, on a $\mathbb{P}(Z = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2(k-1)} = \dfrac{p^2}{1-(1-p)^2} = \dfrac{p}{2-p}$.

On aurait aussi pu dire, comme $(T \geqslant 1) = \Omega$, que $(Z = 0) = (T \geqslant 1, Z = 0)$. Ainsi, d'après la question **c.**, on a $\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(T \geqslant 1, Z = 0) = \dfrac{p(1-p)^{2.1-2}}{2-p} = \dfrac{p}{2-p}$.

• Si $z \geqslant 1$, $(Z = z) = \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = k, Y = k+z)\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = k+z, Y = k)\right)$ donc, avec les mêmes arguments, $\mathbb{P}(Z = z) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2k+z-2} = \dfrac{2p^2(1-p)^z}{1-(1-p)^2} = \dfrac{2p(1-p)^z}{2-p}$. Ou $(Z = z) = (T \geqslant 1, Z = z)$ comme avant.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{N}$, traitons deux cas :

• Si $z = 0$, $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = z) = \dfrac{p(1-p)^{2k-2}}{2-p} = (1-p)^{2(k-1)} \times \dfrac{p}{2-p} = \mathbb{P}(T \geqslant k)\,\mathbb{P}(Z = z)$.

• Si $z \geqslant 1$, $\mathbb{P}(T \geqslant k, Z = z) = \dfrac{2p(1-p)^{2k+z-2}}{2-p} = (1-p)^{2(k-1)} \times \dfrac{2p(1-p)^z}{2-p} = \mathbb{P}(T \geqslant k)\,\mathbb{P}(Z = z)$.

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall z \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T = k, Z = z) = \mathbb{P}(T = k)\,\mathbb{P}(Z = z)$ car $\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(T \geqslant k) - \mathbb{P}(T \geqslant k+1)$ et $\mathbb{P}(T = k, Z = z) = \mathbb{P}(T \geqslant k, Z = z) - \mathbb{P}(T \geqslant k+1, Z = z)$ proviennent des réunions disjointes suivantes sur les évènements : $(T \geqslant k) = (T \geqslant k+1) \cup (T = k)$ et $(T \geqslant k, Z = z) = (T \geqslant k+1, Z = z) \cup (T = k, Z = z)$.

On a bien établi que les variables aléatoires T et Z sont indépendantes.

On peut montrer la réciproque (à faire), à savoir que si X, Y sont des variables aléatoires de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telles $T = \mathrm{Min}(X, Y)$ et $Z = |X - Y|$ sont indépendantes, alors X et Y suivent une loi géométrique.

11.23 **a.** On note $M_k = (H_k, V_k)$ le mouvement à l'instant k (de l'instant $k-1$ à l'instant k en fait) : H_k pour horizontal, V_k pour vertical. Alors toutes les VA M_k suivent la même loi, comme toutes les H_k et toutes les V_k. De plus $\mathbb{P}(H_k = -1) = \mathbb{P}(H_k = 1) = \dfrac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(H_k = 0) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi $\mathbb{E}(H_k) = 0$ et $\mathbb{V}(H_k) = \dfrac{1}{2}$.
Comme par construction, on a $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} H_k$ et que les H_k sont indépendantes mutuellement (donc 2 à 2), on a $\mathbb{V}(X_n) = n\,\mathbb{V}(H_1) = \frac{n}{2}$. Bien sûr, on a aussi $\mathbb{E}(Y_n) = 0$ et $\mathbb{V}(Y_n) = \frac{n}{2}$.

b. $\mathbb{E}(Z_n^2) = \mathbb{E}(X_n^2 + Y_n^2) = \mathbb{E}(X_n^2) + \mathbb{E}(Y_n^2) = n$. Or $\mathbb{V}(Z_n) \geqslant 0$ donc $\mathbb{E}(Z_n)^2 \leqslant \mathbb{E}(Z_n^2) = n$ et $\mathbb{E}(Z_n) \leqslant \sqrt{n}$.

c. $\sum\limits_{i=0}^{k} \dbinom{k}{i}^2 = \dbinom{2k}{k}$ est uniquement la formule de VANDERMONDE avec $a = b = k$.
Si n est impair, il est clair géométriquement que $\mathbb{P}(Z_n = 0) = 0$. Par contre, si n est pair, on pose $n = 2k$ et alors pour être à l'origine après $2k$ déplacements, il faut avoir autant de Nord que de Sud et autant d'Ouest que d'Est. Chaque $2k$-uplet de déplacements (EOSSONNE....) a une probabilité $\frac{1}{4^{2k}}$ d'intervenir. Il suffit donc de compter ces déplacements qui permettent de revenir en $(0,0)$ après $2k$ déplacements. On choisit les $i \in [\![0;k]\!]$ déplacements qui vont vers l'ouest : $\dbinom{2k}{i}$ choix, ensuite ceux (au nombre de i forcément) qui vont vers m'est : $\dbinom{2k-i}{i}$ choix. Puis ceux qui vont vers le nord (au nombre de $k-i$ obligatoirement) : $\dbinom{2k-2i}{k-i}$ choix, et enfin ceux qui vont vers l'est : $\dbinom{k-i}{k-i} = 1$ (clairement plus de choix).
Ainsi $\mathbb{P}(Z_{2k} = 0) = \sum\limits_{i=0}^{k} \dbinom{2k}{i}\dbinom{2k-i}{i}\dbinom{2k-2i}{k-i}\dbinom{k-i}{k-i}\dfrac{1}{4^{2k}} = \sum\limits_{i=0}^{k} \dfrac{(2k)!}{i!^2(k-i)!^2 4^{2k}} = \dfrac{(2k)!}{4^{2k}k!^2}\sum\limits_{i=0}^{k}\dbinom{k}{i}^2$ ce qui donne avec la formule de VANDERMONDE $\mathbb{P}(Z_{2k} = 0) = \dfrac{(2k)!}{4^{2k}k!^2}\dbinom{2k}{k} = \dfrac{(2k)!^2}{4^{2k}k!^4}$.
Avec STIRLING, on trouve $\mathbb{P}(Z_{2k} = 0) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\pi k}$ donc $\sum\limits_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(Z_n = 0)$ diverge, on admet que ceci permet de prouver que "revenir une infinité de fois à l'origine" dans cette marche aléatoire plane est presque certain.

11.24 **a.** On note D_k = "le tirage k est différent du tirage $k-1$". On a $(X = k) = D_2 \cap \cdots D_{k-1} \cap \overline{D_k}$ pour $k \geqslant 2$ donc $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(D_2) \times \mathbb{P}_{D_2}(D_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{D_2 \cap \cdots \cap D_{k-2}}(D_{k-1}) \times \mathbb{P}_{D_2 \cap \cdots \cap D_{k-1}}(\overline{D_k})$ par la formule des probabilités composées. Par l'indépendance des tirages imposée dans l'énoncé, tirer au tirage k la même couleur qu'au tirage $k-1$ ne dépend pas de ce qu'on a tiré avant le tirage $k-1$ donc, $\forall i \in [\![2;k]\!]$, $\mathbb{P}_{D_2 \cap \cdots \cap D_{i-1}}(D_i) = \dfrac{n-1}{n}$ et on trouve donc $\mathbb{P}(X = k) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-2}\dfrac{1}{n} = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-2} - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}$.

b. Soit A = "le processus s'arrête". Comme $A = (X < +\infty) = \bigsqcup\limits_{k=2}^{+\infty}(X = k)$ (réunion incompatible), par σ-additivité, $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-2} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \right) = 1$ par télescopage car $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = 0$. Le processus s'arrête donc presque sûrement.

c. Méthode 1 : pour $k \geqslant 2$, comme $(X \geqslant k) = \bigsqcup\limits_{i=k}^{+\infty} (X = i)$ (réunion incompatible), par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum\limits_{i=k}^{+\infty} \left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-2} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} \right)$ donc $\mathbb{P}(X \geqslant k) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-2}$ par télescopage car $\lim\limits_{i\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} = 0$. Par contre, $\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1$. Comme X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, d'après le cours, il vient $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k) = 1 + \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-2} = 1 + \dfrac{1}{1 - \frac{n-1}{n}} = n + 1$.

Par théorème de transfert, on a $\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\,\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-2}$ car $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \setminus \{2\}$ en cas de convergence. Or $\forall t \in]-1;1[$, $\left(\dfrac{1}{1-t}\right)'' = \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} t^k\right)'' = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} k(k-1)t^{k-2} = \dfrac{2}{(1-t)^3}$ donc $\mathbb{E}(X(X-1)) = 2n^2$. Ainsi $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = 2n^2 + n + 1 - (n+1)^2 = n(n-1)$.

Méthode 2 : comme $(X - 1 = k) = (X = k + 1)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(X - 1 = k) = \left(\dfrac{1}{n}\right) \times \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$ donc $X - 1$ suit la loi géométrique de paramètre $p_n = \dfrac{1}{n}$. Ainsi, d'après le cours, $\mathbb{E}(X-1) = \dfrac{1}{p_n} = \mathbb{E}(X) - 1$ donc $\mathbb{E}(X) = n + 1$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X-1) = \dfrac{1-p_n}{p_n^2}$ donc $\mathbb{V}(X) = n^2\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = n(n-1)$.

11.25 Calculons $\chi_M = X^3 - (X_1 - X_2)^2 X - (X_1 - X_3)^2 X = X(X^2 - (X_1 - X_2)^2 - (X_1 - X_3)^2)$. Les valeurs propres de M, c'est-à-dire les racines de χ_M, sont donc 0, $\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (X_1 - X_3)^2}$ et $-\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (X_1 - X_3)^2}$. Par conséquent, $\mathrm{Sp}(M) = \{0\} \iff (X_1 - X_2)^2 = (X_1 - X_3)^2 = 0 \iff X_1 = X_2 = X_3$.

On pouvait le prouver autrement. En effet, on sait d'après le théorème de Cayley-Hamilton qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$ si et seulement si elle est nilpotente. La matrice M de l'énoncé étant symétrique réelle, elle est diagonalisable par le théorème spectral. Ainsi, puisque qu'une matrice nilpotente n'est diagonalisable que si elle est nulle, $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$ si et seulement si $M = 0$. On en déduit, en termes d'évènements, que $(\mathrm{Sp}(M) = \{0\}) = (X_1 = X_2 = X_3)$.

Ainsi, $\mathbb{P}(\mathrm{Sp}(M) = \{0\}) = \mathbb{P}(M = 0) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3)$. Or $(X_1 = X_2 = X_3) = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} (X_1 = X_2 = X_3 = n)$ (évènements incompatibles), X_1, X_2, X_3 sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi $\mathcal{G}(p)$ donc $\mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = n)\,\mathbb{P}(X_2 = n)\,\mathbb{P}(X_3 = n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p^3(1-p)^{3(n-1)} = \dfrac{p^3}{1 - (1-p)^3}$.

11.26 **a.** Initialisation : la relation $\sum\limits_{k=p}^{p} \dbinom{k}{p} = \dbinom{p+1}{p+1} = 1$ est clairement vraie.

Hérédité : soit $q \geqslant p$ tel que $\sum\limits_{k=p}^{q} \dbinom{k}{p} = \dbinom{q+1}{p+1}$. Alors, par hypothèse de récurrence et d'après la relation de Pascal : $\sum\limits_{k=p}^{q+1} \dbinom{k}{p} = \left(\sum\limits_{k=p}^{q} \dbinom{k}{p}\right) + \dbinom{q+1}{p} = \dbinom{q+1}{p+1} + \dbinom{q+1}{p} = \dbinom{q+2}{p+1}$.

On conclut par principe de récurrence que $\forall q \geqslant p$, $\sum\limits_{k=p}^{q} \dbinom{k}{p} = \dbinom{q+1}{p+1}$; encore vrai si $q < p$ $(0 = 0)$.

On pouvait obtenir cette relation sans récurrence en constatant que $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k+1}{p}$ donc, par télescopage, $\sum\limits_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \sum\limits_{k=p}^{q} \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) = \binom{q+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{q+1}{p+1}$ (formule des colonnes).

b. On peut modéliser cette expérience par des n-uplets comme $BAABBAA \cdots BA$, celui-ci signifiant que le premier jeton tiré est Blanc, les deux suivants d'Autres couleurs, etc..... sachant qu'il doit impérativement y avoir b fois B et a fois A dans cette suite de lettres. On note Ω l'ensemble des tous ces n-uplets ; il y en a $\binom{a+b}{b}$ car il faut choisir les b tirages qui vont donner un jeton blanc parmi les $a+b$ tirages. On prend aussi la tribu pleine $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et pour $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω pour finaliser la modélisation. On a $X(\Omega) = [\![b; a+b]\!]$ (au moins b tirages pour prendre tous les jetons blancs et au plus $a+b$).

Soit $k \in [\![b; a+b]\!]$, alors $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\text{card}\,((X=k))}{\text{card}\,(\Omega)}$ (loi uniforme sur Ω). Or $\text{card}\,(\Omega) = \binom{a+b}{b}$ et $\text{card}\,((X=k)) = \binom{k-1}{b-1}$; en effet, il faut forcément un jeton blanc au tirage k et il faut choisir parmi les $k-1$ premiers tirages les $b-1$ tirages qui donnent un jeton blanc. Ainsi $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\binom{k-1}{b-1}}{\binom{a+b}{b}} = \dfrac{b(k-1)!a!}{(a+b)!(k-b)!}$.

c. Par définition, $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=b}^{a+b} k\,\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{\binom{a+b}{b}} \sum\limits_{k=b}^{a+b} k\binom{k-1}{b-1} = \dfrac{1}{\binom{a+b}{b}} \sum\limits_{k=b}^{a+b} b\binom{k}{b}$. Ce qui se simplifie d'après la question **a.** en $\mathbb{E}(X) = \dfrac{b\binom{a+b+1}{b+1}}{\binom{a+b}{b}} = \dfrac{b(a+b+1)}{b+1} < a+b$ (comme il se doit). De plus, $\mathbb{E}(X(X+1)) = \sum\limits_{k=b}^{a+b} k(k+1)\,\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{\binom{a+b}{b}} \sum\limits_{k=b}^{a+b} k(k+1)\binom{k-1}{b-1} = \dfrac{1}{\binom{a+b}{b}} \sum\limits_{k=b}^{a+b} b(b+1)\binom{k+1}{b+1}$.

Ce qui se simplifie d'après la question **a.** en $\mathbb{E}(X(X+1)) = \dfrac{b(b+1)\binom{a+b+2}{b+2}}{\binom{a+b}{b}} = \dfrac{b(a+b+2)(a+b+1)}{b+2}$.

Ainsi $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X+1)) - \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(X)$ par linéarité de l'espérance. Les résultats précédents montrent que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{b(a+b+2)(a+b+1)}{b+2} - \dfrac{b^2(a+b+1)^2}{(b+1)^2} - \dfrac{b(a+b+1)}{b+1}$ ce qui devient $\mathbb{V}(X) = \dfrac{b(b+1)^2(a+b+2)(a+b+1) - b^2(a+b+1)^2(b+2) - b(a+b+1)(b+1)(b+2)}{(b+1)^2(b+2)}$ et encore en $\mathbb{V}(X) = \dfrac{b(a+b+1)\left[(b+1)^2(a+b+2) - b(a+b+1)(b+2) - (b+1)(b+2)\right]}{(b+1)^2(b+2)} = \dfrac{ab(a+b+1)}{(b+1)^2(b+2)}$.

11.27 **a.** $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$. D'après une proposition admise dans le cours, il existe une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n) = \int_n^{n+1} f(t)dt = p_n$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n \in [0;1]$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

f étant décroissante, elle possède une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$ (en fait $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = -\infty$).

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n \in [0;1]$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Selon le signe de ℓ, la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est monotone au voisinage de $+\infty$ (croissante si $\ell \geqslant 0$, décroissante si $\ell < 0$). Avec $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k = \int_0^{n+1} f(t)dt$, la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}^{+\infty} p_n$ montre que $\left(\int_0^{n+1} f(t)dt = F(n+1)\right)_{n\geqslant 0}$ converge donc que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge. Or f garde un signe constant au voisinage de $+\infty$, ceci assure que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc que $\ell = 0$ et f est positive sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, on a $\int_0^{+\infty} f(t)dt = 1$ par CHASLES.
Réciproquement, si $f \geqslant 0$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt = 1$, $0 \leqslant p_n = \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)dt = 1$ et la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ montre la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}^{+\infty} p_n$. De plus, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = \int_0^{+\infty} f(t)dt = 1$.
On conclut par double implication à l'équivalence voulue.
b. Supposons que X admette une espérance finie, alors $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\,\mathbb{P}(X=n)$ converge. Par une sorte de comparaison série/intégrale, compte tenu que $f \geqslant 0$: $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [n;n+1],\ nf(t) \leqslant tf(t) \leqslant n+1)f(t)$. En sommant, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k\,\mathbb{P}(X=k) \leqslant \int_0^n tf(t)dt \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\mathbb{P}(X=k)$. Si on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum\limits_{k=0}^{n} kp_k$, on a donc $\int_0^n tf(t)dt \leqslant S_{n-1} + 1 \leqslant \mathbb{E}(X) + 1$. Mais comme $t \mapsto f(t)$ est positive, on a donc la croissance de $x \mapsto \int_0^x tf(t)dt$ donc la convergence de $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ donc $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Réciproquement, c'est l'autre inégalité qui sert, si $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $S_n \leqslant \int_0^{n+1} tf(t)dt \leqslant \int_0^{+\infty} tf(t)dt$ donc la suite croissante $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge : X admet une espérance finie.
Par contre, dans ce cas, on n'a pas égalité entre $\mathbb{E}(X)$ et $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$.

c. Par le même argument, comme X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance finie, la CNS cherchée est $h : t \mapsto t^2 f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

11.28 **a.** Non. Par exemple, si $B = (i)$, alors B est diagonalisable et $A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$ donc $A^2 = 0$ alors que $A \neq 0$ donc A n'est pas diagonalisable (exemple classique de matrice symétrique complexe non DZ).

b. On pose $B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, la matrice A est composée de quatre blocs diagonaux. Si on appelle u l'endomorphisme canoniquement associé à A et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$, alors la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}' = (e_1, e_{n+1}, e_2, e_{n+2}, \ldots, e_n, e_{2n})$ est diagonale par blocs $A' = \mathrm{diag}(B_1, \ldots, B_n)$ avec $B_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & \lambda_k^2 \\ \lambda_k^2 & -\lambda_k \end{pmatrix}$. B_k est donc la matrice de l'endomorphisme induit par u dans $\mathbb{P}_k = \mathrm{Vect}(e_k, e_{n+k})$.
Comme A et A' sont semblables, A est diagonalisable si et seulement si A' est diagonalisable.
Si u est DZ, alors tous les u_k le sont (ils sont induits) donc tous les blocs B_k sont diagonalisables.
Si tous les blocs B_k sont diagonalisables, on raisonne matriciellement et la matrice A' est DZ.
Ainsi, A est DZ si et seulement si tous les blocs B_k sont DZ. Or $\chi_{B_k} = X^2 - \lambda_k^2(1+\lambda_k^2)$.
- Si $\lambda_k \notin \{0, i, -i\}$, χ_{B_k} est scindé à racines simples donc B_k est diagonalisable.
- Si $\lambda_k = 0$, alors $B_k = 0$ donc elle est diagonalisable.
- Si $\lambda_k = \pm i$, alors $B_k^2 = 0$ alors que $B_k \neq 0$ donc B_k n'est pas diagonalisable.

Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable est que $\{i, -i\} \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

c. Les complexes i et $-i$ ne font partie des racines n-ièmes de l'unité que si n est un multiple de 4. De plus les valeurs propres de B sont les $X_1, \ldots, X_n$. Ainsi :

- Si $n \not\equiv 0$ [4] alors $p = 1$ car $\{i, -i\} \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.
- Si $n \equiv 0$ [4], alors la probabilité de choisir i ou $-i$ dans $\mathbb{U}_n$ est $\dfrac{n-2}{n}$. Il y a n termes à choisir sur la

diagonale de B et de manière indépendante donc $p=\left(\dfrac{n-2}{n}\right)^n$.

Questions supplémentaires :

• L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est un groupe abélien de cardinal n.

• $(G,*)$ est une groupe si $*$ est une loi interne associative sur G, s'il existe une neutre e dans G pour la loi $*$ et si tout élément $x\in G$ possède un inverse pour la loi $*$ dans G.

• On sait que $\sum\limits_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=0$ si $n\geqslant 2$. En effet, en notant $\omega_n=\varepsilon^{\frac{2i\pi}{n}}$, alors $\mathbb{U}_n=\{1,\omega_n,\ldots,\omega_n^{n-1}\}$ donc $\sum\limits_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_n^k=\dfrac{1-\omega_n^n}{1-\omega_n}=0$ car $\omega_n\neq 1$ et $\omega_n^n=1$.

11.29 Bien sûr, on suppose les tirages mutuellement indépendants et équiprobables.

a. $X_1(\Omega)=\{n-1,n\}$. $\mathbb{P}(X_1=n)=\dfrac{1}{2}$ (une chance sur deux de tirer une boule noire) et $\mathbb{P}(X_1=n-1)=\dfrac{1}{2}$ (une chance sur deux de tirer une boule blanche transformée en boule noire).
On a aussi $X_2(\Omega)=\{n-2,n-1,n\}$. On note B_1 : "boule blanche au premier tirage" et B_2 : " boule blanche au second tirage". Alors $(X_2=n)=\overline{B_1}\cap\overline{B_2}$ donc $\mathbb{P}(X_2=n)=\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2})\,\mathbb{P}(\overline{B_1})=(1/2)\times(1/2)=(1/4)$.
$(X_2=n-2)=B_1\cap B_2$ donc $\mathbb{P}(X_2=n-2)=\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\,\mathbb{P}(B_1)=\dfrac{n-1}{2n}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{n-1}{4n}$.
Pour finir, soit $\mathbb{P}(X_2=n-1)=1-\mathbb{P}(X_2=n)-\mathbb{P}(X_2=n-2)$ soit $(X_2=n-1)=(B_1\cap\overline{B_2})\cup(\overline{B_1}\cap B_2)$. Ainsi $\mathbb{P}(X=n-1)=1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{n-1}{4n}$ ou $\mathbb{P}(X_2=n-1)=\dfrac{n+1}{2n}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}$; toujours est-il que $\mathbb{P}(X_2=n-1)=\dfrac{2n+1}{4n}$.

b. Si, en général, pour $i\in\mathbb{N}^*$: B_i : "boule blanche au tirage i", alors $(X_k=n)=B_1\cap\cdots\cap B_k$ ce qui donne par la formule des probabilités composées (puisque la configuration de l'urne ne change pas : on ne tire que des boules noires) $\mathbb{P}(X_k=n)=\dfrac{1}{2^k}$.

c. Soit $p\geqslant 1$ et $k\geqslant 0$, alors pour avoir k boules blanches au bout de $p+1$ tirages, on avait soit $k+1$ boules blanches au bout de p tirages et on a tiré une boule blanche au tirage $p+1$ qui a été remplacée par une boule noire, soit on avait déjà k boules blanches au bout de p tirages et on a tiré une boule noire au tirage $p+1$, ceci se traduit par : $(X_{p+1}=k)=\big((X_p=k)\cap\overline{B_{p+1}}\big)\cup\big((X_p=k+1)\cap B_{p+1}\big)$. Par incompatibilité de ces évènements : $\mathbb{P}(X_{p+1}=k)=\mathbb{P}_{(X_p=k)}(\overline{B_{p+1}})\,\mathbb{P}(X_p=k)+\mathbb{P}_{(X_p=k+1)}(B_{p+1})\,\mathbb{P}(X_p=k+1)$.
Ou alors avec le système complet d'évènements $\big((X_p=i)\big)_{n-p\leqslant i\leqslant n}$ et la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(X_p+1=k)=\sum\limits_{i=n-p}^{n}\mathbb{P}(X_p=i)\,\mathbb{P}_{(X_p=i)}(X_{p+1}=k)$ sachant que $i\neq k$ et $i\neq k+1$, $\mathbb{P}_{(X_p=i)}(X_{p+1}=k)=0$.
Or, si $X_p=k$, il y a dans l'urne k boules blanches et $n-k$ boules noires donc $\mathbb{P}_{(X_p=k)}(\overline{B_{p+1}})=\dfrac{2n-k}{2n}$. De même : $\mathbb{P}_{(X_p=k+1)}(B_{p+1})=\dfrac{k+1}{2n}$. Ainsi : $\mathbb{P}(X_{p+1}=k)=\dfrac{2n-k}{2n}\mathbb{P}(X_p=k)+\dfrac{k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p=k+1)$.

d. Par construction, comme $X_p(\Omega)\subset[\![0;n]\!]$, on a $G_p(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}t^k\,\mathbb{P}(X_p=k)$. De plus, $\mathbb{P}(X_p=n)=2^{-n}\neq 0$ d'après la question **b.** donc G_p est une fonction polynomiale de degré n.

e. Pour $t\in\mathbb{R}$, $G_{p+1}(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}t^k\,\mathbb{P}(X_{p+1}=k)=\sum\limits_{k=0}^{n}\Big(\dfrac{2n-k}{2n}\mathbb{P}(X_p=k)+\dfrac{k+1}{2n}\mathbb{P}(X_p=k+1)\Big)t^k$ donc $G_{p+1}(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X_p=k)t^k-\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{k=0}^{n}k\,\mathbb{P}(X_p=k)t^k+\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)\,\mathbb{P}(X_p=k+1)t^k$ et on reconnaît l'expression des dérivées $G_{p+1}(t)=G_p(t)-\dfrac{1}{2n}tG_p'(t)+\dfrac{1}{2n}G_p'(t)$. On a bien $G_{p+1}(t)=G_p(t)+\dfrac{1-t}{2n}G_p'(t)$.
On dérive la relation précédente (ce sont des polynômes) : $G_{p+1}'(t)=G_p'(t)+\dfrac{1-t}{2n}G_p''(t)-\dfrac{1}{2n}G_p'(t)$. On évalue en 1 et on a $\mathbb{E}(X_{p+1})=\mathbb{E}(X_p)-\dfrac{1}{2n}\mathbb{E}(X_p)$. Ainsi $\mathbb{E}(X_{p+1})=\dfrac{2n-1}{2n}\mathbb{E}(X_p)$.

On calcule simplement $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{n}{2} + \dfrac{n-1}{2} = \dfrac{2n-1}{2}$. Comme la suite $\big(\mathbb{E}(X_p)\big)_{p\geqslant 1}$ est géométrique de raison $\dfrac{2n-1}{2n}$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_p) = \dfrac{2n-1}{2}\Big(\dfrac{2n-1}{2n}\Big)^{p-1}$. Or on peut écrire $\dfrac{\mathbb{E}(X_n)}{n} = \Big(\dfrac{2n-1}{2n}\Big)^n = e^{n\ln(1-\frac{1}{2n})} \to e^{-1/2}$ car $\ln\Big(1-\dfrac{1}{2n}\Big) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(X_n)}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \sim 0,606$ (c'est la proportion de boules blanches dans l'urne après n tirages par rapport à la configuration initiale).

11.30 **a.** Comme Y est à valeurs positives, on a $0 \leqslant X \leqslant Z$. Et comme Z suit une loi géométrique, Z admet une espérance finie. On en déduit par comparaison que X admet aussi une espérance finie.

De même, Z^2 admet aussi une espérance finie car Z admet une variance finie. Ainsi, comme $0 \leqslant X^2 \leqslant Z^2$, la variable aléatoire X^2 admet une espérance finie donc X admet une variance finie.

Par linéarité de l'espérance et d'après le cours, $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{p} = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) + 1 = 2\,\mathbb{E}(X) + 1$ donc $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-p}{2p}$.

Puisque X et Y sont indépendantes, $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{1-p}{p^2} = \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = 2\,\mathbb{V}(X)$ donc $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{2p^2}$.

b. Comme le rayon de convergence de toute série génératrice est supérieur à 1, et que d'après le cours $\forall t \in]-1;1[$, $G_Z(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$, on a $\forall t \in]-1;1[$, $G_{X+Y+1}(t) = \mathbb{E}(t^{X+Y+1}) = \mathbb{E}(t t^{X+Y}) = t\,\mathbb{E}(t^{X+Y})$ par linéarité de l'espérance. De plus, comme X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}(t^{X+Y}) = G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$ donc $G_{X+Y}(t) = tG_X(t)G_Y(t)$. Mais comme X et Y suivent la même loi, on a $G_X = G_Y$ donc $G_Z(t) = tG_X(t)^2$. On en déduit donc que $\forall t \in]-1;1[$, $G_X(t) = \sqrt{\dfrac{p}{1-(1-p)t}}$ car G_X est positive sur $]-1;1[$.

c. On sait que $\forall x \in]-1;1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}x^n$ ce qui donne, en remplaçant x par $-(1-p)t$, $\forall t \in [-1;1]$ $G_X(t) = \sqrt{p}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}(-1)^n(1-p)^n t^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{p}\,(2n)!(1-p)^n}{4^n(n!)^2}t^n$. En identifiant les coefficients, comme le rayon R de convergence vérifie $R \geqslant 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{\sqrt{p}\,(2n)!(1-p)^n}{4^n(n!)^2}$.

11.31 X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc Y aussi par définition de Y car $X+1 \geqslant 2$ donc $\dfrac{X+1}{2} \geqslant 1$.

Soit un entier $k \in \mathbb{N}^*$, alors $(Y=k) = (X=2k-1) \cup (X=2k)$. Par incompatibilité de ces évènements, on obtient $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(X=2k-1) + \mathbb{P}(X=2k)$. Puisque X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, il vient $\mathbb{P}(Y=k) = (1-p)^{2k-2}p + (1-p)^{2k-1}p = (1-p)^{2k-2}p(1+1-p)$, ce qui donne après simplification $\mathbb{P}(Y=k) = ((1-p)^2)^{k-1}(1-(1-p)^2) = (1-p(2-p))^{k-1}[p(2-p)]$.

Puisque $1-(1-p)^2 = p(2-p)$, Y suit la loi géométrique de paramètre $p(2-p)$.

11.32 **a.** Par construction, comme les X_i sont à valeurs positives, $0 \leqslant Y \leqslant X_1 + \cdots + X_k$. Comme les X_i admettent une espérance finie, alors leur somme aussi, et par comparaison, Y admet donc une espérance finie.

b. • Comme $(Y=n) = \bigcup\limits_{i=1}^{k}(T=i,\ X_1+\cdots+X_i=n)$ (réunion disjointe), par σ-additivité et indépendance mutuelle de $T, X_1, \cdots, X_k$: $\mathbb{P}(Y=n) = \sum\limits_{i=1}^{k}\mathbb{P}(T=i,\ X_1+\cdots+X_i=n) = \sum\limits_{i=1}^{k}\mathbb{P}(T=i)\,\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_i=n)$.

Ainsi $\mathbb{E}(Y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n \sum\limits_{i=1}^{k}\mathbb{P}(T=i)\,\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_i=n)$ or, pour tout $i \in [\![1;k]\!]$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n\,\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_i=n)$ converge et sa somme vaut $\mathbb{E}(X_1+\cdots+X_i) = i\,\mathbb{E}(X_1)$ par linéarité de l'espérance et car les X_j suivent toutes la même loi. Ainsi, par somme d'un nombre fini de séries convergentes, on peut intervertir et avoir

$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_i=n)\Big)\mathbb{P}(T=i) = \mathbb{E}(X_1)\sum_{i=1}^{k} i\,\mathbb{P}(T=i) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(T)$ (formule de WALD).

• Les séries génératrices étant au moins de rayon 1, on peut définir, pour $t\in]-1;1[$, comme $Y(\Omega)\subset\mathbb{N}$, $G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=n)t^n$. Or, $\mathbb{P}(Y=n) = \sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(T=i,\ X_1+\cdots+X_i=n) = \sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(T=i)\,\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_i=n)$ comme avant, donc $G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(T=i)\,\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_i=n)\Big)t^n$. On peut intervertir car il s'agit d'un nombre fini de séries convergentes et on obtient $G_Y(t) = \sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(T=i)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_i=n)t^n\Big)$. Par définition, $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_i=n)t^n = G_{X_1+\cdots+X_i}(t)$ or les variables aléatoires $X_1,\cdots,X_k$ sont mutuellement indépendantes donc $G_{X_1+\cdots+X_i} = \prod_{i=1}^{i} G_{X_j} = G_{X_1}^i$ car $X_1,\cdots,X_k$ ont la même loi. Ainsi, pour $t\in]-1;1[$, $G_Y(t) = \sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(T=i)\big(G_{X_1}(t)\big)^i = G_T(G_{X_1}(t))$. Comme ces variables aléatoires admettent des espérances finies, les fonctions génératrices correspondantes sont dérivables en 1 et on retrouve la formule de WALD car on a $\mathbb{E}(Y) = G_Y'(1) = G_{X_1}'(1)\times G_T'(G_{X_1}(1)) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(T)$ puisque $G_{X_1}(1)=1$.

11.33 **a.** ($\Longrightarrow$) Supposons que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors par définition $\forall k\in\mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n=k) = \mathbb{P}(X=k)$. Ainsi, $\forall k>m,\ \mathbb{P}(X=k) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n=k) = 0$ donc X est presque sûrement à valeurs dans $[\![0;m]\!]$. Or $\forall t\in\mathbb{R}, G_{X_n}(t) = \sum_{k=0}^{m}\mathbb{P}(X_n=k)t^k$ donc, par linéarité de la limite, $\lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(t) = \sum_{k=0}^{m}\mathbb{P}(X=k)t^k = G_X(t)$. Ainsi, $(G_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers G_X.

($\Longleftarrow$) Supposons que $(G_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$ vers G_X pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit les $m+1$ réels $\alpha_k = \frac{k}{m}$ pour $k\in[\![0;m]\!]$. Alors en notant L_k le polynôme d'interpolation de LAGRANGE associé, celui qui vérifie $L_k(\alpha_i) = \delta_{i,k}$ bien sûr, comme les fonctions G_{X_n} sont polynomiales de degré inférieur ou égal à m, on a $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in\mathbb{R},\ G_{X_n}(t) = \sum_{k=0}^{m} G_{X_n}(\alpha_k)L_k(t)$.

Par hypothèse, on a donc $G_X(t) = \lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(t) = \sum_{k=0}^{m} G_X(\alpha_k)L_k(t)$. La fonction G_X est donc aussi polynomiale de degré inférieur ou égal à m ce qui montre (par unicité des coefficients des séries entières) que $\forall k>m,\ \mathbb{P}(X=k)=0$. De plus, $(G_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers G_X dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}_m[X]$ car les coordonnées $(G_{X_n}(\alpha_1),\cdots,G_{X_n}(\alpha_m))$ de G_{X_n} dans la base $(L_1,\cdots,L_m)$ converge vers les coordonnées $(G_X(\alpha_1),\cdots,G_X(\alpha_m))$ de G_X dans cette même base. Comme on est en dimension finie, c'est vrai dans n'importe quelle base. On peut donc revenir dans la base canonique où les coordonnées de G_{X_n} sont $(\mathbb{P}(X_n=0),\cdots,\mathbb{P}(X_n=m))$ qui converge donc vers celle de G_X dans cette même base, à savoir $(\mathbb{P}(X=0),\cdots,\mathbb{P}(X=m))$. Ainsi $\forall k\in\mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n=k) = \mathbb{P}(X=k)$: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

b. Avec ces hypothèses, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(m,p_n)$ donc X_n est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0;m]\!]$ et $G_{X_n}(t) = (1-p_n+p_nt)^m$. D'après la question **a.**, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi si et seulement si la suite $(G_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0;1]$. Par exemple, cela implique que la suite $(G_{X_n}(1/2))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc encore que $(e^{\frac{\ln(G_{X_n}(1/2))}{m}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et enfin que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Réciproquement, si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $p\in[0;1]$, $\lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(t) = \lim_{n\to+\infty}(1-p_n+p_nt)^m = (1-p+pt)^m$ pour $t\in\mathbb{R}$ donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(m,p)$.
La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

11.34 **a.** Comme $p \neq 0$ et $p \neq 1$, on en déduit que $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$. Par indépendance de X_n et X_{n+1}, il vient $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = p^2$. Ainsi Y_n suit la loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(1, p^2)$. D'après le cours, $\mathbb{E}(Y_n) = p^2$, $\mathbb{V}(Y_n) = p^2(1 - p^2)$.

b. Bien sûr, si $i = j$, Y_i et Y_j sont plus que dépendantes (elles sont égales). Si $i < j$, on distingue deux cas :

• si $j = i + 1$, alors $(Y_i = 1, Y_{i+1} = 1) = (X_i = 1, X_{i+1} = 1, X_{i+2} = 1)$. Ainsi, par indépendance mutuelle de X_i, X_{i+1}, X_{i+2}, on a $\mathbb{P}(Y_i = 0, Y_{i+1} = 0) = \mathbb{P}(X_i = 1)\,\mathbb{P}(X_{i+1} = 1)\,\mathbb{P}(X_{i+2} = 1) = p^3$. Or, d'après la question **a.**, $\mathbb{P}(Y_i = 1)\,\mathbb{P}(Y_{i+1} = 1) = p^4$. Comme $p \neq 0$ et $p \neq 1$, Y_i et Y_{i+1} ne sont pas indépendantes.

• si $j > i + 1$, alors Y_i dépend de X_i et X_{i+1} alors que Y_{i+1} dépend de X_j et X_{j+1}, on sent que Y_i et Y_{i+1} sont indépendantes (lemme des coalitions). Or $(Y_i = 1, Y_j = 1) = (X_i = 1, X_{i+1} = 1, X_j = 1, X_{j+1} = 1)$, donc, comme avant : $\mathbb{P}(Y_i = 1, Y_j = 1) = p^4 = \mathbb{P}(Y_i = 1)\,\mathbb{P}(Y_j = 1)$. On vérifie de même qu'on a les égalités $\mathbb{P}(Y_i = 1, Y_j = 0) = p^2(1 - p^2) = \mathbb{P}(Y_i = 1)\,\mathbb{P}(Y_j = 0)$, $\mathbb{P}(Y_i = 0, Y_j = 1) = (1 - p^2)p^2 = \mathbb{P}(Y_i = 0)\,\mathbb{P}(Y_j = 1)$ et $\mathbb{P}(Y_i = 0, Y_j = 0) = (1 - p^2)^2 = \mathbb{P}(Y_i = 0)\,\mathbb{P}(Y_j = 0)$. Ainsi Y_i et Y_j sont bien indépendantes : $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$.

c. On traite trois cas selon le couple (n, m) :

- Si $n = m$, comme $Y_n Y_m = Y_n^2 = Y_n$, on en déduit que $\mathbb{E}(Y_n Y_m) = \mathbb{E}(Y_n) = p^2$.
- Si $|n - m| = 1$, $\mathbb{E}(Y_n Y_m) = p^3$.
- Si $|n - m| \geqslant 2$, par indépendance de Y_n et Y_m, $\mathbb{E}(Y_n Y_m) = \mathbb{E}(Y_n)\,\mathbb{E}(Y_m) = p^4$.

Par linéarité de l'espérance, comme $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $\mathbb{E}(Y_k) = p^2$, on a $\mathbb{E}\left(\dfrac{Z_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) = \dfrac{np^2}{n} = p^2$.

d. Comme Y_n et Y_m sont indépendantes dès que $|n - m| \geqslant 2$, on a $\mathbb{V}(Z_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(Y_k) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1})$ d'après le cours. Si $i \in [\![1; n - 1]\!]$, $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \mathbb{E}(Y_i Y_{i+1}) - \mathbb{E}(Y_i)\,\mathbb{E}(Y_{i+1}) = p^3 - p^4 = p^3(1 - p)$ donc $\mathbb{V}(Z_n) = np^2(1 - p^2) + 2(n - 1)p^3(1 - p)$. Comme $p^3(1 - p) \geqslant 0$, $V(Z_n) \leqslant Cn$ avec $C = p^2(1 - p^2) + 2p^3(1 - p)$ donc $C = p^2(1 - p)[1 + p + 2p] = [p(1 - p)](1 + 3p)p \leqslant \dfrac{1}{4} \times 4 \times 1 = 1$ et $\mathbb{V}\left(\dfrac{Z_n}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2}\,\mathbb{V}(Z_n) \leqslant \dfrac{C}{n}$.

D'après l'inégalité de TCHEBYCHEV, on a la majoration $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{Z_n}{n} - p^2\right| > \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(Z_n)}{\varepsilon^2}$. Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \dfrac{np^2(1 - p^2) + 2(n - 1)p^3(1 - p)}{n^2\varepsilon^2} = 0$ donc, par encadrement : $\forall \varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{Z_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

Par inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV, nous avons $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon^2}\,\mathbb{V}\left(\dfrac{S_n}{n}\right) \leqslant \dfrac{C^2}{n\varepsilon^2}$.

On conclut bien que $\forall \varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{Z_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$ par théorème d'encadrement.

11.35 **a.** Si X est une VAD de type 2, comme $\mathbb{P}(\Omega) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$, on a $|G_X(-1)| = 1$ car :

• soit $r = 1$ et $\mathbb{P}(X = 2k) = 0$ d'où $\mathbb{P}(\Omega) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k + 1) = 1$ donc $G_X(-1) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k + 1) = -1$.

• soit $r = 0$ et $\mathbb{P}(X = 2k + 1) = 0$ d'où $\mathbb{P}(\Omega) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k) = 1$ donc $G_X(-1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k) = 1$.

Réciproquement, si $G_X(-1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k) - \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k + 1) = \mathbb{P}(X \text{ pair}) - \mathbb{P}(X \text{ impair}) = \pm 1$, comme $\mathbb{P}(X \text{ pair}) \in [0; 1]$ et $\mathbb{P}(X \text{ impair}) \in [0; 1]$:

• soit $G_X(-1) = 1$ donc $\mathbb{P}(X \text{ pair}) = 1$ et $\mathbb{P}(X \text{ impair}) = 0$ et on a bien $(\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = 2k + 1) = 0)$: $r = 0$.

• soit $G_X(-1) = -1$ donc $\mathbb{P}(X \text{ impair}) = 1$ et $\mathbb{P}(X \text{ pair}) = 0$ et on a bien $(\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = 2k) = 0)$: $r = 1$.

Et on a établi que X est de type 2. On a bien l'équivalence annoncée par double implication.

b. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{m}} \in \mathbb{U}_m$. En distinguant selon le reste r de la division euclidienne de n par m, comme $\omega^n = \omega^{qm+r} = \omega^r$, $G_X(\omega) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)\omega^n = \sum\limits_{r=0}^{m-1} \Big(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = mq + r) \Big)\omega^r = \sum\limits_{r=0}^{m-1} \mathbb{P}(X \equiv r\ [m])\omega^r$.

• Supposons X d'ordre m. Soit $r \in [\![0; m-1]\!]$ tel que $\forall k \in \mathbb{N},\ k \not\equiv r\ [m],\ \mathbb{P}(X = k) = 0$. Alors, en sommant, on a $\mathbb{P}(X \equiv r'\ [m]) = 0$ si $r' \in [\![0; m-1]\!]$ et $r' \neq r$. Par conséquent, $G_X(\omega) = \mathbb{P}(X \equiv r\ [m])\omega^r = \omega^r$ car $\mathbb{P}(X \equiv r\ [m]) = 1$ et on a bien $|G_X(\omega)| = 1$.

• Réciproquement, si $|G_X(\omega)| = 1$, comme $G_X(\omega) = \sum\limits_{r=0}^{m-1} \mathbb{P}(X \equiv r\ [m])\omega^r$ on a par inégalité triangulaire $1 = |G_X(\omega)| \leqslant \sum\limits_{r=0}^{m-1} \mathbb{P}(X \equiv r\ [m])|\omega^r| = \sum\limits_{r=0}^{m-1} \mathbb{P}(X \equiv r\ [m]) = 1$ donc on a égalité dans l'inégalité triangulaire. Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire montre que $\mathbb{P}(X \equiv 0\ [m])\omega^0, \cdots, \mathbb{P}(X \equiv m-1\ [m])\omega^{m-1}$ sont positivement liés. Mais les m racines m-ièmes $\omega^0, \cdots, \omega^{m-1}$ de l'unité sont non colinéaires, ceci n'est possible que s'il existe $r \in [\![0; m-1]\!]$ tel que $\mathbb{P}(X \equiv r\ [m]) = 1$ et $\mathbb{P}(X \equiv r'\ [m]) = 0$ si $r' \neq r$. X est donc de type m.

Par double implication : X est de type m si et seulement si $\left| G_X\big(e^{\frac{2i\pi}{m}}\big) \right| = 1$.

c. Si r et r' dans $[\![1; m-1]\!]$ vérifient cette condition, alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a soit $k \not\equiv r\ [m]$, soit $k \neq r'\ [m]$ ce qui prouve que $\mathbb{P}(X = k) = 0$. Mais on a alors $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 0$ contredisant que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ ce qui implique $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. Ainsi, si r existe, r est bien unique.

d. ($\Longleftarrow$) Si X et Y sont de type m, alors $\big|G_X(\omega)\big| = 1$ et $\big|G_Y(\omega)\big| = 1$ d'après la question **b.**. Ainsi, comme X et Y sont indépendantes, $G_W = G_X G_Y$ donc $\big|G_W(\omega)\big| = \big|G_X(\omega)\big|\big|G_X(\omega)\big| = 1 \times 1 = 1$ et W est de type m.

($\Longrightarrow$) D'après la question **b.**, il vient $\big|G_W(\omega)\big| = 1$ donc $\big|G_X(\omega)\big|\big|G_X(\omega)\big| = 1$. Or on a vu à la question **b.** que $\big|G_X(\omega)\big| \leqslant 1$ et, de même, $\big|G_Y(\omega)\big| \leqslant 1$. Or $\big|G_X(\omega)\big|\big|G_X(\omega)\big| = 1$ donc ces inégalités sont des égalités et $\big|G_X(\omega)\big| = 1$ et $\big|G_Y(\omega)\big| = 1$. Toujours d'après **b.** : X et Y sont donc de type m.

On conclut par double implication que W de type $m \Longleftrightarrow X$ et Y de type m.

11.36 **a.** Pour $i \in [\![1; 20]\!]$, soit X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le candidat répond juste à la question i et 0 sinon. On suppose que $X_1, \cdots, X_{20}$ sont indépendantes mutuellement et elles suivent par hypothèse la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{k}$. Comme $X = \sum\limits_{i=1}^{20} X_i$ par construction, on sait que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\Big(20, \frac{1}{k}\Big)$, ce qui signifie que $\forall n \in [\![0; 20]\!],\ \mathbb{P}(X = n) = \binom{20}{n}\Big(\frac{1}{k}\Big)^n\Big(\frac{k-1}{k}\Big)^{20-n}$.

b. La famille $((X = n))_{n \in [\![0;20]\!]}$ constitue un système complet d'évènements donc, par la formule des probabilités totales : $\forall j \in [\![1; 20]\!],\ \mathbb{P}(Y = j) = \sum\limits_{n=0}^{20} \mathbb{P}(Y = j | X = n)\,\mathbb{P}(X = n)$. Or $\mathbb{P}(Y = j | X = n) = 0$ si $20-n < j$ et, si $j \leqslant 20-n$, comme il reste $20-n$ questions et un choix parmi $k-1$ réponses pour trouver la bonne pour chacune des $20-n$ questions, on a $\mathbb{P}(Y = j | X = n) = \binom{20-n}{j}\Big(\frac{1}{k-1}\Big)^j\Big(\frac{k-2}{k-1}\Big)^{20-n-j}$. Ainsi, il vient $\mathbb{P}(Y = j) = \sum\limits_{n=0}^{20-j} \binom{20-n}{j}\Big(\frac{1}{k-1}\Big)^j\Big(\frac{k-2}{k-1}\Big)^{20-n-j}\binom{20}{n}\Big(\frac{1}{k}\Big)^n\Big(\frac{k-1}{k}\Big)^{20-n}$.

Comme on a la relation classique $\binom{20-n}{j}\binom{20}{n} = \binom{20}{j}\binom{20-j}{n}$, Y suit aussi la loi binomiale $\mathcal{B}\Big(20, \frac{1}{k}\Big)$ car $\mathbb{P}(Y = j) = \dfrac{\binom{20}{j}}{k^n}\sum\limits_{n=0}^{20-j}\binom{20-j-n}{n}(k-2)^{20-j-n} = \dfrac{\binom{20}{j}}{k^n}(k-1)^{20-j} = \binom{20}{n} = j\Big(\frac{1}{k}\Big)^j\Big(\frac{k-1}{k}\Big)^{20-j}$.

À vérifier mais certainement que les variables aléatoires suivantes "nombres de bonnes réponses obtenues à la i-ième tentative" suivent toutes la même loi $\mathcal{B}\left(20,\frac{1}{k}\right)$ (indépendamment de i donc).

c. La note obtenue est $X+\frac{Y}{2}$, la condition imposée revient à $\mathbb{E}(X)+\frac{1}{2}\mathbb{E}(Y)=\frac{20}{k}+\frac{20}{2k}=5$, soit à $k=6$.

11.37 **a.** Dans ces conditions, la famille $(v_1,\cdots,v_n)$ est orthonormale donc, par la relation de Pythagore, on obtient $\left|\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k v_k\right|\right|^2=\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k^2=n$ et on passe à la racine pour avoir $\left|\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k v_k\right|\right|=\sqrt{n}$.
b. En utilisant la bilinéarité du produit scalaire : $U=\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}X_iX_j(v_i|v_j)$.
Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(U)=\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(v_i|v_j)\,\mathbb{E}(X_iX_j)$. Pour $k\in[\![1;n]\!]$, on a $\mathbb{E}(X_k)=0$ et $\mathbb{E}(X_k^2)=1$.
Par indépendance de X_i et X_j, si $i\neq j$, on a aussi $\mathbb{E}(X_iX_j)=\mathbb{E}(X_i)\,\mathbb{E}(X_j)=0$. Ainsi $\mathbb{E}(U)=\sum\limits_{k=1}^{n}||v_k||^2=n$.
c. Par l'absurde, supposons qu'on ait $\forall(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n$, $\left|\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k v_k\right|\right|>\sqrt{n}$. Notons $X=(X_1,\cdots,X_n)$ la variable aléatoire qui va de Ω dans $\{-1,1\}^n$ et $f:\{-1,1\}^n\to\mathbb{R}$ définie par $f(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=\left|\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k v_k\right|\right|^2$.
Comme $U=f(X_1,\cdots,X_n)=f(X)$, on a $\mathbb{E}(U)=\mathbb{E}(f(X))=\sum\limits_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n}\mathbb{P}(X=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n))f(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ par le théorème de transfert. $\mathbb{P}(X=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n))=\mathbb{P}(X_1=\varepsilon_1,\cdots,X_n=\varepsilon_n)=\prod\limits_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k=\varepsilon_k)=\frac{1}{2^n}$ par indépendance mutuelle des $X_1,\cdots,X_n$ et il vient $\mathbb{E}(U)=\frac{1}{2^n}\sum\limits_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n}\left|\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k v_k\right|\right|^2$. L'hypothèse ci-dessus prouve que $\mathbb{E}(U)>\frac{1}{2^n}\sum\limits_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n}n=\frac{n}{2^n}\mathrm{card}\left(\{-1,1\}^n\right)=n$ ce qui contredit le calcul de la question **b.**. Ainsi, il existe une famille $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n$ telle que $\left|\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k v_k\right|\right|\leqslant\sqrt{n}$.
d. On a montré ($\Longrightarrow$) à la question **a.**. Supposons que $\forall(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n$, $\left|\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k v_k\right|\right|=\sqrt{n}$.
Alors U est constante sur Ω et on a $U=n$. Ainsi $\mathbb{V}(U)=\mathbb{E}(U^2)-\mathbb{E}(U)^2=\mathbb{E}(U-\mathbb{E}(U))^2)=0$. Or $\mathbb{E}(U^2)=\mathbb{E}\left(\left|\left|\sum\limits_{k=1}^{n}X_kv_k\right|\right|^4\right)=\mathbb{E}\left(\left(\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}X_iX_j(v_i|v_j)\right)^2\right)$. En développant par linéarité de l'espérance, par indépendance mutuelle des X_i et puisque $\mathbb{E}(X_i)=0$, $X_i^2=1$ et $\mathbb{E}(X_i^2)=1$, on a la calcul suivant :
$\mathbb{E}(U^2)=\mathbb{E}\left(\left(n+\sum\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}X_iX_j(v_i|v_j)\right)^2\right)=n^2+2n\sum\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}(v_i|v_j)\,\mathbb{E}(X_i)\,\mathbb{E}(X_j)+\mathbb{E}\left(\left(\sum\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}X_iX_j(v_i|v_j)\right)^2\right)$.
La somme centrale est nulle et il ne reste de la dernière que $\mathbb{E}(U^2)=n^2+\sum\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}(v_i|v_j)^2$. Par conséquent $\mathbb{V}(U)=\mathbb{E}(U^2)-\mathbb{E}(U)^2=\sum\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}(v_i|v_j)^2=0$ donc tous les produits scalaires $(v_i|v_j)$ sont nuls et $(v_1,\cdots,v_n)$ est une famille orthonormale.
e. On suppose que $(v_1,\cdots,v_n)$ n'est pas une famille orthonormale. Par l'absurde, supposons que pour tout $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n$, on a $\left|\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k v_k\right|\right|\leqslant\sqrt{n}$. Alors, avec la formule de la question **c.** mais appliquée à U^2, on a $\mathbb{E}(U^2)=\frac{1}{2^n}\sum\limits_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n}\left|\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k v_k\right|\right|^4\leqslant\frac{1}{2^n}\sum\limits_{(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n}n^2=n^2$. On en déduit que $\mathbb{V}(U)=\mathbb{E}(U^2)-\mathbb{E}(U)^2\leqslant n^2-n^2=0$ donc $\mathbb{V}(U)=0$ car c'est une quantité positive. Mais d'après la question **d.**, il vient $\mathbb{V}(U)=\sum\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}(v_i|v_j)^2=0$ ce qui est impossible car la famille $(v_1,\cdots,v_n)$ n'étant pas une famille orthonormale alors que les vecteurs v_k sont unitaires, on a $\sum\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}(v_i|v_j)^2>0$. Par conséquent, il existe bien $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n$ telle que $\left|\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k v_k\right|\right|>\sqrt{n}$.

11.38 **a.** Si $\omega \in A$, alors $\underset{1\leqslant k\leqslant n}{\text{Max}} |S_k| \geqslant 3x$. Si on note $r = \text{Min}\{k \in [\![1;n]\!] \mid |S_k| \geqslant 3x\}$, on a $\omega \in A_r$ donc $A \subset A_1 \cup \cdots A_n$. L'inclusion inverse est clairement vérifiée donc $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. De plus, si $1 \leqslant i < j \leqslant n$ et si $\omega \in A_j$, alors $\underset{1\leqslant \ell\leqslant j-1}{\text{Max}} |S_\ell| < 3x\}$ donc $|S_i| < 3x$ car $1 \leqslant i \leqslant j-1$ et alors $\omega \notin A_i$. Ainsi, les évènements $A_1, \cdots, A_n$ sont incompatibles deux à deux : ils forment bien une partition de A.

L'évènement A_k dépend des variables aléatoires $X_1, \cdots, X_k$ et la variable aléatoire $S_n - S_k = \sum_{i=k+1}^{n} X_i$ dépend de $X_{k+1}, \cdots, X_n$. Par le lemme des coalitions, les évènements A_k et $\{|S_n - S_k| > 2x\}$ sont donc indépendants. On a bien sûr $A = (A \cap (|S_n| \geqslant x)) \cup (A \cap (|S_n| < x))$ en distinguant selon la valeur de $|S_n|$.

$(A \cap (|S_n| \geqslant x))$ et $(A \cap (|S_n| < x))$ étant incompatibles, on a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap (|S_n| \geqslant x)) + \mathbb{P}(A \cap (|S_n| < x))$. Mais comme $A \cap (|S_n| \geqslant x) \subset (|S_n| \geqslant x)$, on a $\mathbb{P}(A \cap (|S_n| \geqslant x) \leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant x)$ donc finalement, on obtient la majoration $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant x) + \mathbb{P}(A \cap (|S_n| < x))$.

b. Comme $A \cap (|S_n| < x) = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap (|S_n| < x))$, par incompatibilité de ces évènements, on a l'inégalité $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant x) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \cap (|S_n| < x))$ or $A_k \cap (|S_n| < x) \subset A_k \cap (|S_n - S_k| > 2x)$ donc, par indépendance, il vient $\mathbb{P}(A_k \cap (|S_n| < x)) \leqslant \mathbb{P}(A_k \cap (|S_n - S_k| > 2x) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(|S_n - S_k| > 2x)$.
???????????

11.39 **a.** Soit $s \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors en notant $A_0 = 0$, on a $a_k = A_k - A_{k-1}$ pour tout entier $k \geqslant 1$ donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^s} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k - A_{k-1}}{k^s} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{k^s} - \sum_{k=2}^{n} \frac{A_{k-1}}{k^s} = \frac{A_n}{n^s} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k}{k^s} - \sum_{k=2}^{n} \frac{A_{k-1}}{k^s} = \frac{A_n}{n^s} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\right) A_k$ après avoir effectué le changement d'indice $i = k-1$ dans la somme $\sum_{k=2}^{n} \frac{A_{k-1}}{k^s}$ (transformation d'ABEL).

b. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $s \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}\,(s) > \alpha$, on suppose que $A_n \underset{+\infty}{=} O(n^\alpha)$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n}{n^s} = 0$ car $\frac{A_n}{n^s} \underset{+\infty}{=} O(n^{\alpha-s}) = O(n^{\alpha-\text{Re}\,(s)})$ et $\alpha - \text{Re}\,(s) < 0$. De plus, en utilisant les développements limités, il vient $\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} = \frac{1}{k^s}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-s}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{k^s}\left(1 - \left(1 - \frac{s}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{s}{k^{s+1}}$ (sauf si $s = 0$) donc, par hypothèse, $\left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\right) A_k \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{k^{s-\alpha+1}}\right)$ donc $\sum_{k\geqslant 1} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\right) A_k$ converge absolument donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$ converge.

c. Comme $(|A_n| > x) = (A_n > x) \cup (A_n < -x) = (A_n > x) \cup (-A_n > x)$ et que ces évènements sont incompatibles, on a $\mathbb{P}(|A_n| > x) = \mathbb{P}(A_n > x) + \mathbb{P}(-A_n > x)$. Or, comme les a_k ont même loi que les $-a_k$, A_n a même loi que $-A_n$ donc $\mathbb{P}(-A_n > x) = \mathbb{P}(A_n > x)$. Donc $\mathbb{P}(|A_n| > x) = 2\,\mathbb{P}(A_n > x)$.

Comme $\lambda > 0$ et $\exp$ strictement croissante, $(A_n > x) = (e^{\lambda A_n} > e^{\lambda x})$ et $e^{\lambda A_n}$ est une variable aléatoire positive donc, par l'inégalité de MARKOV adaptée $\mathbb{P}(X > \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$ (avec la même preuve et la croissance -mais pas stricte- de l'espérance), on a $\mathbb{P}(A_n > x) \leqslant \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda A_n})}{e^{\lambda x}}$. On en déduit que $\mathbb{P}(|A_n| > x) \leqslant 2\frac{\mathbb{E}(e^{\lambda A_n})}{e^{\lambda x}}$.

d. Les variables aléatoires $a_1, \cdots, a_n$ sont mutuellement indépendantes, donc aussi $e^{\lambda a_1}, \cdots, e^{\lambda a_n}$, ainsi, d'après le cours : $\mathbb{E}(e^{\lambda A_n}) = \mathbb{E}(e^{\lambda a_1}) \cdots \mathbb{E}(e^{\lambda a_n})$. Mais, pour $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{E}(e^{\lambda a_k}) = \frac{1}{2}\left(e^\lambda + e^{-\lambda}\right) = \text{ch}\,(\lambda)$. Ainsi : $\mathbb{E}(e^{\lambda A_n}) = \text{ch}\,(\lambda)^n$. Or $\forall a \in \mathbb{R}$, $\text{ch}\,(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n}}{(2n)!}$ et $e^{\frac{a^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n}}{2^n n!}$. Or si on pose $a_n = \frac{2^n n!}{(2n)!}$, on a $a_{n+1} = \frac{2(n+1)a_n}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{a_n}{2n+1} \leqslant a_n$ donc la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et $a_0 = 1$. Ainsi,

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant 1 \iff \dfrac{1}{(2n)!} \leqslant \dfrac{1}{2^n n!}$. On en déduit que $\forall a \in \mathbb{R},\ \text{ch}\,(a) \leqslant e^{\frac{a^2}{2}}$.

Par conséquent, $\mathbb{P}(|A_n| > x) \leqslant 2\dfrac{e^{\frac{n\lambda^2}{2}}}{e^{\lambda x}} = h_x(\lambda) = 2e^{\frac{n\lambda^2}{2}-\lambda x}$. Or le minimum de $\lambda \mapsto n\dfrac{\lambda^2}{2} - \lambda x$ est atteint en $\lambda = \lambda_0 = \dfrac{x}{n}$ (étude de parabole). Donc $\mathbb{P}(|A_n| > x) \leqslant h_x(\lambda_0) = 2e^{\frac{-x^2}{2n}}$.

11.40 **a.** Concernant le premier tirage, comme les $\dbinom{2n}{2}$ tirages de parties à 2 éléments de l'ensemble des $2n$ boules sont équiprobables, et que seuls n parmi ces paires (paire $1,1$, paire $2,2$, etc...) permettent d'avoir l'évènement A_n, on a $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{n}{\dbinom{2n}{2}} = \dfrac{1}{2n-1}$. On pouvait aussi modéliser l'expérience en disant qu'on prend une boule après l'autre, et que quelle que soit la boule qu'on a pris en premier, il ne reste alors dans l'urne qu'une boule pour faire une paire sur les $2n-1$ boules restantes, ce qui donne encore $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{2n-1}$.

b. D'abord $T_1 = 1$ puisqu'il n'y a alors dans l'urne que deux boules numérotée 1 qu'on tire la première fois. On note $T_n = +\infty$ si on ne vide jamais l'urne. $T_n(\Omega) \subset [\![n; +\infty]\!]$ (au moins n tirages pour vider l'urne).

On suppose maintenant qu'il y a 4 boules (2 paires) dans l'urne. Pour $k \geqslant 1$, on note $\mathbb{P}_k$ l'évènement "on tire une paire au tirage k". Quand on aura tiré la première paire, il restera deux boules identiques dans l'urne qu'on sera obligé de tirer. Alors, pour $k \geqslant 2$, $(T_2 = k) = \Big(\bigcap\limits_{i=1}^{k-2} \overline{P_i}\Big) \cap P_{k-1} \cap P_k$. Par indépendance des tirages et d'après la question **a.** avec $n = 2$ puis $n = 1$: $\mathbb{P}(T_2 = k) = \Big(\dfrac{2}{3}\Big)^{k-2} \times \dfrac{1}{3} \times 1 = \dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{2}{3}\Big)^{k-2}$. Comme $(T_2 < +\infty) = \bigsqcup\limits_{k=2}^{+\infty}(T_2 = k)$ (évènements incompatibles), on a $\mathbb{P}(T_2 < +\infty) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(T_2 = k) = \dfrac{1/3}{1-(2/3)} = 1$ par σ-additivité donc $\mathbb{P}(T_2 = +\infty) = 0$. Comme $\mathbb{P}(T_2 - 1 = k) = \Big(\dfrac{2}{3}\Big)^{k-1}\dfrac{1}{3}$ et que $(T_2 - 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (presque sûrement), $T_2 - 1$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}\Big(\dfrac{1}{3}\Big)$. D'après le cours, $\mathbb{E}(T_2 - 1) = 3$ et $\mathbb{V}(T_2 - 1) = 6$. Par les propriétés de l'espérance et de la variance, on a donc $\mathbb{E}(T_2) = 4$ et $\mathbb{V}(T_2) = 6$.

c. Pour $k \in [\![1; n]\!]$, on note $T_{n,k}$ le nombre de tirages pour retirer les k premières paires (temps d'attente du k-ième retrait de paire) de sorte que, par définition, $T_{n,n} = T_n$. Comme la probabilité de retirer deux boules dans une urne de $2n$ boules est de $\dfrac{1}{2n-1}$ d'après la question **a.**, la variable aléatoire $T_{n,1}$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}\Big(\dfrac{1}{2n-1}\Big)$ par indépendance des tirages. De même, $T_{n,2} - T_{n,1}$ représente le nombre de tirages nécessaires pour retirer la seconde paire une fois retirée la première. Mais comme il ne reste plus que $2n-2$ boules dans l'urne pendant cette période, $T_{n,2} - T_{n,1}$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}\Big(\dfrac{1}{2n-3}\Big)$. En général, $T_{n,k} - T_{n,k-1}$ suit $\mathcal{G}\Big(\dfrac{1}{2n-2k+1}\Big)$ pour $k \in [\![2; n]\!]$. Or $T_n = T_{n,n} = \sum\limits_{k=1}^{n}(T_{n,k} - T_{n,k-1})$ en convenant que $T_{n,0} = 0$. Les variables $T_{n,1}, T_{n,2} - T_{n,1}, \cdots, T_{n,n} - T_{n,n-1}$ sont indépendantes (le nombre de tirages effectués pour retirer la première boule n'influe pas sur le nombre de tirages pour retirer la seconde, etc....) donc $\mathbb{E}(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(T_{n,k} - T_{n,k-1})$ et $\mathbb{V}(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(T_{n,k} - T_{n,k-1})$. On sait d'après le cours qu'alors $\mathbb{E}(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{n}(2n-2k+1) = \sum\limits_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$ et $\mathbb{V}(T_n) = \sum\limits_{j=1}^{n}\big((2j-1)^2 - (2j-1)\big) = \dfrac{n(n-1)(4n+1)}{3}$ (après calculs). On vérifie que $V(T_1) = 0$, ce qui est logique puisque T_1 est constante égale à 1.

On vérifie que ces formules fonctionnent pour $n=2$ et redonnent $\mathbb{E}(T_2)=2^2=4$ et $\mathbb{V}(T_2)=\dfrac{2.1.9}{3}=6$.

11.41 **a.** Comme $\forall k\in[\![1;n]\!]$, $\mathbb{E}(X_k)=0$, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\,\mathbb{E}(X_k)=m_n=0$. Par indépendance 2 à 2 des variables aléatoires $X_1,\cdots,X_n$, donc aussi des variables aléatoires $a_1X_1,\cdots,a_nX_n$ par transfert d'indépendance, on a $\mathbb{V}(S_n)=\mathbb{V}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}a_kX_k\Big)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2\,\mathbb{V}(X_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2=\sigma_n^2$ d'après le cours.

b. $\forall t\in\mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{t^{2n}}{(2n)!}$ et $e^{\frac{t^2}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{t^{2n}}{2^nn!}$. Si $a_n=\dfrac{2^nn!}{(2n)!}$, $a_{n+1}=\dfrac{2(n+1)a_n}{(2n+2)(2n+1)}=\dfrac{a_n}{2n+1}\leqslant a_n$ donc $(a_n)_{n\geqslant0}$ décroît et $a_0=1$. Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n\leqslant1\iff\dfrac{1}{(2n)!}\leqslant\dfrac{1}{2^nn!}$. D'où $\forall t\in\mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(t)\leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$.

On pouvait aussi étudier la fonction $f:t\mapsto\dfrac{t^2}{2}-\ln(\operatorname{ch}(t))$, elle est deux fois dérivable et on a $f'(t)=t-\operatorname{th}(t)$ et $f''(t)=\operatorname{th}^2(t)\geqslant0$ pour $t\in\mathbb{R}$ donc, comme $f'(0)=0$, f' est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$ ce qui montre que f est minimale en 0 et, comme $f(0)=0$, que f est finalement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\forall t\in\mathbb{R}$, $\ln(\operatorname{ch}(t))\leqslant\dfrac{t^2}{2}$ et on conclut par croissance de l'exponentielle que $\forall t\in\mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(t)\leqslant e^{t^2/2}$.

c. Les variables aléatoires $X_1,\cdots,X_n$ sont indépendantes par hypothèse, on sait qu'alors, par transfert d'indépendance, les variables aléatoires $e^{a_1X_1},\cdots,e^{a_nX_n}$ sont aussi indépendantes. D'après le cours, puisque $\forall k\in[\![1;n]\!]$, $\mathbb{E}(e^{\lambda a_kX_k})=\dfrac{1}{2}\Big(e^{\lambda a_k}+e^{-\lambda a_k}\Big)=\operatorname{ch}(\lambda a_k)$ par la formule de transfert, et d'après la question **b.**, $\forall\lambda>0$, $\mathbb{E}(e^{\lambda S_n})=\mathbb{E}(e^{\lambda a_1X_1}\cdots e^{\lambda a_nX_n})=\prod\limits_{k=1}^{n}\mathbb{E}(e^{\lambda a_kX_k})=\prod\limits_{k=1}^{n}\operatorname{ch}(\lambda a_k)\leqslant\prod\limits_{k=1}^{n}e^{\lambda^2a_k^2/2}=e^{\frac{\lambda^2\sigma_n^2}{2}}$.

d. $\exp$ est strictement croissante et $x>0$ donc $(S_n\geqslant x)=(e^{\lambda S_n}\geqslant e^{\lambda x})$ donc $\mathbb{P}(S_n\geqslant x)=\mathbb{P}(e^{\lambda S_n}\geqslant e^{\lambda x})$. D'après l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire discrète réelle bornée et positive $e^{\lambda S_n}$, on a l'inégalité $\mathbb{P}(S_n\geqslant x)\leqslant\dfrac{\mathbb{E}(e^{\lambda S_n})}{e^{\lambda x}}\leqslant\dfrac{e^{\frac{\lambda^2\sigma_n^2}{2}}}{e^{\lambda x}}=h_x(\lambda)=e^{\frac{\lambda^2\sigma_n^2}{2}-\lambda x}$. Or le minimum de $\lambda\mapsto\dfrac{\lambda^2\sigma_n^2}{2}-\lambda x$ est atteint en $\lambda=\lambda_0=\dfrac{x}{\sigma_n^2}$ (étude de parabole). Par conséquent : $\mathbb{P}(S_n\geqslant x)\leqslant h_x(\lambda_0)=e^{\frac{-x^2}{2\sigma_n^2}}$.

Par exemple, si on effectue une marche aléatoire classique avec $a_1=\cdots=a_n=1$, alors $\sigma_n^2=n$ et S_n représente la position du marcheur après n pas et on a la majoration $\mathbb{P}(S_n\geqslant\alpha\sqrt{n})\leqslant e^{\frac{-\alpha^2n}{2n}}=e^{\frac{-\alpha^2}{2}}$.

11.42 **a.** L'ensemble X_n est un compact car il est fini de cardinal 2^n (un singleton est fermé dans un espace vectoriel normé donc aussi une réunion finie de singletons) et l'application $\det$ est continue car polynomiale sur l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\det$ est bornée et atteint ses bornes sur X_n donc il existe $A\in X_n$ tel que $\operatorname{Max}\limits_{X_n}(\det)=\det(A)$ de sorte que $\forall M\in X_n$, $\det(M)\leqslant\det(A)$.

b. Soit $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in X_n$, $(M=B)=\bigcap\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(X_{i,j}=b_{i,j})=\dfrac{1}{2^n}>0$ donc, par indépendance mutuelle des $X_{i,j}$, il vient $\mathbb{P}(M=B)=\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}\mathbb{P}(X_{i,j}=b_{i,j})=\dfrac{1}{2^n}>0$. Ainsi $(M=B)\neq\emptyset$ donc il existe $\omega\in\Omega$ tel que $M(\omega)=B$: $B\in M(\Omega)$ d'où $X_n\subset M(\Omega)$. Comme l'inclusion réciproque est claire : $M(\Omega)=X_n$.

c. $(M\in S_n(\mathbb{R}))=\bigcap\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(X_{i,j}=X_{j,i})$ et les évènements $(X_{i,j}=X_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ sont indépendants mutuellement par hypothèse donc $\mathbb{P}(M\text{ symétrique})=\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathbb{P}(X_{i,j}=X_{j,i})=\dfrac{1}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}$.

d. La matrice $B_{n+1}=\begin{pmatrix}A_n&0\\0&1\end{pmatrix}$ appartient à X_{n+1} donc $\det(B_{n+1})=\det(A_n)=u_n\leqslant\det(A_{n+1})=u_{n+1}$

d'après la question **a.**. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. On a $u_1 = u_2 = 1$ avec $A_1 = (1)$ et $A_2 = I_2$ par exemple. Par contre $u_3 \geqslant 2$ avec $B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de déterminant 2. En fait $u_3 = 2$ (voir OEIS A003432). Par conséquent, en considérant le matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(B_3, \cdots, B_3) \in X_{3n}$, on a $u_{3n} \geqslant 2^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n} = +\infty$. Comme $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par le théorème de la limite monotone.

11.43 **a.** Pour compléter la collection en m achats, il faut avoir m jouets différents en m achats ce qui se fait de $m!$ façons différentes. Ainsi, par indépendance et équiprobabilité des achats, $q_m = \dfrac{m!}{m^m}$ car il y a m^m possibilités de faire m achats à m jouets. Dans ce raisonnement, on a choisi $\Omega = [\![1; m]\!]^m$, la tribu pleine $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et la probabilité uniforme sur Ω, ainsi en notant C_m = “on complète la collection en m achats”, on a $q_m = \mathbb{P}(C_m) = \dfrac{\text{card}\,(C_m)}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{m!}{m^m}$ car C_m est l'ensemble des $m!$ m-listes d'éléments distincts de l'intervalle $[\![1; m]\!]$: tant de précision n'et pas forcément souhaitable à l'oral !
Ainsi, $\dfrac{q_{m+1}}{q_m} = \dfrac{(m+1)!m^m}{m!(m+1)^{m+1}} = \dfrac{(m+1)m^m}{(m+1)^{m+1}} = \dfrac{m^m}{(m+1)^m} = \left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{-m}$ or $\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{-m} = e^{-m\ln(1+(1/m))}$ avec $\lim\limits_{m\to+\infty} m\ln\left(1+\dfrac{1}{m}\right) = 1$ car $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$. Par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{m\to+\infty} \dfrac{q_{m+1}}{q_m} = \dfrac{1}{e}$.
Si la question avait été de déterminer la probabilité q_n de compléter la collection en exactement n achats, alors $q_n = 0$ si $n < m$. Posons J_i = “le jouet i n'a pas été acheté au cours des n premiers achats”. Alors, l'évènement $\bigcap\limits_{i=1}^{m} \overline{J_i}$ est justement T_n = “la collection est terminée en au plus n achats”. Si on pose l'évènement E_n = “la collection est terminé en exactement n achats”, on a $E_n = T_n \setminus T_{n-1}$ alors que $T_{n-1} \subset T_n$ donc $q_n = \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(T_n) - \mathbb{P}(T_{n-1})$. Or $\overline{T_n} = \bigcup\limits_{i=1}^{m} J_i$ ce qui donne avec la formule du crible $\mathbb{P}(\overline{T_n}) = 1 - \mathbb{P}(T_n) = \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{m} J_i\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\Big(\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{j=1}^{k} J_{i_j}\Big)\Big)$, et comme la probabilité de $\bigcap\limits_{j=1}^{k} J_{i_j}$ (intersection de k évènements du type J_i) vaut $\left(\dfrac{m-k}{m}\right)^n$ ($m-k$ jouets seulement sur m achats), on a $1 - \mathbb{P}(T_n) = \sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^{k-1}\dbinom{m}{k}\left(\dfrac{m-k}{m}\right)^n$. Ainsi $q_n = \sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^{k-1}\dbinom{m}{k}\left(\left(\dfrac{m-k}{m}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{m-k}{m}\right)^n\right)$. C'est beaucoup plus délicat et surtout hors programme.
b. Clairement, si on note X_0 le nombre d'achats qu'il effectue pour l'obtention du premier jouet, on a $X_0 = 1$ (tout jouet est un nouveau jouet au départ). Quand on a déjà obtenu k jouets différents, obtenir un nouveau jouet se fait avec une probabilité $\dfrac{m-k}{m}$. Par indépendance mutuelle des achats de jouets, X_k suit d'après le cours la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\dfrac{m-k}{m}\right)$ (temps d'attente d'un succès).
c. T représente le nombre d'achats nécessaires pour obtenir la collection complète des m jouets. $\mathbb{E}(T)$ est donc la moyenne de T. Si un jouet coûte c, $c\,\mathbb{E}(T)$ représente le coût moyen de la collection complète.
Par linéarité, $\mathbb{E}(T) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{m-1} \mathbb{E}(X_k) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \dfrac{m}{m-k} = m\sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{1}{j} = mH_m$ en posant $j = m - k$.
d. Il est classique, on le fait par comparaison série-intégrale, que $H_m \underset{+\infty}{\sim} \ln(m)$ ou alors on utilise le développement asymptotique $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ (mais hors programme). Ainsi $\mathbb{E}(T) \underset{+\infty}{\sim} m\ln(m)$.
Plus précisément, mais encore moins au programme, on a $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ce qui donne

$\mathbb{E}(T) = m\ln(m) + \gamma m + \dfrac{1}{2} + o(1)$ ce qui est très précis.

11.44 **a.** Comme Z est une variable aléatoire à valeurs entières, 2^{-Z} est à valeurs dans $]0;1]$ donc elle est bornée. Ainsi 2^{-Z} admet une espérance finie.

b. On vérifie que ceci est cohérent : $\mathbb{P}(\Omega) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z=n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{n+1}} = 1$. De plus, par définition de $r(Z)$, on a $r(Z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\,\mathbb{P}(Z=n) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1}{2(1-(1/4))} = \dfrac{2}{3}$.

c. Par indépendance mutuelle des $X_1,\cdots,X_q$, on a $G_{S_q} = \prod\limits_{k=1}^{q} G_{X_k}$. Comme par hypothèse, $G_{X_1},\cdots,G_{X_q}$ sont deux fois dérivables en 1, la fonction G_{S_q} l'est par produit et on a $G'_{S_q}(1) = \sum\limits_{k=1}^{q}\Big(\prod\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ i\neq k}} G_{X_i}(1)\Big)G'_{X_k}(1)$. Or $G_{X_i}(1) = 1$ donc $\mathbb{E}(S_q) = G'_{S_q}(1) = \sum\limits_{k=1}^{q} G'_{X_k}(1) = \sum\limits_{k=1}^{q} \mathbb{E}(X_k)$; ceci est juste une vérification de la linéarité de l'espérance. De même $G''_{S_q}(1) = \sum\limits_{k=1}^{q}\Big(\prod\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ i\neq k}} G_{X_i}(1)\Big)G''_{X_k}(1) + \sum\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant q}\Big(\prod\limits_{\substack{1\leqslant m\leqslant q\\ m\neq i,\, m\neq j}} G_{X_i}(1)\Big)G'_{X_i}(1)G'_{X_j}(1)$.
On obtient donc $G''_{S_q}(1) = \sum\limits_{k=1}^{q} G''_{X_k}(1) + \sum\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant q} \mathbb{E}(X_i)\,\mathbb{E}(X_j)$. Puisque $\mathbb{V}(S_q) = G''_{S_q}(1) + G'_{S_q}(1) - G'_{S_q}(1)^2$, on a $\mathbb{V}(S_q) = \sum\limits_{k=1}^{q}(V(X_k) - \mathbb{E}(X_k) + \mathbb{E}(X_k)^2) + \sum\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant q} E(X_i)\,\mathbb{E}(X_j) + \sum\limits_{k=1}^{q}\mathbb{E}(X_k) - \Big(\sum\limits_{k=1}^{q}\mathbb{E}(X_k)\Big)^2$ ce qui donne après simplification des double-produits : $\mathbb{V}(S_q) = \sum\limits_{k=1}^{q}\mathbb{V}(X_k)$ comme attendu. Tout ça pour ça !!!!.

11.45 **a.** Par construction, on a $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Notons les évènements $\mathbb{P}_i$: " on a fait pile au lancer i". Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $(X=n) = \bigcup\limits_{k=1}^{n+1}\Big(P_k \cap P_{n+2} \cap \bigcap\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1}\overline{P_i}\Big)$ car il faut un premier pile (au lancer k), tout autour que des face et enfin un second pile au lancer $n+2 = n$ face $+$ 2 pile. Comme la réunion est disjointe (évènements incompatibles), que les évènements $P_k \cap P_{n+2} \cap \bigcap\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1}\overline{P_i}$ ont même probabilité car les $\mathbb{P}_i$ sont indépendants mutuellement, on obtient la loi de X : $\mathbb{P}(X=n) = (n+1)p^2(1-p)^n$.

b. Comme $n\,\mathbb{P}(X=n) = n(n+1)p^2(1-p)^n$ et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n(n+1)p^2(1-p)^n$ converge absolument car $n(n+1)p^2(1-p)^n \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ puisque $0 < 1-p < 1$, X admet une espérance finie. On dérive deux fois $\forall x \in]-1;1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ donc $\dfrac{2}{(1-x)^3} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^{n-1}$.
Par conséquent $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n+1)p^2(1-p)^n = \dfrac{p^2(1-p)}{(1-(1-p))^3} = \dfrac{1-p}{p}$.

c. Comme avant, on a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour $k \in \mathbb{N}$, $(Y=k) = \bigcup\limits_{n=k}^{+\infty}(X=n, Y=k)$ (réunion disjointe). Comme le choix des boules dans l'urne est équiprobable, $\mathbb{P}(Y=k|X=n) = \dfrac{1}{n+1}$ (loi uniforme) si $k \leqslant n$. Par σ-additivité, on a donc $\mathbb{P}(Y=k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=k|X=n)\,\mathbb{P}(X=n) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} p^2(1-p)^n = \dfrac{(1-p)^k p^2}{1-(1-p)} = p(1-p)^k$ donc $Z = Y+1$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ car $\forall i \geqslant 1$, $\mathbb{P}(Z=i) = \mathbb{P}(Y=i-1) = p(1-p)^{i-1}$. On sait qu'alors $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Y)+1 = \dfrac{1}{p}$ (par linéarité de l'espérance) donc $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1-p}{p}$.

d. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to E$ tel que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable. On dit que X est une variable aléatoire si $\forall x \in X(\Omega),\ (X = x) \in \mathcal{A}$.

11.46 **a.** Le cours nous permet d'affirmer que, si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $x \in]-1;1[$, on a $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, avec $b_k = \binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. En particulier, lorsque $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, il vient $b_k = \dfrac{(-\frac{1}{2})\cdots(-k+\frac{1}{2})}{k!}$ donc $b_k = (-1)^k \dfrac{(-\frac{1}{2})\cdots(-k+\frac{1}{2})}{k!} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdots\frac{2k-1}{2}}{k!} = \dfrac{1\times\cdots\times(2k-1)}{2^k k!} = \dfrac{1\times 2\times\cdots\times(2k-1)\times(2k)}{(2^k k!)^2}$ et enfin $b_k = \dfrac{(2k)!}{(2^k k!)^2} = \dfrac{1}{4^k}\binom{2k}{k}$. Ainsi, $\forall x \in]-1;1[,\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \dfrac{x^n}{4^n}$.

b. La condition imposée à r est d'être strictement positif et de vérifier $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1$. Or en prenant $x = \dfrac{1}{2}$ dans la question **a.**, on a $\sqrt{2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{3n}(n!)^2}$. Ainsi, la seule valeur r qui convient est $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

c. Quand $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, la variable aléatoire X définie comme en **b.** vérifie $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!t^n}{2^{3n}(n!)^2\sqrt{2}}$ pour des t convenables. En posant $u_n = \dfrac{(2n)!t^n}{2^{3n}(n!)^2\sqrt{2}}$, on a, pout $t \neq 0$ et $n \geqslant 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)t}{8(n+1)^2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{|t|}{2}$. Ainsi $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument si $|t| < 2$ et diverge grossièrement si $|t| > 2$. Le rayon de convergence de cette série génératrice est donc $R_X = 2$ ce qui fait que G_X est de classe C^∞ sur $]-2;2[$ donc X admet une espérance finie et un moment d'ordre 2 car elle est deux fois dérivable en 1. De plus, d'après la question **a.**, $\forall t \in]-2;2[,\ G_X(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-(t/2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{2-t}}$. Comme $G_X'(t) = \dfrac{1}{2(2-t)^{3/2}}$ et $G_X''(t) = \dfrac{3}{4(2-t)^{5/2}}$, on a $\mathbb{E}(X) = G_X'(1) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2 = 1$.

11.47 **a.** On choisit donc une partie de $\Omega = \mathcal{P}(E)$ de manière aléatoire de sorte que la probabilité l'obtention de la partie A soit proportionnelle à son cardinal. On prend donc $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\forall A \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{A\}) = \alpha\,\mathrm{card}\,(A)$. Pour connaître α, il suffit d'utiliser la relation $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Comme $\Omega = \bigcup\limits_{A\in\Omega} \{A\}$, on a $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \alpha \sum\limits_{A\in\mathcal{P}(E)} \mathrm{card}\,(A)$. Or il existe $\binom{n}{k}$ parties de E de cardinal k ce qui montre que $1 = \alpha \sum\limits_{A\in\mathcal{P}(E)} \mathrm{card}\,(A) = \alpha \sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{\substack{A\in\mathcal{P}(E)\\ \mathrm{card}(A)=k}} \mathrm{card}\,(A) = \alpha \sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{\substack{A\in\mathcal{P}(E)\\ \mathrm{card}(A)=k}} k = \alpha \sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = 1$.

Or $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ donc $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum\limits_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = n2^{n-1}$. Ainsi, $\alpha = \dfrac{1}{n2^{n-1}}$.

En notant $S =$ "obtenir un singleton" en prenant au hasard une partie dans ce cadre, on a donc $S = \bigcup\limits_{x\in E}\{\{x\}\}$ donc $\mathbb{P}(S) = \sum\limits_{x\in E} \mathbb{P}(\{x\}) = \dfrac{1}{n2^{n-1}} \sum\limits_{x\in E} 1 = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

b. C est une variable aléatoire car $C(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et $\mathcal{A}$ est la tribu pleine. Comme il existe $\binom{n}{k}$ parties de cardinal k dans E et que chaque partie A de cardinal k vérifie $\mathbb{P}(\{A\}) = \dfrac{k}{n2^{n-1}}$, on a $\mathbb{P}(C=k) = \binom{n}{k}\dfrac{k}{n2^{n-1}}$.

Comme $C(\Omega) = [\![0;n]\!]$, par définition, $\mathbb{E}(C) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(C=k) = \dfrac{1}{n2^{n-1}} \sum\limits_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$. On écrit $k^2 = k(k-1)+k$

et $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n(n-1)\sum\limits_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} + n\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$. On reconnaît des binômes de NEWTON et $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}$. Ainsi $\mathbb{E}(C) = \dfrac{n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}}{n2^{n-1}} = \dfrac{n+1}{2}$.

On écrit $\mathbb{V}(C) = \mathbb{E}(C^2) - \mathbb{E}(C)^2 = \mathbb{E}((C-1)(C-2)) + 3\,\mathbb{E}(C) - 2 - \mathbb{E}(C)^2$ pour faire apparaître, avec la formule de transfert, $\mathbb{E}((C-1)(C-2)) = \sum\limits_{k=0}^{n}(k-1)(k-2)\,\mathbb{P}(C=k) = \dfrac{1}{n2^{n-1}}\sum\limits_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)\binom{n}{k}$. On poursuit classiquement, $\mathbb{E}((C-1)(C-2)) = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{n2^{n-1}}\sum\limits_{k=3}^{n}\binom{n-3}{k-3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)2^{n-3}}{n2^{n-1}} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{4}$.

Ainsi, $\mathbb{V}(C) = \dfrac{(n-1)(n-2)}{4} + \dfrac{3(n+1)}{2} - 2 - \dfrac{(n+1)^2}{4} = \dfrac{n-1}{4}$ ce qui est logique car si $n = 1$, il est certain de prendre un singleton donc $C = 1$ est constant donc de variance nulle.

c. Notons U (resp. V et W) l'évènement $(\text{card}\,(A) < \text{card}\,(B))$ (resp. $(\text{card}\,(A) > \text{card}\,(B))$ et enfin $(\text{card}\,(A) \geqslant \text{card}\,(B))$). Alors $\Omega = U \cup V \cup W$ (ils sont incompatibles) donc $1 = \mathbb{P}(U) + \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(W)$. Or, $\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(V)$ par symétrie entre les parties A et B.

L'évènement $Z = (\text{card}\,(A) \leqslant \text{card}\,(B))$ vaut donc $Z = U \cup W$ donc $\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(U) + \mathbb{P}(W) = \dfrac{1+\mathbb{P}(W)}{2}$.

Or $W = \bigcup\limits_{k=0}^{n} W_k$ où $W_k = (\text{card}\,(A) = \text{card}\,(B) = k)$. Par incompatibilité des W_k, $\mathbb{P}(W) = \sum\limits_{k=0}^{n}\mathbb{P}(W_k)$. Or par indépendance des choix de A et B, $(\text{card}\,(A) = k)$ et $(\text{card}\,(B) = k)$ sont indépendants donc on a $\mathbb{P}(W_k) = \mathbb{P}(\text{card}\,(A) = k)\,\mathbb{P}(\text{card}\,(B) = k) = \mathbb{P}(\text{card}\,(A) = k)^2$ par symétrie entre A et B.

Or $\mathbb{P}(\text{card}\,(A) = k) = \sum\limits_{\substack{X \in \mathcal{P}(E)\\ \text{card}(X)=k}} \mathbb{P}(\{X\}) = \binom{n}{k}\dfrac{k}{n2^{n-1}}$. Par conséquent, $\mathbb{P}(\text{card}\,(A) = 0) = 0$ et, si $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(\text{card}\,(A) = k) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{k-1}$. Ainsi $\mathbb{P}(W) = \dfrac{1}{4^{n-1}}\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}^2 = \dfrac{1}{4^{n-1}}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\binom{n-1}{n-1-j}$ donc $\mathbb{P}(W) = \dfrac{1}{4^{n-1}}\binom{2n-2}{n-1}$ d'après la formule de VANDERMONDE. Ainsi, $\mathbb{P}(Z) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^{2n-1}}\binom{2n-2}{n-1}$.

D'après STIRLING, $\mathbb{P}(W) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4\sqrt{n\pi}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(U) = \dfrac{1}{2}$ comme attendu.

11.48 **a.** Par le théorème de transfert, la variable aléatoire $Y = e^{uN}$ admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} e^{un}\,\mathbb{P}(X=n) = \sum\limits_{n\geqslant 0} e^{un}e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ converge. Or $e^{un}e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\dfrac{(\lambda e^u)^n}{n!}$ donc la série précédente converge comme une série exponentielle. Classiquement, $\mathbb{E}(e^{uN}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\dfrac{(\lambda e^u)^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^u} = e^{\lambda(e^u-1)}$.

b. Pour $y > 0$ et $u > 0$, $e^{u(N-(1+y)\lambda)} = e^{-(1+y)u\lambda}e^{uN}$ donc $Z = e^{u(N-(1+y)\lambda)}$ admet aussi une espérance finie et, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z) = e^{-(1+y)u\lambda}\,\mathbb{E}(e^{uN}) = e^{-(1+y)u\lambda}e^{-\lambda}e^{\lambda e^u} = e^{\lambda(e^u-1-(1+y)u)}$.

Considérons la fonction $f_y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f_y(u) = e^u - 1 - (1+y)u$. Comme f_y est dérivable et que $f_y'(u) = e^u - (1+y)$, f_y est croissante sur $[\ln(1+y);+\infty[$ et décroissante sur $]0;\ln(1+y)]$, ainsi on a $\underset{u>0}{\text{Inf}}\, f_y(u) = \underset{u>0}{\text{Min}}\, f_y(u) = f_y(\ln(1+y)) = y - (1+y)\ln(1+y) = -h(y)$. Ainsi, par stricte croissante de la fonction $\exp$ et comme $\lambda > 0$, on a aussi $\underset{u>0}{\text{Inf}}\left(\mathbb{E}(e^{u(N-(1+y)\lambda)})\right) = \underset{u>0}{\text{Min}}\left(\mathbb{E}(e^{u(N-(1+y)\lambda)})\right) = e^{-\lambda h(y)}$.

c. Soit $y > 0$ et $u > 0$, $(N \geqslant (1+y)\lambda) = (uN \geqslant (1+y)u\lambda) = (u(N-(1+y)\lambda) \geqslant 0) = (e^{u(N-(1+y)\lambda)} \geqslant 1)$ par stricte croissance de $\exp$ donc, d'après l'inégalité de MARKOV, comme $e^{u(N-(1+y)\lambda)}$ est une variable aléatoire réelle positive, on a $\mathbb{P}(N \geqslant (1+y)\lambda) = \mathbb{P}(e^{u(N-(1+y)\lambda)} \geqslant 1) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(e^{u(N-(1+y)\lambda)})}{1} = e^{\lambda f_y(u)}$.

Comme cette inégalité est vraie quel que soit $u \in \mathbb{R}_+^*$, elle l'est en particulier si on prend $u = \ln(1+y)$ et on a $\mathbb{P}(N \geqslant (1+y)\lambda) \leqslant e^{-\lambda h(y)} = e^{-\lambda((y+1)\ln(1+y)-y)}$ (1) d'après la question précédente.

Comme N est une variable aléatoire positive admettant une espérance, on peut appliquer directement Markov et avoir $\mathbb{P}(N \geqslant (1+y)\lambda) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(N)}{(1+y)\lambda} = \dfrac{1}{1+y}$ (2) car $\mathbb{E}(N) = \lambda$.

Laquelle de ces deux majorations est la meilleure, sachant que (1) est meilleure de (2) si et seulement si $e^{-\lambda((y+1)\ln(1+y)-y)} \leqslant \dfrac{1}{1+y}$ ce qui équivaut, par stricte croissance de l'exponentielle, à la condition $(\lambda(1+y)-1)\ln(1+y) \geqslant \lambda y$. Or cette dernière est clairement vraie, par croissances comparées, si y est assez grand car $y \underset{+\infty}{=} o(y\ln(1+y))$. Elle est fausse, puisque $(\lambda(1+y)-1)\ln(1+y) \underset{0}{\sim} (\lambda-1)y$ et que $(\lambda-1)y \leqslant \lambda y$ car $y > 0$, quand y est assez petit.

Il y a donc certainement (à vérifier par une étude de fonction) une valeur limite y_0 (dépendant bien sûr de λ) telle que (2) est meilleure que (1) si $y \leqslant y_0$ et telle que (1) est meilleure que (2) si $y \geqslant y_0$.

11.49 **a.** On modélise l'expérience par $\Omega = (\mathcal{P}(E))^2$ (on ordonne les deux parties A et B choisies). La probabilité choisie sur $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ est la probabilité uniforme. Comme $\text{card}\,((\mathcal{P}(E))^2) = (2^n)^2 = 4^n$, la probabilité qu'on choisisse un couple (A, B) particulier est $\dfrac{1}{4^n}$. On note $D =$ "A et B sont disjoints". On décompose $D = \bigcup\limits_{k=0}^{n} D_k$ où $D_k =$ "A et B sont disjoints et $\text{card}\,(A) = k$". Pour choisir un couple $(A, B) \in D_k$, on choisit :

- A dans E ayant k éléments : on a $\dbinom{n}{k}$ choix.
- B quelconque dans $E \setminus A$: on a 2^{n-k} choix.

D'où $\text{card}\,(D_k) = \dbinom{n}{k}2^{n-k}$. Or $(D_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une partition de D, donc $\text{card}\,(D) = \sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}2^{n-k} = 3^n$ par le binôme de Newton. On en déduit que $\mathbb{P}(D) = \dfrac{\text{card}\,(D)}{4^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

b. Soit $k \in [\![0; n]\!]$, comme la probabilité est uniforme, il suffit de calculer $\text{card}\,(I = k)$. Or pour choisir un couple $(A, B) \in \Omega$ tel que $\text{card}\,(A \cap B) = k$, il faut :

- choisir les k éléments de $A \cap B$: $\dbinom{n}{k}$ choix.
- pour $j \in [\![0; n-k]\!]$, on choisit A en prenant X dans $E \setminus (A \cap B)$ et en posant $A = (A \cap B) \cup X$: $\dbinom{n-k}{j}$ choix ; et choisir B en prenant $Y \in \mathcal{P}(E \setminus A)$ et en posant $B = (A \cap B) \cup Y$: 2^{n-k-j} choix.

Ainsi, on a $\text{card}\,(I = k) = \dbinom{n}{k}\sum\limits_{j=0}^{n-k}\dbinom{n-k}{j}2^{n-k-j} = \dbinom{n}{k}3^{n-k}$ par le binôme de Newton. Par conséquent $\mathbb{P}(I = k) = \dbinom{n}{k}\dfrac{3^{n-k}}{4^n} = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{4}\right)^k\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-k}$. Ainsi I suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{4}\right)$.

Plus simplement, on note, pour $k \in [\![1; n]\!]$ si $E = \{x_1, \cdots, x_n\}$, A_k (resp. B_k et I_k) la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si $x_k \in A$ (resp. $x_k \in B$ et $x_k \in A \cap B$) et 0 sinon. Alors $I_k = A_k B_k$, A_k et B_k sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ car il y a autant de parties qui contiennent x_k que de parties qui ne le contiennent pas (via $A \mapsto E \setminus A$). Ainsi, I_k suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\dfrac{1}{4}\right)$ et, comme $I = \sum\limits_{k=1}^{n} I_k$ et que les I_k sont mutuellement indépendants par hypothèse, I suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{4}\right)$.

De même, calculons $\text{card}\,(U = k)$ pour $k \in [\![0; n]\!]$. Pour choisir $(A, B) \in \Omega$ tel que $\text{card}\,(A \cup B) = k$, il faut :

- choisir les k éléments de $A \cup B$: $\dbinom{n}{k}$ choix.

• pour chaque $j \in [\![0;k]\!]$, on choisit A dans $A \cup B$: $\binom{k}{j}$ choix ; et choisir B en prenant $Y \in \mathcal{P}(A)$ et en posant $B = ((A \cup B) \setminus A) \cup Y$: 2^{k-j} choix.

Ainsi, on a $\text{card}(U = k) = \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 2^{k-j} = \binom{n}{k} 3^{n-k}$ par le binôme de NEWTON. Par conséquent $\mathbb{P}(U = k) = \binom{n}{k} \frac{3^k}{4^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}$. Ainsi U suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{3}{4}\right)$.

Plus simplement, avec les mêmes notations que pour I et en notant U_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si $x_k \in A \cup B$ et 0 sinon. Alors $U_k = A_k + B_k - A_k B_k$ suit la loi de BERNOULLI de paramètre $\frac{3}{4}$ car $\mathbb{P}(U_k = 0) = \mathbb{P}(A_k = 1, B_k = 1) = \mathbb{P}(A_k = 1)\,\mathbb{P}(B_k = 1) = \frac{1}{4}$. Comme $U = \sum_{k=1}^{n} U_k$ et que les U_k sont mutuellement indépendants par hypothèse, U suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{3}{4}\right)$.

c. On sait d'après le cours que $\mathbb{E}(I) = \frac{n}{4}$, $\mathbb{E}(U) = \frac{3n}{4}$ et que $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(U) = \frac{3n}{16}$.

11.50 **a.** Par définition, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. Si $n \in \mathbb{N}$, $(X \leqslant n) = \bigcup_{k=0}^{n} (X = k)$ (incompatibles) donc $\mathbb{P}(X \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. Notons $I_n = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-t} t^n dt$. On a $I_0 = e^{-\lambda} = \mathbb{P}(X \leqslant 0) = \mathbb{P}(X = 0)$ et, si $I_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}(X \leqslant n)$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$, alors par intégration par parties en posant les deux fonctions de classe C^1 $u : t \mapsto -e^{-t}$ et $v : t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$ telles que $\lim_{t \to +\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, on a la relation $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-t} t^{n+1} dt = \frac{1}{n!} \left(\left[-\frac{e^{-t} t^{n+1}}{n+1} \right]_{\lambda}^{+\infty} - \int_{\lambda}^{+\infty} (-e^{-t}) t^n dt \right)$ donc $I_{n+1} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n+1}}{(n+1)!} + I_n = \mathbb{P}(X = n+1) + \mathbb{P}(X \leqslant n) = \mathbb{P}(X \leqslant n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X \leqslant n) = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-t} t^n dt$.

On peut aussi appliquer la formule de TAYLOR reste intégral à $\exp$ entre 0 et λ pour avoir la relation $e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^{\lambda} (\lambda - t)^n e^t dt$ et en déduire $\mathbb{P}(X \leqslant n) = 1 - \frac{1}{n!} \int_0^{\lambda} (\lambda - t)^n e^{t-\lambda} dt$. On effectue ensuite le changement de variable $t = \lambda - u = \varphi(u)$ facile à justifier pour avoir $\mathbb{P}(X \leqslant n) = \frac{1}{n!} \left(n! - \int_0^{\lambda} u^n e^{-u} du \right)$. Or on sait que $n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} u^{n+1-1} e^{-u} du$ donc, avec CHASLES, il vient $\mathbb{P}(X \leqslant n) = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-u} u^n du$.

b. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \leqslant n) = \Omega$. De plus, la suite $((X \leqslant n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc par théorème de continuité croissante, on a $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X \leqslant n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. Par conséquent, avec la question **a.**, on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-t} t^n dt = 1$ ce qui revient à $\int_{\lambda}^{+\infty} e^{-t} t^n dt \underset{+\infty}{\sim} n!$ (indépendant de $\lambda > 0$).

c. $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!} = e^{\lambda(t-1)}$. Ainsi, $G_X(1) = 1$ et $G_X(-1) = e^{-2\lambda}$.

d. $(X \text{ paire}) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X = 2n)$ (évènements incompatibles) donc, par σ-additivité, $\mathbb{P}(X \text{ paire}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2n)$.

Avec **c.**, $G_X(1) + G_X(-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1 + (-1)^k)\,\mathbb{P}(X = k) = 2\,\mathbb{P}(X \text{ paire})$ donc $\mathbb{P}(X \text{ paire}) = \frac{1 + e^{-2\lambda}}{2} > \frac{1}{2}$.

e. Avec ces hypothèses, $(XY \text{ paire}) = (X \text{ paire}, Y = 1) \cup (X \text{ quelconque}, Y = 2)$. Ainsi, par indépendance entre les variables aléatoires X et Y, $\mathbb{P}(XY \text{ paire}) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(X \text{ paire}) + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{e^{-2\lambda}}{4}$.

11.51 On vérifie la cohérence de la définition : comme $\frac{1}{2^0} = 1$, l'énoncé impose visiblement $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et on a bien $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1-(1/2)} = 1$. Si on note V l'évènement "le joueur gagne", alors on a par définition $V = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (N = 2n)$ (réunion disjointe) donc, par σ-additivité, $\mathbb{P}(V) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1/4}{1-(1/4)} = \frac{1}{3}$.

Par définition $G = (-1)^N N$ donc, par le théorème de transfert : $\mathbb{E}(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{-(1/2)}{1+(1/2)} = -\frac{1}{3}$.

11.52 **a.** Il y a j bactéries dans l'éprouvette, numérotées de 1 à j. Pour la bactérie i, on note $X_i = 1$ si elle a la propriété $\mathcal{P}$ et $X_i = 0$ sinon. Alors X_i suit la loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(p)$. En posant $S = \sum_{i=1}^{j} X_i$, comme les $(X_1, \cdots, X_j)$ sont mutuellement indépendantes, on sait d'après le cours que S suit la loi binomiale $\mathcal{B}(j, p)$. Mais dans ce cas $S = X$ donc la loi de X sachant $(Y = j)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(j, p)$.

b. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, par construction $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 0$ si $i > j$.

Par contre, si $i \leqslant j$, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}_{(Y=j)}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = j) = \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}$.

On en déduit : $\forall i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=i}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{e^{-\lambda} p^i \lambda^i}{i!} \sum_{j=i}^{+\infty} \frac{(1-p)^{j-i} \lambda^{j-i}}{(j-i)!} = \frac{e^{-\lambda} p^i \lambda^i}{i!} e^{(1-p)\lambda}$.

Ainsi $\mathbb{P}(X = i) = \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{-\lambda p}$ donc X suit la loi de POISSON de paramètre λp.

c. On sait d'après le cours que $\mathbb{E}(X) = \lambda p$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda p$.

11.53 **a.** D'après le cours, l'indépendance mutuelle des $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et le fait qu'elles suivent toutes la loi de BERNOULLI de paramètre p justifie que S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

b. On commence par la série géométrique $\forall x \in]-1;1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. On dérive terme à terme (c'est la somme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence) k fois pour obtenir classiquement la relation $\forall x \in]-1;1[$, $\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$ ce qui revient à $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

c. Comme $((N = n))_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, par la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(S_N = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k | N = n)\,\mathbb{P}(N = n)$. Il est clair que $\mathbb{P}(S_n = k | N = n) = 0$ si $n < k$ et qu'on a aussi $\mathbb{P}(S_n = k | N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ d'après **a.** donc $\mathbb{P}(S_N = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} p(1-p)^n$ car $\mathbb{P}(N + 1 = n + 1) = \mathbb{P}(N = n) = p(1-p)^{n+1-1} = p(1-p)^n$ puisque $N + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p. Ainsi $\mathbb{P}(S_N = k) = p \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{2n-k} = p(1-p)^k p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{2n-2k}$ et on conclut avec la question précédente que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S_N = k) = \frac{p(1-p)^k p^k}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} = \frac{1}{2-p}\left(\frac{1-p}{2-p}\right)^k$. Ainsi, comme $\frac{1-p}{2-p} = 1 - \frac{1}{2-p}$, la variable aléatoire $1 + S_N$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2-p}$.

11.54 **a.** On a $(T = 0) = (X_0 = 1, X_1 = 1)$ donc, par indépendance : $\mathbb{P}(T = 0) = \mathbb{P}(X_0 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{4}$. De même, $(T = 1) = (X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1)$ donc $\mathbb{P}(T = 1) = \frac{1}{8}$. Maintenant, on décompose l'évènement $(T = 2)$ en $(T = 2) = (X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) \cup (X_0 = 0, X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1)$ donc, par incompatibilité de ces deux évènements : $\mathbb{P}(T = 2) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

b. Il est clair que $A_n \cup B_n$ = "pas deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages". De plus, $A_{n+1} \subset A_n \cup B_n$

car si on ne fait pas deux 1 consécutifs lors des $n+1$ premiers tirages, on ne les fait pas non plus lors des n premiers. Ainsi $A_{n+1} = (A_{n+1} \cap A_n) \cup (A_{n+1} \cap B_n)$ (réunion disjointe) donc :
$p_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap B_n) = \mathbb{P}(A_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) = \frac{p_n}{2} + \frac{q_n}{2}$.

De même, $B_{n+1} \subset A_n \cup B_n$ donc $B_{n+1} = (B_{n+1} \cap A_n) \cup (B_{n+1} \cap B_n)$ (réunion disjointe) donc
$q_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1} \cap A_n) + \mathbb{P}(B_{n+1} \cap B_n) = \mathbb{P}(B_{n+1}|A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}|B_n)\mathbb{P}(B_n) = \frac{p_n}{2}$.

Matriciellement, cela donne bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

c. Il est clair que $p_0 = q_0 = \frac{1}{2}$, et que $p_1 = \frac{1}{2}$, $q_1 = \frac{1}{4}$ car $B_1 = (X_0 = 0, X_1 = 1)$.

La question précédente montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ q_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} = \frac{1}{4}(p_n + q_n) = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{4}q_n$. Posons $u_n = 2^{n+1}q_n$, alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2^{n+3}q_{n+2} = 2^{n+2}q_{n+1} + 2^{n+1}q_n = u_{n+1} + u_n$. De plus, $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. On reconnaît alors la suite de FIBONACCI : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = F_n$.
Or $(T = n) = B_n \cap (X_{n+1} = 1)$ d'où $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{q_n}{2} = \frac{F_n}{2^{n+2}}$ par indépendance des tirages. Un calcul classique prouve que $F_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{\sqrt{5}}$ avec $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or) et $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
d. T admet une espérance finie si et seulement si $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(T > n)$ converge or il vient $(T > n) = A_{n+1} \cup B_{n+1}$ (réunion disjointe) : $\mathbb{P}(T > n) = p_{n+1} + q_{n+1}$. Or $q_{n+1} = \frac{F_{n+1}}{2^{n+2}}$ et $p_{n+1} = 2q_{n+2} = \frac{F_{n+2}}{2^{n+2}}$ ce qui donne $\mathbb{P}(T > n) = \frac{F_{n+1} + F_{n+2}}{2^{n+2}} = \frac{F_{n+3}}{2^{n+2}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{a^{n+4}}{2^{n+2}\sqrt{5}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$: $\mathbb{E}(T)$ existe. Le rayon de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} F_n t^n$ est $R = \frac{1}{a}$ car $F_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{a^{n+1}}{\sqrt{5}}$. Pour $t \in]-R; R[$, on pose $F(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n t^n = F(t) = 1 + t + \sum_{n=2}^{+\infty} F_n t^n$ donc, comme $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, $F(t) = 1 + t + t^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (F_n + F_{n+1})t^n = 1 + t + t^2 F(t) + t(F(t) - 1)$ donc $F(t) = \frac{1}{1 - t - t^2}$.

Par conséquent, $\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_{n+3}}{2^{n+2}} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_{n+3}}{2^{n+3}} = 2\left[F\left(\frac{1}{2}\right) - F_0 - \frac{F_1}{2} - \frac{F_2}{4}\right] = 4$.

11.55 **a.** Pour simplifier le modèle, on estime qu'on relance les dès même s'ils sont tombés sur 6. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $(X \leqslant k) = \bigcap_{i=1}^{6} (X_i \leqslant k)$ où X_i est le nombre de lancers nécessaires pour que le dé i tombe sur 6. Comme les X_i sont mutuellement indépendants et de même loi (les dés sont identiques), on a $\mathbb{P}(X \leqslant k) = (\mathbb{P}(X_1 \leqslant k))^6$.
Or $\mathbb{P}(X_1 \leqslant k) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > k)$ et $(X_1 > k)$ est l'évènement "le dé i n'a jamais donné 6 pendant les k premiers lancers" donc $\mathbb{P}(X_1 > k) = q^k$ où $q = \frac{5}{6}$ est la probabilité de ne pas donner 6 pour un dé non pipé. Par conséquent $\mathbb{P}(X \leqslant k) = (1 - q^k)^6$. Puisque $(X \leqslant k) = (X = k) \cup (X \leqslant k - 1)$ et que ces évènements sont incompatibles : $\mathbb{P}(X \leqslant k) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X \leqslant k - 1)$ donc $\mathbb{P}(X = k) = (1 - q^k)^6 - (1 - q^{k-1})^6$.
b. On sait que X admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(X > n)$ converge et qu'alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$. Or $\mathbb{P}(X > n) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant n) = 1 - (1 - q^n)^6 \underset{+\infty}{\sim} 6q^n$ donc $\mathbb{E}(X)$ existe. De plus, on a $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} (6q^n - 15q^{2n} + 20q^{3n} - 15q^{4n} + 6q^{5n} - q^{6n}) = \frac{6}{1-q} - \frac{15}{1-q^2} + \frac{20}{1-q^3} - \frac{15}{1-q^4} + \frac{6}{1-q^5} - \frac{1}{1-q^6}$
donc $\mathbb{E}(X) \sim 13,94$ en demandant à Wolfram.

De plus, X admet un moment d'ordre 2 si $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^2\,\mathbb{P}(X=n)$ converge. Or $\mathbb{P}(X=n) \underset{+\infty}{\sim} q^{n-1}$ donc, par croissances comparées, $n^2\,\mathbb{P}(X=n) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$. Ainsi X admet une variance. Or, en développant par le binôme de NEWTON, $\mathbb{P}(X=n) = q^{n-1} - \dfrac{55}{12}q^{2n-2} + ...$ $\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(q^{n-1} - \dfrac{55}{12}q^{2n-2} + ...)$ qu'on calcule en se servant de la relation $\forall x \in]-1;1[$, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$ en dérivant deux fois la classique série géométrique. Wolfram annonce que $\mathbb{E}(X^2) \sim 239,211$ donc $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2} \sim 6,7$.

11.56 **a.** Chaque X_i vérifie $\mathbb{E}(X_i) = p = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{V}(X_i) = p(1-p) = \dfrac{1}{4}$ d'après le cours. Si $n \geqslant 1$, par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = np = \dfrac{n}{2}$ et, puisque $X_1, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes par hypothèse, on a $\mathbb{V}(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) = np(1-p) = \dfrac{n}{4}$. Ou alors, d'après le cours, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\Big(n, \dfrac{1}{2}\Big)$ par indépendance mutuelle de $X_1, \cdots, X_n$ et on connaît son espérance et sa variance.

b. Par le théorème du transfert, si $i \geqslant 1$ et $\lambda > 0$, $\mathbb{E}(Z_i) = e^{\lambda\left(0-\frac{1}{2}\right)}\,\mathbb{P}(X_i=0) + e^{\lambda\left(1-\frac{1}{2}\right)}\,\mathbb{P}(X_i=1)$ car $X_i(\Omega) = \{0,1\}$. Donc, $\mathbb{E}(Z_i) = \dfrac{1}{2}\big(e^{\frac{\lambda}{2}} + e^{\frac{-\lambda}{2}}\big) = \text{ch}\Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big)$.

c. Soit $n \geqslant 1$, S_n est bornée donc admet une espérance finie et $\mathbb{E}(e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))}) = \mathbb{E}\Big(\prod\limits_{i=1}^{n} e^{\lambda\left(X_i - \frac{1}{2}\right)}\Big)$. Or, par linéarité de l'espérance et comme les $Z_1, \cdots, Z_n$ sont mutuellement indépendantes car les $X_1, \cdots, X_n$ le sont, le cours nous apprend que $\mathbb{E}(e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))}) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Z_i) = \prod\limits_{i=1}^{n} \text{ch}\Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big) = \text{ch}\Big(\dfrac{\lambda}{2}\Big)^n$.

d. Soit $\lambda > 0$, $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $(S_n - \mathbb{E}(S_n) > nt) = (e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))} > e^{n\lambda t})$ par stricte croissance de la fonction $\exp$. Puisque la variable aléatoire $e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))}$ est réelle positive, l'inégalité de MARKOV montre que $\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) > nt) = \mathbb{P}(e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))} > e^{n\lambda t}) \leqslant \mathbb{P}(e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))} \geqslant e^{n\lambda t}) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))})}{e^{n\lambda t}}$. D'après la question précédente, $\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) > nt) \leqslant \dfrac{\text{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n}{e^{n\lambda t}} = e^{-nf_t(\lambda)}$ en posant $f_t(\lambda) = \lambda t - \ln\Big(\text{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Big)$.

e. Si $t \geqslant \dfrac{1}{2}$, comme $S_n \leqslant n$ et $\mathbb{E}(S_n) + nt = \dfrac{n}{2} + nt \geqslant n$, $(S_n - \mathbb{E}(S_n) > nt) = \emptyset$ donc $\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) > nt) = 0$.

Si $t < \dfrac{1}{2}$, la fonction f_t est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f_t'(\lambda) = t - \dfrac{1}{2}\dfrac{\text{sh}\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\text{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)} = \dfrac{2t - \text{th}\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{2}$. Or si $b \in]-1;1[$ et $a \in \mathbb{R}$, $\text{th}\,(a) = b \Longleftrightarrow \dfrac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1} = b \Longleftrightarrow e^{2a} = \dfrac{1+b}{1-b} \Longleftrightarrow a = \dfrac{1}{2}\ln\Big(\dfrac{1+b}{1-b}\Big)$. Ainsi, en posant $\lambda_0 = \ln\Big(\dfrac{1+2t}{1-2t}\Big) > 0$, la fonction f_t est croissante sur $]0;\lambda_0]$ et décroissante sur $[\lambda_0;+\infty[$ donc elle admet son maximum en λ_0 de sorte que $I(t) = \underset{\lambda>0}{\text{Max}}(f_t(\lambda)) = f_t(\lambda_0) = \Big(\dfrac{1}{2}+t\Big)\ln(1+2t) + \Big(\dfrac{1}{2}-t\Big)\ln(1-2t)$ (après calculs). On remplace donc λ par λ_0 dans l'inégalité de la question **d.** pour obtenir $\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) > nt) \leqslant \dfrac{1}{(1+2t)^{n(\frac{1}{2}+t)}(1-2t)^{n(\frac{1}{2}-t)}}$.

f. À faire.

11.57 On peut écrire $\forall n \in \mathbb{N}$, $(M=n) = ((X=n)\bigcap(Y<n))\bigcup((X<n)\bigcap(Y=n))\bigcup((X=n)\bigcap(Y=n))$. Comme ces évènements sont disjoints, $\mathbb{P}(M=n) = \mathbb{P}(X=n, Y<n) + \mathbb{P}(X<n, Y=n) + \mathbb{P}(X=n, Y=n)$. Par indépendance de X et Y, $\mathbb{P}(M=n) = \mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}(Y<n) + \mathbb{P}(X<n)\,\mathbb{P}(Y=n) + \mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}(Y=n)$.

Enfin, X et Y suivent la même loi donc $\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(Y=n)$ et $\mathbb{P}(X<n) = \mathbb{P}(Y<n)$.

Tout ceci justifie que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(M=n) = 2\,\mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}(X<n) + \mathbb{P}(X=n)^2$.

Comme X suit la loi de Poisson de paramètre λ, $\mathbb{P}(X=n)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$. De plus, $(X<n)=\bigcup\limits_{k=0}^{n-1}(X=k)$, il vient $\mathbb{P}(X<n)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X=k)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. Mais $\mathbb{P}(\Omega)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)$ car $X(\Omega)=\mathbb{N}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X<n)=1$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X=n)=0$ (terme d'une série convergente par exemple), on a $\mathbb{P}(X=n)^2\underset{+\infty}{=}o(\mathbb{P}(X=n))$ donc $\mathbb{P}(M=n)\underset{+\infty}{\sim}2\,\mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}(x<n)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{2e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$.

11.58 Comme $(X+Y=0)=(X=0,Y=0)$ car X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X+Y=0)=\mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0)=\dfrac{1}{6}$ car X et Y sont indépendantes donc $\mathbb{P}(X=0)>0$ et $\mathbb{P}(Y=0)>0$. Ainsi, pour $k\geqslant 5$, $\mathbb{P}(X+Y=k)=0$ et $(X=0,Y=k)\subset(X+Y=k)$, on en déduit que $\mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=k)=0$ donc $\mathbb{P}(Y=k)=0$. De même, $\mathbb{P}(X=k)=0$ si $k\geqslant 5$. Ainsi, X et Y sont presque sûrement à valeurs dans $[\![0;4]\!]$ et les fonctions génératrices G_X et G_Y sont des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 4. Comme X et Y sont indépendantes, $\forall t\in\mathbb{R},\ G_{X+Y}(t)=G_X(t)G_Y(t)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{t^4}{3}$. Or $P=\dfrac{1}{6}+\dfrac{X^2}{2}+\dfrac{X^4}{3}=\dfrac{1}{6}(X^2+1)(2X^2+1)$. Comme X et Y ne sont pas presque sûrement constantes, G_X et G_Y ne sont pas des fonctions constantes. Par unicité de la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$, $G_X(t)=\dfrac{t^2+1}{2}$ et $G_Y(t)=\dfrac{2t^2+1}{3}$ ou l'inverse (attention à la condition $G_X(1)=G_Y(1)=1$ qui impose à la somme des coefficients de chacun de ces deux polynômes de valoir 1).
Par conséquent, en échangeant éventuellement les rôles joués par X et Y, on a $\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=2)=\dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Y=0)=\dfrac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(Y=2)=\dfrac{1}{3}$ (les autres valeurs de $\mathbb{P}(X=i)$ et $\mathbb{P}(Y=j)$ étant nulles).

11.59 **a.** Comme $\alpha>0$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ est positive, décroissante et tend vers 0, ainsi, par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de ses sommes partielles converge.

b. Si $n\geqslant 1$, par transformation d'Abel, $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{u_k}{k^{\beta+\varepsilon}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{s_k-s_{k-1}}{k^{\beta+\varepsilon}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{s_k}{k^{\beta+\varepsilon}}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{s_{k-1}}{k^{\beta+\varepsilon}}$. Après changement d'indice $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{u_k}{k^{\beta+\varepsilon}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{s_k}{k^{\beta+\varepsilon}}-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{s_k}{(k+1)^{\beta+\varepsilon}}=\dfrac{s_n}{n^{\beta+\varepsilon}}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}s_k\left(\dfrac{1}{k^{\beta+\varepsilon}}-\dfrac{1}{(k+1)^{\beta+\varepsilon}}\right)$ (1) car $s_0=0$. Or $\dfrac{1}{k^{\beta+\varepsilon}}-\dfrac{1}{(k+1)^{\beta+\varepsilon}}=\dfrac{1}{k^{\beta+\varepsilon}}\left(1-\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{-\beta-\varepsilon}\right)\underset{+\infty}{=}\dfrac{1}{k^{\beta+\varepsilon}}\left(1-1+\dfrac{\beta+\varepsilon}{k}+o\left(\dfrac{1}{k}\right)\right)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\beta+\varepsilon}{k^{\beta+\varepsilon+1}}$.
Par conséquent, comme $s_k\underset{+\infty}{=}O(k^\beta)$ par hypothèse et que $\dfrac{1}{k^{\beta+\varepsilon}}-\dfrac{1}{(k+1)^{\beta+\varepsilon}}=\dfrac{1}{k^{\beta+\varepsilon}}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\beta+\varepsilon}{k^{\beta+\varepsilon+1}}$, on a $s_k\left(\dfrac{1}{k^{\beta+\varepsilon}}-\dfrac{1}{(k+1)^{\beta+\varepsilon}}\right)\underset{+\infty}{=}O\left(\dfrac{1}{k^{1+\varepsilon}}\right)$ et la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}s_k\left(\dfrac{1}{k^{\beta+\varepsilon}}-\dfrac{1}{(k+1)^{\beta+\varepsilon}}\right)$ converge par Riemann. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{s_n}{n^{\beta+\varepsilon}}=0$ car $\dfrac{s_n}{n^{\beta+\varepsilon}}\underset{+\infty}{=}O\left(\dfrac{n^\beta}{n^{\beta+\varepsilon}}\right)\underset{+\infty}{=}O\left(\dfrac{1}{n^\varepsilon}\right)$ avec $\varepsilon>0$.
Ainsi, avec l'expression (1) vue ci-dessus, on en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{u_n}{n^{\beta+\varepsilon}}$ converge.

c. On sait que $\forall a\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}\,(a)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a^{2n}}{(2n)!}$ et $e^{\frac{a^2}{2}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a^{2n}}{2^n n!}$. Or si on pose $a_n=\dfrac{2^n n!}{(2n)!}$, on a la relation $a_{n+1}=\dfrac{2(n+1)a_n}{(2n+2)(2n+1)}=\dfrac{a_n}{2n+1}\leqslant a_n$ donc la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et $a_0=1$. Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n\leqslant 1\iff\dfrac{1}{(2n)!}\leqslant\dfrac{1}{2^n n!}$. On en déduit que $\forall a\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}\,(a)\leqslant e^{\frac{a^2}{2}}$.

On peut aussi constater que puisque $\ln$ est strictement croissante, $\mathrm{ch}\,(a)\leqslant e^{\frac{a^2}{2}}\iff\ln(\mathrm{ch}\,(a))\leqslant\dfrac{a^2}{2}$. On définit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par $f(a)=\dfrac{a^2}{2}-\ln(\mathrm{ch}\,(a))$, alors f est paire et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(a)=a-\mathrm{th}\,(a)$. Or th est 1-lipschitzienne car $\text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2(x) \in [0;1[$, on a $\forall a \geqslant 0,\ |\text{th}(a)| \leqslant |a|$ donc $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ f'(a) \geqslant 0$. Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, or elle est nulle en 0 donc f est positive sur $\mathbb{R}_+$ donc positive sur $\mathbb{R}$ par parité. On obtient à nouveau : $\forall a \in \mathbb{R},\ \text{ch}(a) \leqslant e^{\frac{a^2}{2}}$.

d. Soit $n \geqslant 1$ et $x > 0$, $(|S_n| > x) = (S_n > x) \cup (S_n < -x) = (S_n > x) \cup (-S_n > x)$. Comme $(S_n > x)$ et $(-S_n > x)$ sont incompatibles, on a $\mathbb{P}(|S_n| > x) = \mathbb{P}(S_n > x) + \mathbb{P}(S_n < -x)$. Or, comme X_k et $-X_k$ ont la même loi, S_n et $-S_n$ ont aussi la même loi donc $\mathbb{P}(|S_n| > x) = 2\,\mathbb{P}(S_n > x)$. Or par stricte croissance de $\exp$ et puisque $t > 0$, on a $(S_n > x) = (tS_n > tx) = (e^{tS_n} < e^{tx})$ donc $\mathbb{P}(S_n > x) = \mathbb{P}(e^{tS_n} > e^{tx}) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{e^{tx}}$ d'après l'inégalité de Markov car e^{tS_n} est une variable aléatoire réelle positive. Mais $e^{tS_n} = \prod\limits_{k=1}^{n} e^{tX_k}$ et $(e^{tX_k})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes par hypothèse donc $\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e^{tX_k}) = (\text{ch}(t))^n$ car $\mathbb{E}(e^{tX_1}) = \mathbb{P}(X_1 = 1)e^{t\times 1} + \mathbb{P}(X_1 = -1) \times e^{t\times(-1)} = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.

Par conséquent, $\mathbb{P}(|S_n| > x) \leqslant 2\dfrac{e^{\frac{nt^2}{2}}}{e^{tx}} = h_x(t) = 2e^{\frac{nt^2}{2} - tx}$. Or le minimum de $t \mapsto n\dfrac{t^2}{2} - tx = \dfrac{nt}{2}\Big(t - \dfrac{2x}{n}\Big)$ est atteint en $t = t_0 = \frac{x}{n}$ (étude de parabole). Donc $\mathbb{P}(|S_n| > x) \leqslant h_x(t_0) = 2e^{\frac{-x^2}{2n}}$.

e. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $U_n = \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k$ de sorte que $E_\varepsilon = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} U_n$. Comme la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante pour l'inclusion, par théorème de continuité décroissante, on a $\mathbb{P}(E_\varepsilon) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n)$.
Par croissances comparées, $e^{\frac{-n^{2\varepsilon}}{2}} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{\frac{-n^{2\varepsilon}}{2}}$ converge d'après Riemann ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n}^{+\infty} e^{\frac{-k^{2\varepsilon}}{2}} = 0$ (la suite des restes tend vers 0). Par sous-additivité et d'après la question précédente, $\mathbb{P}(U_n) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) \leqslant 2\sum\limits_{k=n}^{+\infty} e^{\frac{-k^{2\varepsilon}}{2}}$. Par encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n) = 0$ d'où $\mathbb{P}(E_\varepsilon) = 0$.

f. Prenons $\varepsilon = \frac{s}{2} - \dfrac{1}{4}$ de sorte que $\varepsilon > 0$. Soit $\omega \in \overline{E_\varepsilon} = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}$, alors $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \geqslant n,\ |S_k(\omega)| \leqslant k^\beta$ en posant $\beta = \dfrac{1}{2} + \varepsilon > 0$. Ainsi, $\Big(\dfrac{S_k(\omega)}{k^\beta}\Big)_{k\geqslant 1}$ est bornée et il existe $M > 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ |S_k(\omega)| \leqslant M\,k^\beta$. D'après la question **b.**, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{X_n(\omega)}{n^{\beta+\varepsilon}}$ converge et on a donc $\omega \in C_s$ car $s = \beta + \varepsilon$. On vient donc de montrer que $\overline{E_\varepsilon} \subset C_s$, ce qui prouve que $\mathbb{P}(\overline{E_\varepsilon}) \leqslant \mathbb{P}(C_s) \leqslant 1$ donc $\mathbb{P}(C_s) = 1$ d'après la question **e.**.

11.60 **a.** En prenant $x = y = 0$ dans la formule, on a $G(0)^2 = \dfrac{G(0)}{2}$ donc $G(0) = 0$ ou $G(0) = \dfrac{1}{2}$. Si on avait $G(0) = 0$, alors en prenant $y = 0$ et x quelconque dans la formule, on aurait $\forall x \in]-R;R[,\ G(|x|) = 0$ donc G serait nulle sur $[0;R[$. On en déduirait que $\forall n \in \mathbb{N},\ G^{(n)}(0) = 0$ donc la série de Taylor de G serait nulle ce qui contredit le fait que G est développable en série entière car $G(1) = 1 \neq 0$. Par conséquent, $G(0) = \dfrac{1}{2}$.

b. Prenons maintenant $y = 0$ et x quelconque dans la formule et on a $\forall x \in]-R;R[,\ G(x) = G(|x|)$ donc G est paire. Or $\forall x \in]-R;R[,\ G(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)x^n$, la parité de G montre bien que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = 2n+1) = 0$.

c. On dérive la relation $G(x)G(y) = \dfrac{1}{2}G(\sqrt{x^2+y^2})$ par rapport à x pour y fixé, d'où, si $x^2 + y^2 < R^2$, $G'(x)G(y) = \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}G'(\sqrt{x^2+y^2})$. Pour $y = 1$, $\forall x \in]-\sqrt{R^2-1};\sqrt{R^2-1}[,\ G'(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}G'(\sqrt{x^2+1})$ puisque $G(1) = 1$. Pour $x = 1$, on a donc, $\forall y \in]-\sqrt{R^2-1};\sqrt{R^2-1}[,\ G'(1)G(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+y^2}}G'(\sqrt{1+y^2})$.

On remplace y par x et on trouve ainsi : $\forall x \in]-\sqrt{R^2-1};\sqrt{R^2-1}[,\ G'(x)=xG'(1)G(x)$.

d. On résout classiquement l'équation différentielle $y'=xG'(1)y$ dont les solutions sont les $y : x\mapsto \lambda e^{\frac{x^2G'(1)}{2}}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$. Mais comme $G(0)=\frac{1}{2}$, on a donc $\forall x \in\in]-\sqrt{R^2-1};\sqrt{R^2-1}[,\ G(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x^2G'(1)}{2}}$.

On développe cette fonction en série entière, ce qui donne $\forall x\in]-\sqrt{R^2-1};\sqrt{R^2-1}[,\ G(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(G'(1))^n x^{2n}}{2^{n+1}n!}$.

Par unicité des coefficients : $\forall x\in]-R;R[,\ G(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(G'(1))^n x^{2n}}{2^{n+1}n!}=\frac{1}{2}e^{\frac{x^2G'(1)}{2}}$ donc, puisque $G(1)=1$, on a $\frac{1}{2}e^{\frac{G'(1)}{2}}=1$ d'où $G'(1)=\mathbb{E}(X)=2\ln(2)$. On sait aussi que $\mathbb{V}(X)=G''(1)+G'(1)-G'(1)^2$ donc, comme $G''(x)=\ln(2)(1+2x^2)e^{x^2\ln(2)}$ donc $\mathbb{V}(X)=4\ln(2)(2-\ln(2))$ après calculs.

11.61 **a.** On suppose que C est construit sur les racines n-ièmes de l'unité (toute homothétie, translation ou rotation ne change radicalement rien au problème). Si une isométrie laisse invariant le polygone C, elle laisse invariant son centre de gravité. Ainsi, 0 est stable par toute isométrie du plan qui laisse invariant C, ce sera donc une isométrie vectorielle. Les isométries vectorielles du plan sont soit des réflexions, soit des rotations.

• Si s est une réflexion laissant globalement le polygone C, alors s envoie 1 sur $e^{2ik\pi/n}$ (pour $k\in[\![0;n-1]\!]$) donc elle se fait par rapport à la droite d'équation $\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)y=\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)x$ et admet donc pour matrice dans la base canonique $S=\begin{pmatrix}\cos(\theta_k) & \sin(\theta_k)\\ \sin(\theta_k) & -\cos(\theta_k)\end{pmatrix}$ avec $\theta_k=\frac{k\pi}{n}$.

• Si r est une réflexion laissant globalement le polygone C, alors s envoie 1 sur $e^{2ik\pi/n}$ (pour $k\in[\![0;n-1]\!]$) donc elle est d'angle $\theta_k=\frac{k\pi}{n}$ et a donc pour matrice dans la base canonique (d'ailleurs dans toute base orthonormée directe du plan) $R=\begin{pmatrix}\cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k)\\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k)\end{pmatrix}$.

b. Comme $n\geqslant 3$, deux "vecteurs" adjacents de C (on est passé en espace vectoriel plutôt qu'affine) définissent une base de $\mathbb{R}^2$ donc un élément de E_n est entièrement défini par l'image de (A,B). Il y a $2n$ images possibles de (A,B) parce que c'est le cardinal de E_n mais aussi parce qu'il faut choisir l'image de A (n choix) et ensuite l'image de B à côté de A et il y a donc deux choix. En effet, comme une isométrie conserve les distances, elles transforme deux vecteurs adjacents en deux vecteurs adjacents.

c. Si $X\in E_n$ est une réflexion, alors $X^{-1}=X\in E_n$. Si $X=\mathrm{id}_C\in E_n$, alors $X^{-1}=X=\mathrm{id}_C\in E_n$. Si $X\in E_n$ est une rotation d'angle $\theta\not\equiv 0\ [2\pi]$, alors $X^{-1}=R_{-\theta}$ et si $\theta=\theta_k=\frac{k\pi}{n}$ (avec $k\in[\![1;n-1]\!]$) alors $-\theta=\theta_k=-\frac{k\pi}{n}\equiv\theta_k=\frac{(n-k)\pi}{n}\ [2\pi]$ et $n-k\in[\![1;n-1]\!]$ donc $X^{-1}\in E_n$. Tout élément de E_n admet donc un unique inverse dans E_n. Comme la composée d'isométries laissant globalement invariant le polygone C est encore une isométrie laissant globalement invariant C, l'ensemble E_n a donc une structure de groupe pour la loi $\circ$. Ce groupe n'est pas abélien (pas commutatif). On l'appelle D_n, le groupe diédral d'ordre n.

d. $(X_2\circ X_1=\mathrm{id}\,)=\bigcup_{X\in E_n\setminus\{\mathrm{id}_C\}}(X_1=X,\ X_2=X^{-1})$ d'après **c.** par hypothèse. Par incompatibilité de ces évènements et indépendance de X_1 et X_2, $\mathbb{P}(X_2\circ X_1=\mathrm{id}_C)=\frac{(2n-1)}{(2n-1)^2}=\frac{1}{2n-1}$ car $\mathbb{P}(X_1=X)=\frac{1}{2n-1}$.

e. Notons, pour $N\in[\![1;n]\!]$, l'évènement $A_{N,n}=(X_N\circ\cdots\circ X_1=\mathrm{id}_C)\cap\Big(\bigcap_{M=1}^{N-1}(X_M\circ\cdots\circ X_1\neq\mathrm{id}_C)\Big)$. Par la formule des probabilités composées, en notant $A_M=(X_M\circ\cdots\circ X_1=\mathrm{id}_C)$ pour $M\in[\![1;N]\!]$ de sorte que

$A_{N,n} = A_N \cap \Big(\bigcap_{M=1}^{N-1} \overline{A_M}\Big)$, on a $p_{N,n} = \mathbb{P}(\overline{A_1})\,\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})\cdots\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\overline{A_{N-2}}}(\overline{A_{N-1}})\,\mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\overline{A_{N-1}}}(A_N)$. Or par hypothèse $\overline{A_1} = \Omega$ et les données de l'énoncé donnent $p_{N,n} = \Big(\dfrac{2n-2}{2n-1}\Big)^{N-2} \times \Big(\dfrac{1}{2n-1}\Big)$.

f. D'après **e.**, $p_{n,n} = \Big(\dfrac{2n-2}{2n-1}\Big)^{n-2} \times \Big(\dfrac{1}{2n-1}\Big) = \Big(1-\dfrac{1}{2n-1}\Big)^{n-2} \times \Big(\dfrac{1}{2n-1}\Big)$ or $\dfrac{1}{2n-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$ et $\Big(1-\dfrac{1}{2n-1}\Big)^{n-2} = \exp\Big((n-2)\ln\big(1-\frac{1}{2n-1}\big)\Big) \to -\frac{1}{2}$ donc $p_{n,n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{e}\,n}$.

11.62 **a.** Soit X une variable aléatoire réelle positive admettant une espérance finie et $\varepsilon > 0$, alors en distinguant selon que $X(\omega) \geqslant \varepsilon$ ou $X(\omega) < \varepsilon$, on a $\forall \omega \in \Omega,\ X(\omega) \geqslant \varepsilon \mathbb{1}_{(X\leqslant\varepsilon)}(\omega)$ ce qui montre que $X \geqslant \varepsilon\mathbb{1}_{(X\leqslant\varepsilon)}$ (inégalité sur des variables aléatoires). Par croissance de l'espérance et comme $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(X\leqslant\varepsilon)}) = \mathbb{P}(X \leqslant \varepsilon)$ d'après le cours, on obtient la majoration $\mathbb{E}(X) \geqslant \varepsilon\,\mathbb{P}(X \geqslant \varepsilon)$: c'est l'inégalité de MARKOV.

Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2. Soit $\varepsilon > 0$, alors les deux évènements $(|X-\mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon)$ et $((X-\mathbb{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2)$ sont égaux donc $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}((X-\mathbb{E}(X))^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$ d'après MARKOV donc $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$: c'est l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.

b. Soit $\lambda > 0$, $\mathbb{E}((Y+\lambda)^2) = \mathbb{E}(Y^2+2\lambda Y+\lambda^2) = \mathbb{E}(Y^2)+2\lambda\,\mathbb{E}(Y)+\lambda^2\,\mathbb{E}(1)$ par linéarité de l'espérance (tout existe par hypothèse). Or on sait que $\mathbb{E}(1) = 1$, que $\sigma^2 = V(X) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(Y^2)$ par définition et que $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = 0$ ce qui donne bien $\mathbb{E}((Y+\lambda)^2) = \sigma^2+\lambda^2$.

c. Soit $\lambda > 0$, $(Y \geqslant \alpha) = (Y+\lambda \geqslant \alpha+\lambda) \subset ((Y+\lambda)^2 \geqslant (\alpha+\lambda)^2)$ (on n'a pas égalité en général). D'après l'inégalité de MARKOV, puisque $(Y+\lambda)^2$ est une variable aléatoire réelle positive d'espérance finie, on a $\mathbb{P}((Y+\lambda)^2 \geqslant (\alpha+\lambda)^2) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}((Y+\lambda)^2 \geqslant (\alpha+\lambda)^2)}{(\alpha+\lambda)^2} = \dfrac{\sigma^2+\lambda^2}{\lambda^2+\alpha^2+2\alpha\lambda}$ d'après la question **a.**. Ainsi, $0 \leqslant \mathbb{P}(Y \geqslant \alpha) \leqslant \mathbb{P}((Y+\lambda)^2 \geqslant (\alpha+\lambda)^2) \leqslant \dfrac{\sigma^2+\lambda^2}{\lambda^2+\alpha^2+2\alpha\lambda}$ par croissance de la probabilité.

d. • Si $\sigma = 0$, on fait tendre λ vers 0^+ dans l'inégalité ci-dessus et on trouve $\mathbb{P}(Y \geqslant \alpha) = 0$ par encadrement.
• Si $\sigma > 0$, posons $f : \lambda \mapsto \dfrac{\sigma^2+\lambda^2}{\lambda^2+\alpha^2+2\alpha\lambda}$. La fonction f est positive, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(\lambda) = \dfrac{2(\lambda\alpha-\sigma^2)}{(\alpha+\lambda)^3}$. La fonction f est donc décroissante sur $]0;\lambda_0]$ et croissante sur $[\lambda_0;+\infty[$ avec $\lambda_0 = \dfrac{\sigma^2}{\alpha}$, avec $f(0) = \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2}$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} f(\lambda) = 1$. Ainsi, f atteint son minimum sur $\mathbb{R}_+$ en λ_0. Ainsi, comme $\forall \lambda > 0,\ \mathbb{P}(Y \geqslant \alpha) \leqslant f(\lambda)$, en évaluant cette inégalité en λ_0, on obtient $\mathbb{P}(Y \geqslant \alpha) \geqslant f(\lambda_0) = \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+\alpha^2}$.

Dans les deux cas, on a l'inégalité attendue : $\mathbb{P}(Y \geqslant \alpha) \geqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+\alpha^2}$.

e. On décompose l'évènement $(|Y| \geqslant \alpha) = (Y \geqslant \alpha) \cup (Y \leqslant -\alpha)$ en deux évènements incompatibles donc $\mathbb{P}(|Y| \geqslant \alpha) = \mathbb{P}(Y \geqslant \alpha) + \mathbb{P}(-Y \geqslant \alpha)$. Comme la variable aléatoire $-X$ vérifie les mêmes hypothèses que X ($-X$ admet un moment d'ordre 2 et $\mathbb{V}(-X) = \mathbb{V}(X) = \sigma^2$) et que $Y' = -X - \mathbb{E}((-X)) = -Y$, on a $\mathbb{P}(-Y \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+\alpha^2}$ d'après **d.**, ce qui donne bien $\mathbb{P}(|Y| \geqslant \alpha) = \mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{2\sigma^2}{\sigma^2+\alpha^2}$.
$\dfrac{2\sigma^2}{\sigma^2+\alpha^2} \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2} \iff \sigma \geqslant \alpha$ (cette nouvelle inégalité est meilleure que BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV).
$\dfrac{2\sigma^2}{\sigma^2+\alpha^2} \geqslant \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2} \iff \sigma \leqslant \alpha$ (cette nouvelle inégalité est moins bonne que BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV).

$\boxed{11.63}$ **a.** N est par construction le nombre d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $S_n = 0$. Cette suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires modélise une marche aléatoire symétrique dans $\mathbb{Z}$: à chaque étape, on fait un pas vers la droite ou vers la gauche (avec probabilité $\frac{1}{2}$) en partant de 0. N est alors le nombre de retours à l'origine.

b. Comme $N = 0 \iff (\forall n \geqslant 1,\ S_n \neq 0)$, on a $(N = 0) = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \overline{(S_n = 0)}$ par définition.

c. Comme $(N = +\infty) \iff (\forall n \in \mathbb{N},\ \exists k \geqslant n,\ S_k = 0)$, on a $(N = +\infty) = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty}(S_k = 0)$ et, en posant $U_n = \bigcup\limits_{k=n}^{+\infty}(S_k = 0)$, $U_n = U_{n+1} \cup (S_n = 0)$ donc la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'évènements.

d. Si $N(\omega) < +\infty$, considérons le plus grand entier k tel que $S_k(\omega) = 0$ (avec la convention $k = 0$ si un tel entier n'existe pas). Alors $\omega \in (S_k = 0) \cap \Big(\bigcap\limits_{i>k}(S_i \neq 0)\Big)$. Cette appartenance marche encore si $k = 0$ car $(S_0 = 0) = \Omega$ et que $\omega \in \bigcap\limits_{i\geqslant 1}(S_i \neq 0)$. Réciproquement, si $\omega \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}\Big((S_k = 0)\cap\Big(\bigcap\limits_{i>k}(S_i \neq 0)\Big)\Big)$, par définition $N(\omega) \leqslant k+1$ donc $N(\omega) < +\infty$. Par double inclusion, $(N < +\infty) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}\Big((S_k = 0)\cap\Big(\bigcap\limits_{i>k}(S_i \neq 0)\Big)\Big)$. Les évènements $B_k = (S_k = 0) \cap \Big(\bigcap\limits_{i>k}(S_i \neq 0)\Big)$ sont incompatibles car k représente le plus grand entier tel que S_k s'annule, ainsi par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(N < +\infty) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(B_k)$.

Si $k \in \mathbb{N}$, $(S_k = 0) \cap \Big(\bigcap\limits_{i>k}(S_i \neq 0)\Big) = (S_k = 0) \cap \Big(\bigcap\limits_{i>k}(S_i - S_k \neq 0)\Big) = (\sum\limits_{i=0}^{k} X_i = 0) \cap \Big(\bigcap\limits_{i>k}(\sum\limits_{j=k+1}^{i} X_j \neq 0)\Big)$ donc ces deux évènements sont indépendants d'après le lemme des coalitions. Par conséquent, on a la relation $\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(S_k = 0) \times \mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{i>k}(S_i - S_k \neq 0)\Big)$ et on a bien $\mathbb{P}(N < +\infty) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S_k = 0)\,\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{i>k}(S_i - S_k \neq 0)\Big)$.

e. Pour $k \in \mathbb{N}$, $\bigcap\limits_{i>k}(S_i - S_k \neq 0) = \bigcap\limits_{i>k}(\sum\limits_{j=k+1}^{i} X_j \neq 0)$ et la famille de variables aléatoires $(X_j)_{j\geqslant k+1}$ vérifie les mêmes propriétés (les mêmes lois) que la famille $(X_j)_{j\geqslant 1}$ (indépendance mutuelle et loi de Bernoulli). Ainsi, $\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{i>k}(S_i - S_k \neq 0)\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{j\geqslant 1}(S_j \neq 0)\Big) = \mathbb{P}(N = 0)$. Ainsi, $\mathbb{P}(N < +\infty) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N = 0)\,\mathbb{P}(S_k = 0)$. Or il est impossible d'effectuer un retour à l'origine après un nombre impair de pas (S_n est de la parité de n) donc $\mathbb{P}(S_{2k+1} = 0) = 0$ et $\mathbb{P}(S_{2k} = 0) = \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}$ car pour revenir à l'origine après $2k$ pas, il faut en choisir k vers la gauche (parmi $2k$ pas) et les autres seront vers la droite. Par l'équivalent de Stirling, $\mathbb{P}(S_{2k} = 0) = \frac{1}{2^{2k}}\frac{(2k)!}{(k!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi k}(2k)^{2k}(e^k)^2}{2^{2k}e^{2k}(\sqrt{2\pi k})^2(k^k)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$ après simplification donc $\sum\limits_{k\geqslant 0}\mathbb{P}(S_k = 0)$ diverge par Riemann. Ceci impose $\mathbb{P}(N = 0) = 0$ donc $\mathbb{P}(N < +\infty) = 0$ aussi et on vient de prouver que lors de cette marche aléatoire symétrique dans $\mathbb{Z}$, on revient presque sûrement une infinité de fois à l'origine.

Questions de cours :

- Une variable aléatoire X suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$ vérifie $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et les relations $\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$. Si on considère une suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes le loi de Bernoulli de paramètre p, alors $T = \mathrm{Min}(k \in \mathbb{N}^* \mid B_k = 1)$ est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p (modulo le fait que l'évènement $(T = +\infty)$ n'est pas impossible mais juste négligeable).

• On considère une suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes le loi de BERNOULLI et on pose $T_2 = \mathrm{Min}(k \in \mathbb{N}^* \mid k > T \text{ et } B_k = 1)$ (avec les notations ci-dessus). Pour $n \geqslant 2$, $(T_2 = n) = \bigcup_{k=1}^{n-1} (T = k) \cap \Big(\bigcap_{i=k+1}^{n-1} (B_i = 0) \Big) \cap (B_n = 1)$. Ainsi, par indépendance mutuelle et incompatibilité de ces évènements, on a $\mathbb{P}(T_2 = n) = \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{k-1} p (1-p)^{n-k-1} p = (1-p)^{n-2} p^2 \sum_{k=1}^{n-1} 1 = (n-1)(1-p)^{n-2} p^2$.

• On appelle système complet d'évènements d'un univers Ω toute famille finie ou dénombrable $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'évènements telle que $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ n \neq m \Longrightarrow A_n \cap A_m = \emptyset$.

11.64 **a.** Le rayon de convergence de la série génératrice de X est infini car $\Big(\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n t^n}{n!}\Big)_{n\geqslant 0}$ est bornée pour tout réel t par croissances comparées. Classiquement $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n t^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{\lambda(t-1)}$.
Toutes les séries qui suivent convergent absolument. On peut donc écrire :
$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda$. Par le théorème du transfert, on a aussi $\mathbb{E}(X^2 - X) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - n)\,\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{(n-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} = \lambda^2$ et, avec la même méthode, il vient $\mathbb{E}(X(X-1)(X-2)) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\,\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=3}^{+\infty} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{(n-3)!} = \lambda^3 e^{-\lambda} \sum_{n=3}^{+\infty} \dfrac{\lambda^{n-3}}{(n-3)!} = \lambda^3$. Ainsi, par linéarité de l'espérance, on obtient $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = \lambda^2 + \lambda$ et, de la même manière, on a $\mathbb{E}(X^3) = \mathbb{E}(X(X-1)(X-2)) + 3\,\mathbb{E}(X^2) - 2\,\mathbb{E}(X) = \lambda^3 + 3(\lambda^2 + \lambda) - 2\lambda = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$.
Ou alors en dérivant plusieurs fois G_X car $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X = n) t^{n-1}$, $G''_X(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,\mathbb{P}(X = n) t^{n-2}$ et $G'''_X(t) = \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\,\mathbb{P}(X = n) t^{n-3}$ donc on obtient $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$, $\mathbb{E}(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1)$ et enfin $\mathbb{E}(X^3) = G'''_X(1) + 3G''_X(1) + G'_X(1)$ car $n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$. On retrouve les résultats précédents car $G'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$, $G''_X(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$ et $G''_X(t) = \lambda^3 e^{\lambda(t-1)}$.

b. Déjà, on a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ (Y = n) = \bigcup_{m=n}^{+\infty} (X = m, Y = n)$ (évènements incompatibles) donc Y est une variable aléatoire et $\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n | X = m)\,\mathbb{P}(X = m)$. Mais la loi de Y sachant $(X = m)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$ par hypothèse (en supposant l'indépendance mutuelle des clients) donc $\mathbb{P}(Y = n) = \sum_{m=n}^{+\infty} \dbinom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$. Ainsi, en réorganisant les termes, on trouve la nouvelle expression $\mathbb{P}(Y = n) = \dfrac{p^n \lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \sum_{m=n}^{+\infty} \dfrac{(\lambda(1-p))^{m-n}}{(m-n)!} = \dfrac{p^n \lambda^n e^{-\lambda}}{n!} e^{\lambda(1-p)} = \dfrac{(\lambda p)^n e^{-\lambda p}}{n!}$ donc $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.

c. Comme $(Z = 0) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (Z = 0, X = k)$ (réunion d'évènements incompatibles), on a par σ-additivité la relation $\mathbb{P}(Z = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = 0, X = k)$. Or $\mathbb{P}(Z = 0 | X = k) = (1-p)^k$ puisqu'aucun des clients ne doit être mis en attente parmi les k clients ce jour-là. Ainsi, $\mathbb{P}(Z = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = 0 | X = k)\,\mathbb{P}(X = k)$ donc $\mathbb{P}(Z = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} (1-p)^k = e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}$.

Si $n \geqslant 1$, $(Z = n) = \bigcup_{k=n}^{+\infty} (Z = n, X = k)$, on a de même $\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = n | X = k)\,\mathbb{P}(X = k)$ mais $\mathbb{P}(Z = n | X = k) = p(1-p)^{n-1}$ (les $n-1$ premiers ne sont pas mis en attente et le n-ième oui) d'où

$\mathbb{P}(Z=n)=\sum\limits_{k=n}^{+\infty}p(1-p)^{n-1}\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=p(1-p)^{n-1}e^{-\lambda}\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. On ne reconnaît aucune loi classique pour Z.

11.65 D'abord, ce sont bien des droites car pour tout $\omega\in\Omega$ et $k\in[\![1;3]\!]$, le couple $(1,Z_k(\omega))$ est non nul.

Si les trois droites D_1,D_2,D_3 sont concourantes en le point $M_0=(x_0,y_0)$, alors le système homogène $\begin{cases} x+Z_1y+Z_1^2z &=0\\ x+Z_2y+Z_2^2z &=0\\ x+Z_3y+Z_3^2z &=0\end{cases}$ admet une solution non nulle $(x_0,y_0,1)$ donc son déterminant est nul, ce qui d'après Vandermonde, donne $\begin{vmatrix}1 & Z_1 & Z_1^2\\ 1 & Z_2 & Z_2^2\\ 1 & Z_3 & Z_3^2\end{vmatrix}=(Z_3-Z_2)(Z_3-Z_1)(Z_2-Z_1)=0$. Si les trois droites sont parallèles, comme elles admettent pour vecteurs directeurs respectifs $v_1=(-Z_1,1)$, $v_2=(-Z_2,1)$ et $v_3=(-Z_3,1)$, on obtient $Z_1=Z_2=Z_3$. Dans les deux cas, on a donc $(Z_3-Z_2)(Z_3-Z_1)(Z_2-Z_1)=0$.

Réciproquement, si $(Z_3-Z_2)(Z_3-Z_1)(Z_2-Z_1)=0$, alors par exemple $Z_1=Z_2$ donc $D_1=D_2$ et D_1,D_2,D_3 sont concourantes si D_1 et D_3 sont sécantes et D_1,D_2,D_3 sont parallèles si D_1 et D_3 le sont.

Au final, la condition nécessaire et suffisante cherchée pour que les trois droites D_1,D_2,D_3 soient parallèles ou concourantes est $(Z_3-Z_2)(Z_3-Z_1)(Z_2-Z_1)=0$.

Par conséquent, $q=\mathbb{P}((Z_3-Z_2)(Z_3-Z_1)(Z_2-Z_1)=0)=\mathbb{P}((Z_1=Z_2)\text{ ou }(Z_1=Z_3)\text{ ou }(Z_2=Z_3))$. On en déduit que $q=\mathbb{P}(Z_1=Z_2)+\mathbb{P}(Z_2=Z_3)+\mathbb{P}(Z_1=Z_3)-2\,\mathbb{P}(Z_1=Z_2=Z_3)$ car en général, pour trois évènements A,B,C, on a $\mathbb{P}(A\cup B\cup C)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$. Comme Z_1,Z_2,Z_3 suivent les mêmes lois, $\mathbb{P}(Z_1=Z_2)=\mathbb{P}(Z_1=Z_3)=\mathbb{P}(Z_2=Z_3)$ ce qui nous donne la formule compacte : $p=3\,\mathbb{P}(Z_1=Z_2)-2\,\mathbb{P}(Z_1=Z_2=Z_3)$. Or $(Z_1=Z_2)=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}(Z_1=n,Z_2=n)$ donc, par indépendance de Z_1 et Z_2, il vient $\mathbb{P}(Z_1=Z_2)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Z_1=n)\,\mathbb{P}(Z_2=n)$. Si Z_1,Z_2,Z_3 suivent la loi géométrique de paramètre $p\in]0;1[$, alors $\mathbb{P}(Z_1=Z_2)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}p^2(1-p)^{2(n-1)}=\dfrac{p^2}{1-(1-p)^2}=\dfrac{p}{2-p}$.
$(Z_1=Z_2=Z_3)=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}(Z_1=n,Z_2=n,Z_3=n)$ donc $\mathbb{P}(Z_1=Z_2=Z_3)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Z_1=n)^3$ ce qui donne $\mathbb{P}(Z_1=Z_2=Z_3)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}p^3(1-p)^{3(n-1)}=\dfrac{p^3}{1-(1-p)^3}=\dfrac{p^2}{3-3p+p^2}$. Ainsi, $q=\dfrac{p(9-13p+5p^2)}{(2-p)(3-3p+p^2)}$.

11.66 **a.** On admet qu'il existe un espace probabilisé portant la suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes $(B_k)_{k\geqslant1}$ telle que B_k vaut 1 si le k-ième tirage donne une boule blanche et 0 si c'est une boule noire. D'après l'énoncé, ces variables aléatoires suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p.

Clairement, $X(\Omega)=Y(\Omega)\subset\mathbb{N}^*$ (on verra qu'on a même égalité). Si $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $(X=m,Y=n)$ vaut $\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{m}(B_i=0)\cap\bigcap\limits_{j=m+1}^{n+m}(B_j=1)\cap(B_{n+m+1}=0)\Big)\cup\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{m}(B_i=1)\cap\bigcap\limits_{j=m+1}^{n+m}(B_j=0)\cap(B_{n+m+1}=1)\Big)$ (incompatibles) donc $(X=m,Y=n)\in\mathcal{A}$ car B_i sont des variables aléatoires et, par indépendance mutuelle de la famille $(B_i)_{i\geqslant1}$, on a $\mathbb{P}(X=m,Y=n)=(1-p)^mp^n(1-p)+p^m(1-p)^np=(1-p)^{m+1}p^n+p^{m+1}(1-p)^n$.

b. Soit $m\in\mathbb{N}^*$, comme on peut décomposer $(X=m)=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}(X=m,Y=n)$, par σ-additivité, on a la relation $\mathbb{P}(X=m)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}((1-p)^{m+1}p^n+p^{m+1}(1-p)^n)=p(1-p)^{m+1}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}p^{n-1}+(1-p)p^{m+1}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}$ ce qui donne, comme $0 < p < 1$, $\mathbb{P}(X = m) = \dfrac{p(1-p)^{m+1}}{1-p} + \dfrac{(1-p)p^{m+1}}{1-(1-p)} = p(1-p)^m + (1-p)(1-p)^m$. On pouvait aussi écrire que $(X = m) = (B_1 = 1, \cdots, B_m = 1, B_{m+1} = 0) \cup (B_1 = 0, \cdots, B_m = 0, B_{m+1} = 1)$ et conclure comme à la question **a.**, ce qui est nettement plus simple.

Par croissances comparées, $m\,\mathbb{P}(X = m) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{m^2}\Big)$ donc X admet une espérance finie qu'on peut calculer en se rappelant que $\forall x \in]-1;1[$, $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} m x^{m-1} = \Big(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} x^m\Big)' = \Big(\dfrac{1}{1-x}\Big)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$. Par conséquent, il vient $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} m\,\mathbb{P}(X = m) = \sum\limits_{m=1}^{+\infty} (mp(1-p)^m + m(1-p)(1-p)^m) = p(1-p)\Big(\sum\limits_{m=1}^{+\infty} m(1-p)^{m-1} + \sum\limits_{m=1}^{+\infty} mp^{m-1}\Big)$ donc $\mathbb{E}(X) = \dfrac{p(1-p)}{(1-(1-p))^2} + \dfrac{p(1-p)}{(1-p)^2} = \dfrac{1-p}{p} + \dfrac{p}{1-p} = \dfrac{(1-p)^2 + p^2}{p(1-p)}$.

On pouvait constater que la loi de X est en quelque sorte la "somme" de deux lois géométriques. En effet, si X_1 vérifie $\mathbb{P}(X_1 + 1 = m) = p(1-p)^{m-1}$, alors $\mathbb{P}(X_1 = m) = p(1-p)^m$ et $X_1 + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p. On sait qu'alors $\mathbb{E}(X_1 + 1) = \dfrac{1}{p}$ donc $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{1}{p} - 1 = \dfrac{1-p}{p}$. De même, si X_2 vérifie $\mathbb{P}(X_2 + 1 = m) = (1-p)p^{m-1}$, alors $\mathbb{P}(X_2 = m) = (1-p)p^m$ et $X_2 + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $1-p$. On sait qu'alors $\mathbb{E}(X_2 + 1) = \dfrac{1}{1-p}$ donc $\mathbb{E}(X_2) = \dfrac{1}{1-p} - 1 = \dfrac{p}{1-p}$. Par linéarité de la somme d'une série, on retrouve $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = \dfrac{1-p}{p} + \dfrac{p}{1-p}$.

De même, pour $n \in \mathbb{N}^*$, comme on a aussi $(Y = n) = \bigcup\limits_{m=1}^{+\infty} (X = m, Y = n)$, on a encore par σ-additivité $\mathbb{P}(Y = n) = \sum\limits_{m=1}^{+\infty} ((1-p)^{m+1}p^n + p^{m+1}(1-p)^n) = \dfrac{p^n(1-p)^2}{1-(1-p)} + \dfrac{p^2(1-p)^n}{1-p} = (1-p)^2 p^{n-1} + p^2(1-p)^{n-1}$.
Comme avant, $\mathbb{E}(Y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (n(1-p)^2 p^{n-1} + np^2(1-p)^{n-1}) = \dfrac{(1-p)^2}{(1-p)^2} + \dfrac{p^2}{(1-(1-p))^2} = 2$. WEIRD NO ?

c. $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) - \mathbb{P}(X = 1)\,\mathbb{P}(Y = 1) = p^2(1-p) + (1-p)^2 p - 2p(1-p)(p^2 + (1-p)^2) = p(4p^3 - 8p^2 + 5p - 1)$ donc $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) - \mathbb{P}(X = 1)\,\mathbb{P}(Y = 1) = p(2p-1)(2p^2 - 3p + 1) = -p(1-p)(2p-1)^2$ donc si X et Y sont indépendantes, comme $p(1-p) \neq 0$, on a forcément $p = \dfrac{1}{2}$. Réciproquement, si $p = \dfrac{1}{2}$, on a $\forall n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n) = \dfrac{1}{2^n}$ et $\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathbb{P}(X = m, Y = n) = \dfrac{1}{2^{m+n}} = \mathbb{P}(X = m)\,\mathbb{P}(Y = n)$ donc X et Y sont indépendantes (et de même loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$). La condition nécessaire et suffisante cherchée pour que X et Y soient indépendantes est donc $p = \dfrac{1}{2}$.

11.67 Clairement $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$ (on a même égalité comme on va le voir). De plus, $(Z = 0) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}^*} (X = k, Y = k)$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(Z = n) = \Big(\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}^*} (X = n + k, Y = k)\Big) \cup \Big(\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}^*} (X = k, Y = n + k)\Big)$. Par conséquent, Z est une variable aléatoire discrète car $Z(\Omega)$ est dénombrable et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(Z = n) \in \mathcal{A}$ d'après les propriétés des tribus (car X et Y sont elles-mêmes des variables aléatoires discrètes).

Par indépendance de X et Y, incompatibilité des évènements écrits ci-dessus, et comme X et Y suivent la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, on a $\mathbb{P}(Z = 0) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)^2 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2(k-1)} = \dfrac{p^2}{1-(1-p)^2} = \dfrac{p}{2-p}$ (série géométrique). Pour $n \geqslant 1$, on a pour les mêmes raisons $\mathbb{P}(Z = n) = 2\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n + k)\,\mathbb{P}(X = k)$ qui devient $\mathbb{P}(Z = n) = 2\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{n+2k-2} = \dfrac{2p^2(1-p)^n}{1-(1-p)^2} = \dfrac{2p(1-p)^n}{2-p}$. On vérifie la cohérence de ces résultats :

$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z=n) = \frac{p}{2-p} + \frac{2p(1-p)}{2-p}\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1} = \frac{p}{2-p} + \frac{2(1-p)}{2-p} = 1.$

Comme $n\,\mathbb{P}(Z=n) = \frac{2p}{2-p}(n(1-p)^n)$ et que la série $\sum_{n\geqslant 1} nx^n$ est de rayon 1, la série $\sum_{n\geqslant 0} n\,\mathbb{P}(Z=n)$ converge donc Z admet une espérance finie par définition.

Puisque $\forall x \in]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, en dérivant, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Ainsi, $\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(Z=n) = \frac{2p}{2-p}\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^n = \frac{2p}{2-p}\frac{1-p}{(1-(1-p))^2} = \frac{2(1-p)}{p(2-p)}$.

11.68 **a.** On admet l'existence d'un espace probabilisé qui supporte la suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes $(J_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $J_n = 1$ si la fille répond bien le jour n et $J_n = 0$ sinon. D'après l'énoncé, toutes les J_n suivent la même loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/3$. Soit $B =$ “fille répond bien les R premiers jours”. Alors $B = (J_1 = 1, \cdots, J_R = 1)$ donc $\mathbb{P}(B) = p_R = \prod_{k=1}^{R} \mathbb{P}(J_k = 1) = p^R = \left(\frac{1}{3}\right)^R$.

b. On a calculé $\mathbb{P}(Z=0) = \mathbb{P}(B) = p_R = p^R$. Si $n \in [\![1;R]\!]$, $(Z=n) = (J_1 = 1, \cdots, J_{n-1} = 1, J_n = 0)$ donc, par indépendance mutuelle encore : $\mathbb{P}(Z=n) = p^{n-1}(1-p) = \frac{2}{3^n}$.

On vérifie bien que $\sum_{n=0}^{R} \mathbb{P}(Z=n) = p^R + \sum_{n=1}^{R}(p^{n-1} - p^n) = p^R + 1 - p^R = 1$ par télescopage.

c. Notons A l'instant où le jeu s'arrête avec comme convention $A = 0$ s'il ne s'arrête jamais. Alors A est une variable aléatoire car $A(\Omega) \subset \mathbb{N}$, que $(A = R) = (J_1 = 1, \cdots, J_R = 1) \in \mathcal{A}$ et que pour tout entier $n > R$, on a $(A = n) = \overline{(A < n)} \cap (J_{n-R+1} = 1, \cdots, J_n = 1) \in \mathcal{A}$ (par récurrence) et qu'enfin $(A = 0) = \bigcap_{k=R}^{+\infty} \overline{(A = k)} \in \mathcal{A}$.

Soit $n \geqslant R$, $p_{n+1} = \mathbb{P}(A = n+1) = \sum_{i=0}^{R} \mathbb{P}(A = n+1 | Z = i)\mathbb{P}(Z = i)$ par la formule des probabilités totales car $((Z = i)_{0\leqslant i\leqslant R}$ est un système complet d'évènements. Comme $\mathbb{P}(A = n+1|Z=0) = 0$ par construction, on a $\mathbb{P}(A = n+1) = \sum_{i=1}^{R} \frac{2}{3^i}\mathbb{P}(A = n+1|Z=i)$. De plus, $\mathbb{P}(A = n+1|Z=i) = p_{n+1-i}$ car indépendance mutuelle puisque quand la sœur se trompe au jour i, c'est comme si on recommençait tout à l'instant 0.
Ainsi, $\mathbb{P}(A = n+1) = \sum_{i=1}^{R} \frac{2}{3^i}p_{n+1-i}$ et, avec le changement d'indice $k = i-1$, $p_{n+1} = \sum_{k=0}^{R-1} \frac{2}{3^{k+1}}p_{n-k}$.

d. On sait que $p_0 = p_1 = 0$ et que $p_2 = \frac{1}{9}$. Avec la question précédente, $\forall n \geqslant 1$, $p_{n+2} = \frac{2}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$. Les racines de $X^2 - \frac{2}{3}X - \frac{2}{9}$ étant $\frac{1}{3} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = A\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n + B\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$.
Je vous laisse terminer les calculs en trouvant A et B avec les valeurs de p_1 et p_2.

11.69 **a.** On fait le choix de dire que si une personne est servie en p secondes, alors la suivante peut être servie à partir de la seconde p. On suppose aussi que X_1, X_2, X_3 sont mutuellement indépendantes. Ainsi, si $k \in \mathbb{N}$, $(Y \geqslant k) = (X_1 \geqslant k) \cap (X_2 \geqslant k)$. Or $(X_1 \geqslant k) = \bigcup_{i=k}^{+\infty}(X_1 = i)$ donc, par σ-additivité, on a la relation $\mathbb{P}(X_1 \geqslant k) = \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = i) = \sum_{i=k}^{+\infty}(1-p)p^i = (1-p)p^k \sum_{j=0}^{+\infty} p^j = p^k$. Par conséquent, par indépendance de X_1 et X_2, il vient $\mathbb{P}(Y \geqslant k) = \mathbb{P}(X_1 \geqslant k)\mathbb{P}(X_2 \geqslant k) = p^{2k}$. On en déduit, puisque $(Y \geqslant k) = (Y = k) \cup (Y \geqslant k+1)$, que $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y \geqslant k) - \mathbb{P}(Y \geqslant k+1) = p^{2k} - p^{2(k+1)} = (1-p^2)(p^2)^k$.

b. A_3 quitte le bureau de poste au bout de X_3 secondes à partir du moment où elle est servie. Ainsi, avec la convention choisi ci-dessus, on a $Z = Y + X_3$. Si $n \in \mathbb{N}$, $(Z = n) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} (Y = k, X_3 = n-k)$ (évènements incompatibles) donc, par indépendance de Y et X_3, $\mathbb{P}(Z = n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (1-p^2)(p^2)^k(1-p)p^{n-k}$ donc $\mathbb{P}(Z = n) = (1-p^2)(1-p)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p^{n+k} = (1-p^2)(1-p)p^n \sum_{k=0}^{n} p^k = (1-p^2)p^n(1-p^{n+1})$.

c. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X_3)$. Or $X_3 + 1 \sim \mathcal{G}(1-p)$ donc $\mathbb{E}(X_3+1) = \dfrac{1}{1-p}$ d'après le cours d'où $\mathbb{E}(X_3) = \dfrac{p}{1-p}$. De même, d'après la question **a.**, $Y + 1 \sim \mathcal{G}(1-p^2)$ donc $\mathbb{E}(Y+1) = \dfrac{1}{1-p^2}$ et $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{p^2}{1-p^2}$. Par conséquent, $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{p^2}{1-p^2} = \dfrac{p(1+p)+p^2}{1-p^2} = \dfrac{p(1+2p)}{1-p^2}$.

11.70 **a.** On note T_k le numéro de la boule tirée au tirage k. On admet l'existence d'un espace probabilisé qui supporte cette suite $(T_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes (remarque du cours). D'abord $X_n(\Omega) = (\mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \cup \{+\infty\}$ car on rajoute la possibilité de ne jamais avoir une autre boule que la première tirée, qu'on note $X_n = +\infty$. De plus, $(X_n = +\infty) = \displaystyle\bigcap_{k=2}^{+\infty} \overline{(X_n = k)}$ par convention et $(X_n = k) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \Big((T_1 = i) \cap \cdots \cap (T_{k-1} = i) \cap (T_k \neq i)\Big) \in \mathcal{A}$ pour $k \geqslant 2$ donc X_n est une variable aléatoire car les T_i le sont. Par incompatibilité de ces n évènements, indépendance mutuelle des T_k qui suivent toutes la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$, on a $\mathbb{P}(X_n = k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^{k-1}}$ pour $k \geqslant 2$.

On vérifie la cohérence de ces résultats car $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n^{k-1}} = \frac{n-1}{n}\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^j = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{1-(1/n)} = 1$. Ceci justifie que l'évènement $(X_n = +\infty)$ (toujours la même boule) est négligeable comme attendu.

b. $k\,\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{k(n-1)}{n^{k-1}}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{k(n-1)}{n^{k-1}}$ converge car le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} kx^{k-1}$ est égal à 1 et que $\left|\dfrac{1}{n}\right| < 1$. De plus, comme $\forall x \in]-1;1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, on obtient en dérivant $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} - 1$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n) = (n-1) \times \left(\dfrac{n^2}{(n-1)^2} - 1\right) = \dfrac{2n-1}{n-1}$. Par conséquent, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = 2$ ce qu'on subodorait car plus n augmente, plus l'évènement $(X_n = 2)$ devient presque sûr.

c. Comme $X_2 = Y_2$, pour $k \geqslant 2$, on a $(Y_2 = k) = (X_2 = k)$ donc $\mathbb{P}(Y_2 = k) = \dfrac{1}{2^{k-1}}$ d'après **a.**. On reconnaît cette loi, $Y_2 - 1$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$ car $\mathbb{P}(Y_2 - 1 = k) = \mathbb{P}(Y_2 = k+1) = \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$.

d. Pour $k \geqslant 3$, en notant i le numéro de la première boule tirée, r le premier rang pour lequel on tire une boule de numéro $j \neq i$, comme $6-i-j$ est le numéro tiré autre que i et j (car $i+j+(6-i-j) = 1+2+3 = 6$), on a $(Y_3 = k) = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{3}\bigcup_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}\bigcup_{r=2}^{k-1}\left(\left(\bigcap_{a=1}^{r-1}(T_a = i)\right) \cap (T_r = j) \cap \left(\bigcap_{b=r+1}^{k-1}(T_k = i) \cup (T_k = j)\right)\right) \cap (T_k = 6-i-j)$.

Ainsi, par incompatibilité de tous ces évènements, indépendance mutuelle des tirages et symétrie entre les numéros, $\mathbb{P}(Y_3 = k) = 3 \times 2 \times \displaystyle\sum_{r=2}^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{r-1} \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-r-1} \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{6}{3^k}\sum_{r=2}^{k-1} 2^{k-r-1} = \frac{6(2^{k-2}-1)}{3^k}$.

À nouveau, comme $Y_3(\Omega) = \{3, 4, 5, \cdots, +\infty\}$, on vérifie que $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_3 = k) = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{6(2^{k-2}-1)}{3^k} = 1$. En effet, on a $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{6(2^{k-2}-1)}{3^k} = (6/4)\frac{(2/3)^3}{1-(2/3)} - 6\frac{(1/3)^3}{1-(1/3)} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$. Ceci justifie que l'évènement $(Y_3 = +\infty)$ (seulement deux numéros tirés éternellement) est négligeable comme attendu.

11.71 **a.** Pour $k \in [\![1;n]\!]$, la variable aléatoire X_k suit la loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$ donc $\forall i \in [\![1;6]\!]$, $\mathbb{P}(X_k = i) = \frac{1}{6}$. Par définition, la fonction de répartition F de X_k (qui ne dépend pas de k), vérifie $F(t) = 0$ si $t < 1$, $\forall i \in [\![1;5]\!]$, $\forall t \in [i;i+1[$, $F(t) = \frac{i}{6}$ et $F(t) = 1$ si $t \geqslant 6$.

b. Soit $t \in \mathbb{R}$, comme $M_n = Max(X_1, \cdots, X_n)$, on a $(M_n \leqslant t) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leqslant t)$ donc, par indépendance mutuelle des $X_1, \cdots, X_n$, il vient $G_n(t) = \mathbb{P}(M_n \leqslant t) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \leqslant t) = F(t)^n$.

c. De même, si $t \in \mathbb{R}$, comme $m_n = Min(X_1, \cdots, X_n)$, $(m_n > t) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k > t)$ donc, par indépendance mutuelle des $X_1, \cdots, X_n$: $1 - H_n(t) = \mathbb{P}(m_n > t) = 1 - \mathbb{P}(m_n \leqslant t) = 1 - H_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k > t) = (1 - F(t))^n$. On en déduit que $H_n(t) = 1 - (1 - F(t))^n$.

d. Grâce aux expressions de la question **a.**, la suite de fonctions $(G_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $G(t) = 0$ si $t < 6$ et $G(t) = 1$ si $t \geqslant 6$. De même, la suite de fonctions $(H_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $H(t) = 0$ si $t < 1$ et $H(t) = 1$ si $t \geqslant 1$. En traçant le graphe de G_n et G, on se rend compte que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $||G_n - G||_{\infty,\mathbb{R}} = \left|G_n\left(\frac{5}{6}\right) - G\left(\frac{5}{6}\right)\right| = \left(\frac{5}{6}\right)^n$. Or $\frac{5}{6} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} ||G_n - G||_{\infty,\mathbb{R}} = 0$ et la convergence de la suite $(G_n)_{n \geqslant 1}$ vers G est uniforme sur $\mathbb{R}$. De même, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $||H_n - H||_{\infty,\mathbb{R}} = \left|H_n\left(\frac{1}{6}\right) - H\left(\frac{1}{6}\right)\right| = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ d'où $\lim_{n \to +\infty} ||H_n - H||_{\infty,\mathbb{R}} = 0$ et la convergence de la suite $(H_n)_{n \geqslant 1}$ vers H est uniforme sur $\mathbb{R}$.

11.72 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, comme $(S_N = n) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (N = k,\ X_1 + \cdots + X_k = n)$ (réunion d'évènements incompatibles), on a par σ-additivité $\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k,\ X_1 + \cdots + X_k = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\,\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k = n)$ par indépendance de N et $X_1 + \cdots + X_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Mais $X_1 + \cdots + X_k$ suit d'après le cours la loi binomiale $\mathcal{B}(k,p)$ car $X_1, \cdots, X_k$ sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p. Ainsi, $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k = n) = 0$ si $k < n$ et $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k = n) = \binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n}$ si $k \geqslant n$. De plus, comme N suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, on a par définition $\mathbb{P}(N = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. Ainsi, $\mathbb{P}(S_N = n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\binom{k}{n} p^n (1-p)^{k-n} = \frac{e^{-\lambda}p^n}{n!} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-n)!}(1-p)^{k-n}$ car $\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$. En écrivant, $\mathbb{P}(S_N = n) = \frac{e^{-\lambda}p^n\lambda^n}{n!} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-n}(1-p)^{k-n}}{(k-n)!}$, on reconnaît la série exponentielle et on parvient à $\mathbb{P}(S_N = n) = \frac{e^{-\lambda}p^n\lambda^n}{n!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^n}{n!}$. Au final, S_N suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, comme $(S_N = n) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (N = k,\ X_1 + \cdots + X_k = n)$ (réunion d'évènements incompatibles), on a par σ-additivité $\mathbb{P}(S_N = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k,\ X_1 + \cdots + X_k = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\,\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k = n)$ par indépendance de N et $X_1 + \cdots + X_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Pour $t \in]-1;1[$ (au moins), $G_{S_N}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_N = n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\,\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k = n)t^n \Big)$.
On intervertit d'après l'énoncé : $G_{S_N}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\,\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k = n)t^n \Big)$ qui se transforme en $G_{S_N}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_k = n)t^n \Big) \mathbb{P}(N = k)$ donc $G_{S_N}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} G_{X_1+\cdots+X_k}(t)\,\mathbb{P}(N = k)$. Or, par indépendance mutuelle des $(X_i)_{i \geqslant 1}$, on a $G_{X_1+\cdots+X_k} = \prod_{i=1}^{k} G_{X_i} = G_{X_1}^k$ car toutes les X_k suivent la même loi, d'où la formule $G_{S_N}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\big(G_{X_1}(t)\big)^k = G_N\big(G_X(t)\big)$ qui justifie que $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$.

c. Puisque X_1 et N admettent des espérances finies, les fonctions G_X et G_N sont dérivables en 1 d'après le cours et, par composition, G_{S_N} l'est aussi avec $G'_{S_N}(1) = G'_X(1)G'_N\big(G_X(1)\big) = G'_X(1)G'_N(1)$ car $G_X(1) = 1$. Ainsi, toujours d'après le cours, on obtient $\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X)$ (formule de Wald).

d. Puisque X_1 et N admettent des variances finies, les fonctions G_X et G_N sont deux fois dérivables en 1 d'après le cours et, par composition, G_{S_N} l'est aussi avec $G''_{S_N}(1) = G''_X(1)G'_N\big(G_X(1)\big) + G'_X(1)^2 G''_N\big(G_X(1)\big)$ donc $G''_{S_N}(1) = G''_X(1)G'_N(1) + G'_X(1)^2 G''_N(1)$ toujours parce que $G_X(1) = 1$. Or on sait d'après le cours que $\mathbb{V}(S_N) = G''_{S_N}(1) + G'_{S_N}(1) - G'_{S_N}(1)^2$ donc, avec la question précédente, comme $G'_{S_N}(1) = \mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X)$ et $G''_{S_N}(1) = (\,\mathbb{V}(X) - \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2)\,\mathbb{E}(N) + \mathbb{E}(X)^2(\,\mathbb{V}(N) - \mathbb{E}(N) + \mathbb{E}(N)^2))$, cela donne

$$\mathbb{V}(S_N) = (\,\mathbb{V}(X) - \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2)\,\mathbb{E}(N) + \mathbb{E}(X)^2(\,\mathbb{V}(N) - \mathbb{E}(N) + \mathbb{E}(N)^2)) + \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(N)^2\,\mathbb{E}(X)^2$$

qui, après simplification, revient à $\mathbb{V}(S_N) = \mathbb{V}(X)\,\mathbb{E}(N) + \mathbb{E}(X)^2\,\mathbb{V}(N)$.

11.73 **a.** La matrice BA^T est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et toutes ses colonnes sont proportionnelles à la matrice colonne B donc rang$\,(BA^T) \leqslant 1$. On distingue alors deux cas :

- Si $A = 0$ ou $B = 0$, alors $BA^T = 0$ donc rang$\,(BA^T) = 0$.
- Si $A \neq 0$ et $B \neq 0$, alors en notant $A = (a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et $B = (b_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, $\exists (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $a_i \neq 0$ et $b_j \neq 0$. Or $BA^T = (a_j b_i)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ donc BA^T n'est pas nulle donc pas de rang 0. Ainsi, rang$\,(BA^T) = 1$.

b. Traduisons la condition d'appartenance à E. Soit $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et posons $M = BC^T$, alors $M^2 = BC^TBC^T$. Or $C^TB \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ qui contient le réel $\sum_{k=1}^{n} c_k b_k = \mathrm{Tr}\,(BC^T) = \mathrm{Tr}\,(M)$ (en notant $C = (c_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$). Ainsi, $M^2 = \mathrm{Tr}\,(M)M$, le polynôme $P = X^2 - \mathrm{Tr}\,(M)X$ est donc annulateur de M. Distinguons à nouveau deux cas :

- Si $\mathrm{Tr}\,(M) = 0$, alors X^2 annule M donc $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$ (car M est nilpotente donc non inversible et 0 est valeur propre de M et la seule racine de X^2 est 0) et M est diagonalisable si et seulement si $E_0(M) = \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire si et seulement si $M = 0$.
- Si $\mathrm{Tr}\,(M) \neq 0$, alors $P = X(X - \mathrm{Tr}\,(M))$ annule M et ce polynôme est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$ donc la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On en déduit l'équivalence : M est diagonalisable $\Longleftrightarrow$ $(M = 0$ ou $\mathrm{Tr}\,(M) \neq 0)$. Ce qui peut aussi s'écrire : $(M = 0$ ou M non diagonalisable$)$ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Tr}\,(M) = 0$. Ainsi, $E = \{C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}\,(BC^T) = 0\}$.

$E \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $0 \in E$. Soit $(C_1, C_2) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Tr}\,(B(\lambda C_1 + C_2)^T) = \lambda \mathrm{Tr}\,(BC_1^T) + \mathrm{Tr}\,(BC_2^T) = \lambda.0 + 0 = 0$ donc $\lambda C_1 + C_2 \in E$. Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc lui-même un espace vectoriel.
Traitons deux cas :

- si $B=0$, $E=\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim(E)=n$.
- si $B\neq 0$, $\varphi:\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(C)=\mathrm{Tr}\,(BC^T)$ est une forme linéaire non nulle car $\varphi(B)=\mathrm{Tr}\,(BB^T)=||B||^2>0$ et $E=\mathrm{Ker}(\varphi)$ donc E est un hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\dim(E)=n-1$.

c. D'après ce qui précède, BX^T diagonalisable si et seulement si $BX^T=0$ ou $\mathrm{Tr}\,(BX^T)\neq 0$. Or comme $B\neq 0$ et $X\neq 0$, on ne peut pas avoir $BX^T=0$. Ainsi, BX^T diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}\,(BX^T)=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\neq 0$.

Traitons deux cas :

- si n est impair, comme tous les X_k sont à valeurs ± 1, donc impaires, $\mathrm{Tr}\,(BX^T)$ impair donc on ne peut pas avoir $\mathrm{Tr}\,(BX^T)=0$ et $U=\Omega$ donc $\mathbb{P}(U)=1$.
- si $n=2p$ est pair, les variables aléatoires $B_k=\dfrac{X_k+1}{2}$ suivent des lois de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et sont mutuellement indépendantes donc $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}B_k=\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(BX^T)$ suit la loi binomiale de paramètres $n,\dfrac{1}{2}$ donc $\mathbb{P}(\mathrm{Tr}\,(BX^T)=0)=\mathbb{P}(S_n=p)=\mathbb{P}(\overline{U})=\dbinom{2p}{p}\left(\dfrac{1}{2}\right)^p\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2p-p}=\dbinom{2p}{p}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2p}$.
  On en déduit donc que $\mathbb{P}(U)=1-\mathbb{P}(\overline{U})=1-\dbinom{2p}{p}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2p}$.

11.74 **a.** Pour $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$ tel que $i\neq j$, on note l'évènement $R_{i,j}=$"les points A_i et A_j sont reliés". Alors, par définition $(X_1=1)=\bigcap\limits_{j=2}^{n}\overline{R_{1,j}}$ et, par hypothèse, les évènements $R_{i,j}$ sont indépendants mutuellement donc $\mathbb{P}(X_1=1)=\prod\limits_{j=2}^{n}\mathbb{P}(\overline{R_{i,j}})=(1-p_n)^{n-1}$. Comme X_1 ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, on a aussi $\mathbb{P}(X_1=0)=1-\mathbb{P}(X_1=1)=1-(1-p_n)^{n-1}$ donc X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $(1-p_n)^{n-1}$. Par symétrie entre les différents points, toutes les variables aléatoires X_i suivent la même loi que X_1. Ainsi, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)=n(1-p_n)^{n-1}$.

S_n représente le nombre de points isolés dans le graphe.

b. Méthode 1 : Comme S_n est une variable aléatoire réelle positive, d'après l'inégalité de Markov avec $\varepsilon=1$, $\mathbb{P}(S_n\geqslant 1)\leqslant\dfrac{\mathbb{E}(S_n)}{1}=n(1-p_n)^{n-1}$ et $(S_n\geqslant 1)$ est l'évènement "il y a au moins un point isolé".

Méthode 2 : $(S_n\geqslant 1)=\overline{(S_n=0)}=\overline{\bigcap\limits_{k=1}^{n}(X_k=0)}=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\overline{(X_k=0)}=\bigcup\limits_{k=1}^{n}(X_k=1)$ donc, par sous-additivité, on a à nouveau la majoration $\mathbb{P}(S_n\geqslant 1)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k=1)=n(1-p_n)^{n-1}$.

c. Méthode 1 : l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire Y qui admet bien un moment d'ordre 2 donne, avec $\varepsilon=|\mathbb{E}(Y)|>0$, la majoration $\mathbb{P}(|Y-\mathbb{E}(Y)|\geqslant|\mathbb{E}(Y)|)\leqslant\dfrac{\mathbb{V}(Y)}{\mathbb{E}(Y)^2}$. Or $(Y=0)\subset(|Y-\mathbb{E}(Y)|\geqslant|\mathbb{E}(Y)|)$ donc, par croissance de $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}(Y=0)\leqslant\mathbb{P}(|Y-\mathbb{E}(Y)|\geqslant|\mathbb{E}(Y)|)\leqslant\dfrac{\mathbb{V}(Y)}{\mathbb{E}(Y)^2}$.

Méthode 2 : en notant $Y(\Omega)=\{y_i\mid i\in\mathbb{N}\}$ (a fortiori c'est plus simple si $Y(\Omega)$ est fini), on a par la formule du transfert $\mathbb{V}(Y)=\mathbb{E}((Y-\mathbb{E}(Y))^2)=\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=y_k)(y_k-\mathbb{E}(Y))^2$. Tous ces termes sont positifs, ainsi $\mathbb{V}(Y)$ est supérieur au terme correspond au cas où $y_i=0$ (si $0\notin Y(\Omega)$ alors $\mathbb{P}(Y=0)=0$ et c'est clair), c'est-à-dire $\mathbb{V}(Y)\geqslant\mathbb{P}(Y=0)(0-\mathbb{E}(Y))^2=\mathbb{P}(Y=0)\,\mathbb{E}(Y)^2$ donc $\mathbb{P}(Y=0)\leqslant\dfrac{\mathbb{V}(Y)}{\mathbb{E}(Y)^2}$ car $\mathbb{E}(Y)\neq 0$ par hypothèse.

d. $\mathbb{E}(S_n) = n(1-p_n)^{n-1} = \exp\left(\ln(n) + (n-1)\ln\left(1 - c\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$ or, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$, on a $(n-1)\ln\left(1-c\frac{\ln(n)}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -cn\frac{\ln(n)}{n} = -c\ln(n)$ donc $\ln(n)+(n-1)\ln\left(1-c\frac{\ln(n)}{n}\right) \underset{+\infty}{=} (1-c)\ln(n)+o(\ln(n))$ ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty}\left(\ln(n) + (n-1)\ln\left(1 - c\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) = -\infty$ car $c > 1$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(S_n) = 0$ donc, avec **b.** et par encadrement, il vient $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n \geqslant 1) = 0$ donc, comme $\mathbb{P}(S_n = 0) = 1 - \mathbb{P}(S_n \geqslant 1)$, on trouve $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = 1$. On n'a presque sûrement aucun sommet isolé quand n tend vers $+\infty$ si $c > 1$.

e. Soit $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, X_iX_j suit une loi de Bernoulli car X_iX_j ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. Comme $(X_iX_j = 1) = \overline{R_{i,j}} \cap \bigcap_{\substack{k=1\\k\notin\{i,j\}}}^{n} \overline{R_{i,k}} \cap \bigcap_{\substack{k=1\\k\notin\{i,j\}}}^{n} \overline{R_{j,k}}$, par indépendance mutuelle à nouveau, on a $\mathbb{P}(X_iX_j = 1) = (1-p_n)^{2n-3}$. Or $S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_iX_j$ avec $X_k^2 = X_k$ et les X_iX_j qui suivent la même loi dès que $i \neq j$, donc $\mathbb{E}(S_n^2) = n(1-p_n)^{n-1} + 2\binom{n}{2}(1-p_n)^{2n-3}$. Avec la formule de König-Huyghens, $\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{E}(S_n^2) - \mathbb{E}(S_n)^2 = n(1-p_n)^{n-1} + n(n-1)(1-p_n)^{2n-3} - n^2(1-p_n)^{2n-2}$ donc, en factorisant par rapport aux puissances de $1-p_n$, $\mathbb{V}(Z) = n(1-p_n)^{n-1}(1-(1-p_n)^{n-2}) + n^2p_n(1-p_n)^{2n-3}$.

Comme $(1-p_n)^{n-1} \underset{+\infty}{\sim} n^{-c}$ et $\lim_{n\to+\infty}(1-p_n) = 1$, $(1-p_n)^{2n-3} = \frac{(1-p_n)^{2n-2}}{1-p_n} \underset{+\infty}{\sim} n^{-2c}$ donc on obtient $n^2p_n(1-p_n)^{2n-3} \underset{+\infty}{\sim} cn^{1-2c}\ln(n)$. De plus, comme on a $\lim_{n\to+\infty}(1-(1-p_n)^{n-2}) = 1$, il vient l'équivalent $n(1-p_n)^{n-1}(1-(1-p_n)^{n-2}) \underset{+\infty}{\sim} n^{1-c}$ d'où $n^2p_n(1-p_n)^{2n-3} \underset{+\infty}{=} o(n^{1-c})$ ce qui prouve que $\mathbb{V}(S_n) \underset{+\infty}{\sim} n^{1-c}$. Par conséquent, $\frac{\mathbb{V}(S_n)}{\mathbb{E}(S_n)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{1-c}}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\mathbb{E}(S_n)^2} = 0$ si $c < 1$. D'après **c.** et par encadrement, on a donc $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = 0$. Il y a presque sûrement au moins un point isolé si $c < 1$ quand n tend vers $+\infty$ (en fait il y en a beaucoup puisque $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(S_n) = +\infty$).

f. $\mathbb{E}(S_n) = n(1-p_n)^{n-1} = n\exp\left((n-1)\ln\left(1 - c\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)$ or, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$, on a le développement suivant : $(n-1)\ln\left(1-c\frac{\ln(n)}{n}\right) \underset{+\infty}{=} n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(-c\frac{\ln(n)}{n} + O\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} -c\ln(n) + o(1)$. Ainsi, $\exp\left((n-1)\ln\left(1 - c\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} e^{-c\ln(n)+o(1)} \underset{+\infty}{=} n^{-c}e^{o(1)} \underset{+\infty}{\sim} n^{-c}$ donc $\mathbb{E}(S_n) \underset{+\infty}{\sim} n^{1-c}$. Ainsi, il vient $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(S_n) = +\infty$ si $c < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(S_n) = 0$ si $c > 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(S_n) = 1$ si $c = 1$.

11.75 **a.** Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on a $S(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Soit $k \geqslant 2$, comme $(S = k) = \bigcup_{i=1}^{k-1}(X = i, Y = k-i)$ (réunion incompatible) et que X et Y sont indépendantes par hypothèse, on en déduit la relation suivante : $\mathbb{P}(S = k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = k-i) = \sum_{i=1}^{k-1} p(1-p)^{i-1}p(1-p)^{k-i-1}$. Ainsi, $\mathbb{P}(S = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$ (on dit que S suit une loi binomiale négative ou loi de Polya).

b. Si $k = 1$, $(S = 1) = \emptyset$ donc la loi de X sachant $(S = 1)$ n'est pas définie.

Pour $k \geqslant 2$ et $i \in \mathbb{N}^*$, comme $S = X + Y$ et que $Y \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X = i \mid S = k) = 0$ si $i > k-1$. Par contre, si $i \in [\![1;k-1]\!]$, $\mathbb{P}(X = i \mid S = k) = \frac{\mathbb{P}(X = i, S = k)}{\mathbb{P}(S = k)}$ or $(X = i, S = k) = (X = i, Y = k-i)$ donc $\mathbb{P}(X = i, S = k) = \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = k-i) = p(1-p)^{i-1}p(1-p)^{k-i-1} = p^2(1-p)^{k-2}$ comme avant. Par conséquent, $\mathbb{P}(X=i \mid S=k)=\mathbb{P}_{(S=k)}(X=i)=\dfrac{p^2(1-p)^{k-2}}{(k-1)p^2(1-p)^{k-2}}=\dfrac{1}{k-1}$ donc la loi de X sachant $(S=k)$ est la loi uniforme sur $[\![1;k-1]\!]$.

c. C'est quasiment du cours : Z suit la loi géométrique de paramètre p. On le montre par récurrence en posant $\mathcal{P}(n)=$ "$\mathbb{P}(Z>n)=(1-p)^n$". Comme $Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(0)$ est vrai. Si $n\in\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ est vrai, alors $\mathbb{P}(Z>n+1)=\mathbb{P}(Z>n+1|Z>n)\,\mathbb{P}(Z>n)=(1-p)(1-p)^n$ par hypothèse de récurrence donc $\mathbb{P}(Z>n+1)=(1-p)^{n+1}$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai. Par principe de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(Z>n)=(1-p)^n$ donc, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z=n)=\mathbb{P}(Z>n-1)-\mathbb{P}(Z>n)=(1-p)^{n-1}-(1-p)^n=p(1-p)^{n-1}$ ce qui prouve que Z suit la loi géométrique de paramètre p.

d. Comme $(X+Y=Z)=\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty}(X+Y=k,Z=k)$ (réunion incompatible) et que $X+Y$ et Z sont indépendantes par le lemme des coalitions, $\mathbb{P}(X+Y=Z)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X+Y=k)\,\mathbb{P}(Z=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)p^2(1-p)^{k-2}p(1-p)^{k-1}$. Ainsi, $\mathbb{P}(X+Y=Z)=p^3\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)(1-p)^{2k-3}=p^3(1-p)\sum_{m=1}^{+\infty}m(1-p)^{2(m-1)}$ si $m=k-1$. Or on sait que $\forall x\in]-1;1[,\ \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}x^m=\frac{1}{1-x}$ donc, en dérivant cette série entière sur son intervalle ouvert de convergence, $\forall x\in]-1;1[,\ \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}mx^{m-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$. Par conséquent, $\mathbb{P}(X+Y=Z)=p^3(1-p)\dfrac{1}{(1-(1-p)^2)^2}=\dfrac{p(1-p)}{(2-p)^2}$.

11.76 **a.** Notons, pour tout client numéro $i\in[\![1;n]\!]$ et toute vague d'appels $j\in\mathbb{N}^*$, l'évènement $R_{i,j}=$ "le client numéro i répond au cours de la vague j" (avec pour convention que $R_{i,j}=\emptyset$ si le client i a déjà répondu au cours des précédentes vagues d'appels donc n'est pas appelé lors de la vague j).

Alors, par exemple, $(X_1=n,X_2=n)=\emptyset$ donc $\mathbb{P}(X_1=n,X_2=n)=0$ alors que $(X_1=n)=\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}R_{i,1}$ (tous les clients répondent lors de la vague 1) donc, par indépendance entre les comportements des clients, $\mathbb{P}(X_1=n)=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(R_{i,1})=p^n$ et $(X_2=n)=\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n}(\overline{R_{i,1}}\cap R_{i,2})$ donc, toujours par indépendance entre les clients, comme $\mathbb{P}(\overline{R_{i,1}}\cap R_{i,2})=\mathbb{P}(\overline{R_{i,1}})\times\mathbb{P}(R_{i,2}|\overline{R_{i,1}})=(1-p)p$, on a $\mathbb{P}(X_2=n)=p^n(1-p)^n\neq 0$. Par conséquent, $\mathbb{P}(X_1=n,X_2=n)\neq\mathbb{P}(X_1=n)\,\mathbb{P}(X_2=n)$.

Bien sûr, les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

b. • Fixons le numéro $i\in[\![1;n]\!]$ d'un client, alors Y_i est le rang du premier succès dans une suite d'expériences indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p (le client i répond à la vague i) donc, d'après le cours, Y_i suit la loi géométrique de paramètre p.

• X_1 suit d'après le cours la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par indépendance des réponses des n personnes car X_i compte le nombre de succès dans une répétition (les n appels) d'expériences indépendantes (le client i répond au premier appel) suivant le loi de Bernoulli de paramètre p.

• La famille $((X_1=j))_{0\leqslant j\leqslant n}$ constitue un système complet d'évènements donc, par la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(X_2=k)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}(X_1=j,X_2=k)$ pour tout pour $k\in[\![0;n]\!]$ car $X_2(\Omega)=[\![0;n]\!]$. Comme on appelle $n-X_1$ clients lors de la deuxième vague d'appels, $\mathbb{P}(X_1=j,X_2=k)=0$ si $n-j<k$ et, comme la loi de X_2 sachant $(X_1=j)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n-j,p)$ pour les mêmes raisons que précédemment si $n-j\geqslant k$, on a

$\mathbb{P}(X_2=k|X_1=j)=\binom{n-j}{k}p^k(1-p)^{n-j-k}$. Comme $\binom{n-j}{k}\binom{n}{j}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{j}$ pour $j\in[\![0;n-k]\!]$, on a $\mathbb{P}(X_2=k)=\sum\limits_{j=0}^{n-k}\binom{n-j}{k}p^k(1-p)^{n-j-k}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}=\binom{n}{k}(1-p)^kp^k\sum\limits_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}((1-p)^2)^{n-j-k}p^j$ donc $\mathbb{P}(X_2=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^k((1-p)^2+p)^{n-k}=\binom{n}{k}(p(1-p))^k(1-p(1-p))^{n-k}$: $X_2\sim\mathcal{B}(n,p(1-p))$.

c. Par construction, pour $k\geqslant 3$, on a $X_k(\Omega)=[\![0;n]\!]$ et, si $j\in[\![0;n]\!]$, pour que l'on ait $X_k=j$, il est nécessaire et suffisant qu'exactement j clients vérifient $Y_i=k$. On a donc $X_k=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{(Y_i=k)}$ et les variables aléatoires $(\mathbb{1}_{(Y_i=k)})_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont indépendantes par hypothèse (les clients sont indépendants) et, comme $\mathbb{P}(\mathbb{1}_{(Y_i=k)}=1)=\mathbb{P}(Y_i=k)=p(1-p)^{k-1}$, les variables aléatoires $\mathbb{1}_{(Y_1=k)},\cdots,\mathbb{1}_{(Y_n=k)}$ suivent toutes la loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(p(1-p)^{k-1})$. D'après le cours, X_k suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p(1-p)^{k-1})$.

d. Par définition, pour $k\in\mathbb{N}^*$, on a $S_k(\Omega)=[\![0;n]\!]$ et, si $j\in[\![0;n]\!]$, pour que l'on ait $S_k=j$, il est nécessaire et suffisant qu'exactement j clients vérifient $Y_i\leqslant k$ (eus au téléphone avant l'appel k). Ainsi, comme avant, $S_k=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{(Y_i\leqslant k)}$ et les variables aléatoires $(\mathbb{1}_{(Y_i\leqslant k)})_{1\leqslant i\leqslant n}$ suivent la loi de BERNOULLI de paramètre $1-(1-p)^k$ d'après la question **b.** puisque Y_i suit la loi géométrique de paramètre p et qu'on a donc $\mathbb{P}(\mathbb{1}_{(Y_i\leqslant k)}=1)=\mathbb{P}(Y_i\leqslant k)=1-\mathbb{P}(Y_i>k)=1-(1-p)^k$ et elles sont indépendantes.

D'après le cours, S_k suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,1-(1-p)^k)$.

e. <u>Méthode 1</u> : par définition de la variable aléatoire N, on a $N=Max(Y_1,\cdots,Y_n)$ de sorte que, pour $k\in\mathbb{N}^*$, on a $(N\leqslant k)=\bigcap\limits_{i=1}^{n}(Y_i\leqslant k)$ donc, par indépendance entre les personnes appelées, on parvient à la relation $\mathbb{P}(N\leqslant k)=\prod\limits_{i=1}^{n}\mathbb{P}(Y_i\leqslant k)=(1-(1-p)^k)^n$. Comme, pour $k\in\mathbb{N}^*$, on a $(N\leqslant k)=(N=k)\sqcup(N\leqslant k-1)$ (incompatibles), on a $\mathbb{P}(N=k)=\mathbb{P}(N\leqslant k)-\mathbb{P}(N\leqslant k-1)=(1-(1-p)^k)^n-(1-(1-p)^{k-1})^n$.

<u>Méthode 2</u> : on a aussi $(N\leqslant k)=(S_k=n)$ donc $\mathbb{P}(N\leqslant k)=(1-(1-p)^k)^n$ avec la question **d.** mais comme $(N=k)=(S_k=n)\setminus(S_{k-1}=n)$ (on a contacté tous les clients à la vague k mais pas avant) avec $(S_{k-1}=n)\subset(S_k=n)$ donc $\mathbb{P}(N=n)=\mathbb{P}(S_k=n)-\mathbb{P}(S_{k-1}=n)=(1-(1-p)^k)^n-(1-(1-p)^{k-1})^n$.

• Comme N est à valeurs dans $\mathbb{N}$ (car $N(\Omega)=\mathbb{N}^*$), d'après le cours, N admet une espérance finie si et seulement $\sum\limits_{k\geqslant 0}\mathbb{P}(N>k)$ converge. Or $\mathbb{P}(N>k)=1-\mathbb{P}(N\leqslant k)=1-(1-(1-p)^k)^n$ qui devient $\mathbb{P}(N>k)=1-\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}((1-p)^k)^j=\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\binom{n}{j}(1-p)^{kj}$. Comme toutes les séries géométriques $\sum\limits_{k\geqslant 0}(1-p)^{kj}$ convergent pour $j\in[\![1;n]\!]$ car leurs raisons $(1-p)^j$ sont dans $]-1;1[$, par somme d'un nombre fini de séries convergentes, on a la convergence de $\sum\limits_{k>0}\mathbb{P}(N>k)$ donc N est d'espérance finie et on a enfin la relation $\mathbb{E}(N)=\sum\limits_{j=1}^{n}\left((-1)^{j+1}\binom{n}{j}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{kj}\right)=\sum\limits_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\frac{(-1)^{j+1}}{1-(1-p)^j}$.

11.77 **a.** Comme les variables aléatoires $X_1,\cdots,X_n$ sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de BERNOULLI de paramètre $p\in]0;1[$, d'après le cours, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$ suit la loi binomiale de paramètre n et p.

b. Soit $x\in]-1;1[$, on sait que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$. Dérivons k fois cette série entière sur son intervalle ouvert de convergence, on obtient $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ (dérivée facile par récurrence). En divisant par $k!$, on arrive à $\forall x \in]-1;1[$, $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}x^{n-k} = \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}$ donc $\sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dbinom{n}{k} x^{n-k} = \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

c. Pour $k \in \mathbb{N}$, $(Y=k) = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} (N=n, S_n=k)$ (réunion incompatible) ainsi, par indépendance mutuelle et σ-additivité, il vient $\mathbb{P}(Y=k) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\,\mathbb{P}(S_n=k)$. On distingue deux cas :

- Si $k=0$, on obtient donc $\mathbb{P}(Y=0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\,\mathbb{P}(S_n=0) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}(1-p)^n$ donc $\mathbb{P}(Y=0) = p(1-p)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{2(n-1)} = \dfrac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \dfrac{1-p}{2-p}$.
- Si $k \geqslant 1$, comme $\mathbb{P}(S_n=k)=0$ si $n<k$, on a $\mathbb{P}(Y=k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\,\mathbb{P}(S_n=k)$. Avec **a.**, il vient $\mathbb{P}(Y=k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = (1-p)^{k-1}p^{k+1}\sum\limits_{n=k}^{+\infty}\dbinom{n}{k}(1-p)^{2n-2k}$ donc, d'après la question **b.**, $\mathbb{P}(Y=k) = (1-p)^{k-1}p^{k+1} \times \dfrac{1}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} = \dfrac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}$.

Pour $m \geqslant 1$, comme $(Y \geqslant m) = \bigcup\limits_{k=m}^{+\infty} (Y=k)$ (réunion incompatible), $\mathbb{P}(Y \geqslant m) = \dfrac{1}{(2-p)^2}\sum\limits_{k=m}^{+\infty}\left(\dfrac{1-p}{2-p}\right)^{k-1}$ donc $\mathbb{P}(Y \geqslant m) = \dfrac{1}{(2-p)^2}\left(\dfrac{1-p}{2-p}\right)^{m-1} \times \dfrac{1}{1-\frac{1-p}{2-p}} = \dfrac{1}{2-p}\left(\dfrac{1-p}{2-p}\right)^{m-1}$. Alors, la série $\sum\limits_{m\geqslant 1}\mathbb{P}(Y \geqslant m)$ converge donc Y admet une espérance finie et $\mathbb{E}(Y) = \sum\limits_{m=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Y \geqslant m) = \dfrac{1}{2-p}\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1-p}{2-p}\right)^{m-1} = 1$!!

11.78 Énoncé mal posé : tout se passe comme si on avait une infinité de lapins et qu'on prenait les lapins un par un sans se soucier des lapins déjà pris, la probabilité d'être un mâle reste égale à $\dfrac{1}{2}$.

a. Par construction, $M(\Omega) \subset [\![0;2n]\!]$. Par indépendance mutuelle entre les lapins et comme le fait de tomber sur un mâle suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ par hypothèse, M suit la loi binomiale de paramètre n et $\dfrac{1}{2}$ de sorte que $\forall k \in [\![0;2n]\!]$, $\mathbb{P}(M=k) = \dbinom{2n}{k}\dfrac{1}{2^{2n}}$ (N n'intervient pas).

b. Clairement, $C = \mathrm{Min}(M, 2n-M)$ car il y a M mâles et $2n-M$ femelles parmi les lapins. Ainsi, $C(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et on distingue deux cas selon la valeur de $k \in [\![0;n]\!]$:

- si $k=n$, alors $(C=n)=(M=n)$ donc $\mathbb{P}(C=n) = \dbinom{2n}{n}\dfrac{1}{2^{2n}}$.
- si $k<n$, $(C=k) = (M=k)\cup(M=2n-k)$ (incompatible) : $\mathbb{P}(C=k) = 2\,\mathbb{P}(M=k) = \dbinom{2n}{k}\dfrac{1}{2^{2n-1}}$.

c. Comme C est bornée, C admet une espérance finie et, par définition, $\mathbb{E}(C) = \sum\limits_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(C=k)$ donc, avec la question précédente, on a $\mathbb{E}(C) = n\dbinom{2n}{n}\dfrac{1}{2^{2n}} + \sum\limits_{k=1}^{n-1}k\dbinom{2n}{k}\dfrac{1}{2^{2n-1}}$. Or $k\dbinom{2n}{k} = (2n)\dbinom{2n-1}{k-1}$ donc il vient $\mathbb{E}(C) = n\dbinom{2n}{n}\dfrac{1}{2^{2n}} + \dfrac{2n}{2^{2n-1}}\sum\limits_{j=0}^{n-2}\dbinom{2n-1}{j}$ en ayant posé $j=k-1$. Si on pose $S_n = \sum\limits_{j=0}^{n-2}\dbinom{2n-1}{j}$, alors $2^{2n-1} = \sum\limits_{j=0}^{2n-1}\dbinom{2n-1}{j} = \sum\limits_{j=0}^{n-2}\dbinom{2n-1}{j} + \dbinom{2n-1}{n-1} + \dbinom{2n-1}{n} + \sum\limits_{j=n+1}^{2n-1}\dbinom{2n-1}{j}$. Or on sait que

$\binom{2n-1}{j} = \binom{2n-1}{2n-1-j}$ donc $2^{2n-1} = 2S_n + 2\binom{2n-1}{n}$ et $S_n = 2^{2n-2} - \binom{2n-1}{n}$. Par conséquent, $\mathbb{E}(C) = n\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} + \frac{2n}{2^{2n-1}}\left(2^{2n-2} - \binom{2n-1}{n}\right) = n - \frac{n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$ (après calculs car $\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n}$).

Bien sûr que $\mathbb{E}(C) < n$ car $C(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$. Avec Stirling, on a $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{2n}}{(2\pi n)n^{2n}e^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$ donc $n - \mathbb{E}(C) = \frac{n}{2^{2n}}\binom{2n}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}$. Cela peut s'écrire aussi $\mathbb{E}(C) \underset{+\infty}{=} n - \sqrt{\frac{n}{\pi}} + o(\sqrt{n})$.

11.79 **a.** Par construction, $Y = \mathrm{Min}(X_1, X_2)$ donc, pour $k \in \mathbb{N}$, $(Y > k) = (X_1 > k) \cap (X_2 > k)$. Or on a $(X_1 > k) = \bigcup_{i=k+1}^{+\infty} (X_1 = i)$ (réunion incompatible) donc $\mathbb{P}(X_1 > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} (1-p)p^i = (1-p) \times \frac{p^{k+1}}{1-p} = p^{k+1}$ par σ-additivité. Comme X_2 suit la même loi que X_1, on a aussi $\mathbb{P}(X_2 > k) = p^{k+1}$. On suppose X_1 et X_2 indépendantes donc $\mathbb{P}(Y > k) = \mathbb{P}(X_1 > k)\mathbb{P}(X_2 > k) = p^{2(k+1)}$ (marche encore si $k = -1$). Ainsi, comme $(Y \leqslant k) = \overline{(Y > k)}$, on a $\mathbb{P}(Y \leqslant k) = 1 - \mathbb{P}(Y > k) = 1 - p^{k+1}$. De plus, comme $(Y > k-1) = (Y = k) \sqcup (Y > k)$, on en déduit finalement la loi de Y, $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y > k-1) - \mathbb{P}(Y > k) = p^{2k} - p^{2(k+1)} = (1-p^2)p^{2k}$.

b. Par construction encore, $Z = Y + X_3$ (il faut le temps que A_3 accède au guichet et le temps qu'elle soit servie). On suppose à nouveau Y et X_3 indépendantes (ou plutôt X_1, X_2, X_3 mutuellement indépendantes et le lemme des coalitions). Si $n \in \mathbb{N}$, $(Z = n) = \bigcup_{k=0}^{n} (Y = k, X_3 = n-k)$ (évènements incompatibles) donc, par indépendance de Y et X_3, il vient $\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} (1-p^2)(p^2)^k(1-p)p^{n-k}$ donc, au final, $\mathbb{P}(Z = n) = (1-p^2)(1-p)\sum_{k=0}^{n} p^{n+k} = (1-p^2)(1-p)p^n\frac{1-p^{n+1}}{1-p} = (1-p^2)p^n(1-p^{n+1})$.

c. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X_3)$. Or $X_3 + 1 \sim \mathcal{G}(1-p)$ par définition donc, d'après le cours, $\mathbb{E}(X_3 + 1) = \frac{1}{1-p}$ d'où $\mathbb{E}(X_3) = \frac{p}{1-p}$. De même, d'après la question **a.**, $Y + 1 \sim \mathcal{G}(1-p^2)$ donc $\mathbb{E}(Y+1) = \frac{1}{1-p^2}$ et $\mathbb{E}(Y) = \frac{p^2}{1-p^2}$. Par conséquent, $\mathbb{E}(Z) = \frac{p}{1-p} + \frac{p^2}{1-p^2} = \frac{p(1+p)+p^2}{1-p^2} = \frac{p(1+2p)}{1-p^2}$.

On pouvait aussi utiliser la loi de Z vue en **b.** et la définition $\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(Z = n)$ mais cela fait intervenir des calculs de somme de série entière plus délicats.

11.80 **a.** Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $(X > k) = \bigcup_{i=k+1}^{+\infty} (X = i)$ (réunion d'évènements incompatibles) donc, par σ-additivité, $\mathbb{P}(X > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} = \frac{p(1-p)^k}{1-(1-p)} = (1-p)^k$. Par construction, $\forall k \geqslant 0,\ (M > k) = (X > k) \cap (Y > k)$. Par indépendance de X et Y, on en déduit que $\mathbb{P}(M > k) = \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(Y > k) = (1-p)^{2k}$. Comme, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}(M > k-1) - \mathbb{P}(M > k)$ car on a l'égalité $(M = k) = (M > k-1) \setminus (M > k)$ et l'inclusion $(M > k) \subset (M > k-1)$, on en déduit la loi de M : $\mathbb{P}(M = k) = (1-p)^{2(k-1)} - (1-p)^{2k} = p(2-p)(1-p)^{2(k-1)}$. La variable aléatoire M suit donc la loi géométrique de paramètre $p(2-p) = 1-(1-p)^2$.

b. • $(D = 0, M = m) = (X = m, Y = m)$ donc, par indépendance, $\mathbb{P}(D = 0, M = m) = p^2(1-p)^{2m-2}$.

• Si $d \geqslant 1$, $(D = d, M = m) = (X = m, Y = m+d) \cup (X = m+d, Y = m)$ (réunion disjointe) donc toujours par indépendance et additivité, il vient $\mathbb{P}(D = d, M = m) = 2p^2(1-p)^{2m+d-2}$.

c. • $(D=0)=\bigcup_{m=1}^{+\infty}(D=0,M=m)$ (réunion d'évènements incompatibles) donc, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(D=0)=\sum_{m=1}^{+\infty}p^2(1-p)^{2m-2}=\dfrac{p^2}{1-(1-p)^2}=\dfrac{p}{2-p}$.

• Si $d\geqslant 1$, $(D=d)=\bigcup_{m=1}^{+\infty}(D=0,M=m)$ donc, avec les mêmes arguments que ci-dessus, on parvient à $\mathbb{P}(D=d)=\sum_{m=1}^{+\infty}2p^2(1-p)^{2m+d-2}=\dfrac{2p^2(1-p)^d}{1-(1-p)^2}=\dfrac{2p(1-p)^d}{2-p}$.

Ainsi, si $d=0$, on a $\mathbb{P}(M=m|D=0)=\dfrac{\mathbb{P}(D=0,M=m)}{\mathbb{P}(D=0)}=\dfrac{p^2(1-p)^{2m-2}}{\dfrac{p}{2-p}}=p(2-p)(1-p)^{2(m-1)}$ et, si $d\geqslant 1$, il vient $\mathbb{P}(M=m|D=d)=\dfrac{\mathbb{P}(D=d,M=m)}{\mathbb{P}(D=d)}=\dfrac{2p^2(1-p)^{2m+d-2}}{\dfrac{2p(1-p)^d}{2-p}}=p(2-p)(1-p)^{2(m-1)}$.

Que d soit nul ou pas, on a donc d'après la question **b.** la relation $\mathbb{P}(M=m|D=d)=\mathbb{P}(M=m)$. On en déduit que les variables aléatoires D et M sont indépendantes.

d. Soit $m\in\mathbb{N}^*$, comme D et M sont indépendantes, on a $\mathbb{P}(D=0,M=m)=\mathbb{P}(D=0)\,\mathbb{P}(M=m)$. Or $(D=0,M=m)=(X=m,Y=m)$ donc, par indépendance de X et Y, on obtient aussi la relation $\mathbb{P}(D=0)\,\mathbb{P}(M=m)=\mathbb{P}(X=m)\,\mathbb{P}(Y=m)=\mathbb{P}(X=m)^2$ car X et Y suivent la même loi. De même, comme on a vu en **c.** que $(D=1,M=m)=(X=m,Y=m+1)\cup(X=m+1,Y=m)$, il vient $\mathbb{P}(D=1)\,\mathbb{P}(M=m)=\mathbb{P}(X=m)\,\mathbb{P}(X=m+1)$. De plus, comme $(D=0)=\bigcup_{m=1}^{+\infty}(X=m,Y=m)$, on a encore $\mathbb{P}(D=0)=\sum_{m=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=m)^2>0$. Ainsi, la relation $\mathbb{P}(D=0)\,\mathbb{P}(M=m)=\mathbb{P}(X=m)^2$ et l'hypothèse de l'énoncé montrent que $\forall m\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=m)>0$.

Par conséquent, comme $(D=1)=\Big(\bigcup_{m=1}^{+\infty}(X=m,Y=m+1)\Big)\cup\Big(\bigcup_{m=1}^{+\infty}(X=m+1,Y=m)\Big)$, on a à nouveau $\mathbb{P}(D=1)=2\sum_{m=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=m)\,\mathbb{P}(X=m+1)>0$. Ainsi, en mixant les deux relations, on a $\mathbb{P}(X=m+1)=\dfrac{\mathbb{P}(D=1)\,\mathbb{P}(M=m)}{2\,\mathbb{P}(X=m)}=\dfrac{\mathbb{P}(D=1)}{2\,\mathbb{P}(X=0)}\mathbb{P}(X=m)$ et la suite $(\mathbb{P}(X=m))_{m\geqslant 1}$ est géométrique de raison $q=\dfrac{\mathbb{P}(D=1)}{2\,\mathbb{P}(X=0)}>0$ et on sait qu'alors $\forall m\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=m)=q^{m-1}\,\mathbb{P}(X=1)$.

Si on avait $q\geqslant 1$, cette suite ne tendrait pas vers 0 ce qui est absurde car la série $\sum_{m\geqslant 1}\mathbb{P}(X=m)$ converge. Ainsi, $q\in]0;1[$. Posons $p=1-q\in]0;1[$.

Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $\sum_{m=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=m)=1$ donc $\mathbb{P}(X=1)\times\dfrac{1}{1-q}=1$ donc $p=\mathbb{P}(X=1)$ et on en déduit que $\forall m\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=m)=p(1-p)^{m-1}$: X et Y suivent donc la loi géométrique de paramètre p.

11.81 **a.** Comme X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, $Z(\Omega)\subset\mathbb{N}$. Pour $k\in\mathbb{N}$, $(Z=k)=\bigcup_{i=0}^{k}(X=i,Y=k-i)$ (réunion incompatible) donc $(Z=k)$ par réunion d'intersection d'évènements. Par conséquent, Z est une variable aléatoire et $\mathbb{P}(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=k-i)$ car X et Y sont indépendantes. Ainsi, on obtient $\mathbb{P}(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\dfrac{e^{-\mu}\mu^{k-i}}{(k-i)!}=\dfrac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i}=\dfrac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^k}{k!}$ par le binôme de Newton.

On en déduit que Z suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda+\mu$.

b. Pour $n\in\mathbb{N}$, si $(Z=n)$, comme Y est positive, on a forcément $X\in[\![0;n]\!]$. Soit $i\in[\![0;n]\!]$, alors $\mathbb{P}(X=i|Z=n)=\dfrac{\mathbb{P}(X=i,Z=n)}{\mathbb{P}(Z=n)}$. Or $(X=i,Z=n)=(X=i,Y=n-i)$ donc, toujours par indépendance de X et Y, $\mathbb{P}(X=i,Y=n-i)=\mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=n-i)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\dfrac{e^{-\mu}\mu^{n-i}}{(n-i)!}$ ce qui donne la loi de X sachant $(Z=n)$: $\mathbb{P}_{(Z=n)}(X=i)=\mathbb{P}(X=i|Z=n)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\dfrac{e^{-\mu}\mu^{n-i}}{(n-i)!}\times\dfrac{n!}{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}=\dbinom{n}{i}\Big(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big)^i\Big(\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\Big)^{n-i}$. Ainsi, la loi de X sachant $(Z=n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\Big(n,\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big)$.

11.82 **a.** Comme $X(\Omega)\subset\mathbb{N}$ par hypothèse, $\mathbb{P}(\Omega)=1=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)=\dfrac{a}{1-(1/e)}$ donc $a=\dfrac{e-1}{e}=1-\dfrac{1}{e}$.

b. Comme $n\,\mathbb{P}(X=n)=\dfrac{n(e-1)}{e^{n+1}}\underset{+\infty}{=}o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ par croissances comparées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}n\,\mathbb{P}(X=n)$ converge donc $\mathbb{E}(X)$ existe. D'après le cours, $\mathbb{E}(X)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X\geqslant n)$. Comme $(X\geqslant n)=\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty}(X=k)$ (réunion incompatible), $\mathbb{P}(X\geqslant n)=\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)=\sum\limits_{k=n}^{+\infty}\dfrac{a}{e^k}=\dfrac{a}{e^n}\times\dfrac{1}{1-(1/e)}=\dfrac{1}{e^n}$. Ainsi, $\mathbb{E}(X)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{e^n}=\dfrac{1}{e-1}$.

11.83 $\det(A)=X^2-Y^2=(X-Y)(X+Y)$ et $X+Y\neq 0$ car $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$: A inversible $\Longleftrightarrow X\neq Y$.

Or $(X=Y)=\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}(X=n,Y=n)$ (réunion d'évènements incompatibles) donc, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(X=Y)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n,Y=n)$. Or, X et Y ont été supposées indépendantes ce qui donne la relation $\mathbb{P}(X=Y)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}(Y=n)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}p(1-p)^{n-1}q(1-q)^{n-1}$. Comme $0<(1-p)(1-q)<1$, on peut calculer avec les séries géométriques : $\mathbb{P}(X=Y)=\dfrac{pq}{1-(1-p)(1-q)}=\dfrac{pq}{p+q-pq}$. La probabilité que A soit inversible est donc $1-\mathbb{P}(X=Y)=\dfrac{p+q-2pq}{p+q-pq}$.

11.84 **a.** On note $p\in]0;1[$ la probabilité d'obtenir Pile pour un tirage donné et on suppose la suite de tirages mutuellement indépendante. On note, pour $n\in\mathbb{N}^*$, les événements $P_n=$ "on obtient pile au tirage n". Pour avoir $T>n$, il est nécessaire et suffisant de commencer par une série de k Face (avec $0\leqslant k\leqslant n$, $k=0$ si cette série est vide), de continuer par des Pile jusqu'au tirage n, le premier tirage après n au cours duquel on obtiendra un Face sera l'entier T (avec $T=+\infty$ si on n'obtient jamais de Face après le n-ième tirage ou si on n'a que des Face depuis le début jusqu'à la nuit des temps). Ainsi, on a

$$(T>n)=\bigcup_{k=0}^{n}\Bigg(\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{P_i}\Big)\cap\Big(\bigcap_{i=k+1}^{n}P_i\Big)\Bigg).$$

Comme les évènements $\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{k}\overline{P_i}\Big)\cap\Big(\bigcap\limits_{i=k+1}^{n}P_i\Big)$ pour $k\in[\![0;n]\!]$ sont incompatibles et par indépendance des tirages, on en déduit par σ-additivité que

$$\mathbb{P}(T>n)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\Big(\Big(\bigcap_{i=1}^{k}\overline{P_i}\Big)\cap\Big(\bigcap_{i=k+1}^{n}P_i\Big)\Big)=\sum_{k=0}^{n}(1-p)^kp^{n-k}=\frac{(1-p)^{n+1}-p^{n+1}}{(1-p)-p}$$

si $p \neq \frac{1}{2}$ avec bien sûr $\mathbb{P}(T > n) = \frac{n+1}{2^n}$ si $p = \frac{1}{2}$. Ces formules sont exactes aussi si $n = 0$.

b. Notons $A =$ "on tire Pile puis Face au cours de la suite de lancers". Alors $\overline{A} = (T = +\infty) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (T > n)$. Comme la suite d'événements $\big((T > n)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion, le théorème de continuité décroissante permet d'affirmer que $\mathbb{P}(\overline{A}) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(T > n) = 0$ par croissances comparées. Ainsi, on obtient $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1$ donc l'évènement A est presque sûr.

c. Comme T est une variable aléatoire presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on sait d'après le cours qu'en cas de convergence, $\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T > n)$. Ce réel existe bien encore une fois par croissances comparées :

• Si $p = \frac{1}{2}$, comme $\forall x \in]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\Big)' = \Big(\frac{1}{1-x}\Big)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ en dérivant une série entière dans son intervalle ouvert de convergence, il vient $\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{(1-(1/2))^2} = 4$.

• Si $p \neq \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{2-p} \sum_{n=0}^{+\infty} \big((1-p)^{n+1} - p^{n+1}\big) = \frac{1}{2-p} \sum_{n=0}^{+\infty} \big((1-p)^n - p^n\big)$ car $(1-p)^0 - p^0 = 0$ donc $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{2-p}\Big(\frac{1}{1-(1-p)} - \frac{1}{1-p}\Big) = \frac{1}{p(1-p)}$ (après simplification).

Par conséquent, quelle que soit la valeur de $p \in]0;1[$, on a $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p(1-p)}$ et on constate deux choses :

• cette espérance reste invariante si on échange la probabilité de faire Pile ou Face (remplacer p par $1-p$).

• cette espérance est minimale quand $p = \frac{1}{2}$ car $p \mapsto p(1-p)$ est maximal sur $]0;1[$ quand $p = \frac{1}{2}$.

11.85 **a.** Pour tout $i \in [\![1;n-1]\!]$, on pose $Y_i = |X_{i+1} - X_i|$. Ainsi,

• $Y_i(\Omega) \subset [\![0;n-1]\!]$ est fini (on verra qu'on a même égalité).

• $(Y_i = 0) = \bigcup_{k=1}^{n} (X_i = k, X_{i+1} = k)$ est un évènement comme réunion des intersections des évènements $(X_i = k)$ et $(X_{i+1} = k)$ (puisque X_i et X_{i+1} sont des variables aléatoires).

• Pour $j \in [\![1;n-1]\!]$, $(Y_i = j) = \bigcup_{k=1}^{n-j} \big((X_i = k, X_{i+1} = k+j) \cup (X_i = k+j, X_{i+1} = k)\big)$ est un évènement encore une fois comme réunion d'intersection d'évènements.

Par conséquent, Y_i est une variable aléatoire (et ceci pour tout $i \in [\![1;n-1]\!]$).

De même, $\Delta_n(\Omega) \subset [\![0;n-1]\!]$ et, pour $k \in [\![0;n-1]\!]$, $(\Delta_n \leqslant k) = \bigcap_{i=1}^{n-1} (Y_i \leqslant k)$ car $\Delta_n = \underset{1 \leqslant i \leqslant n-1}{\mathrm{Max}} (Y_i)$ donc $(\Delta_n \leqslant k)$ est un évènement comme intersection d'évènements. Enfin, pour tout entier $k \in [\![0;n-1]\!]$, on a $(\Delta_n = k) = (\Delta_n \leqslant k) \setminus (\Delta_n \leqslant k-1)$ (avec $(\Delta_n \leqslant -1) = \emptyset$ qui est un évènement) donc $(\Delta_n = k)$ est un évènement comme différence de deux évènements. On peut enfin conclure que Δ_n est une variable aléatoire.

b. Soit un entier $k \in \mathbb{N}$, comme $\Delta_n = \underset{1 \leqslant i \leqslant n-1}{\mathrm{Max}} (Y_i)$ à nouveau, on a $(\Delta_n \leqslant k) = \bigcap_{i=1}^{n-1} (Y_i \leqslant k)$ donc $(\Delta_n \leqslant k) \subset \bigcap_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (Y_{2i-1} \leqslant k)$ (car $2i - 1 \leqslant n-1 \Longleftrightarrow i \leqslant n/2 \Longleftrightarrow i \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$). Par le lemme des coalitions, comme Y_{2i-1} est fonction de X_{2i-1} et de X_{2i} et que $X_1, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, les variables aléatoires $Y_1, Y_3, \cdots, Y_{2\lfloor n/2 \rfloor - 1}$ le sont aussi. Par mutuelle indépendance des évènements $(Y_{2i-1} \leqslant k)$ et croissance de $\mathbb{P}$, on a donc $\mathbb{P}(\Delta_n \leqslant k) \leqslant \prod_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathbb{P}(Y_{2i-1} \leqslant k)$. Or (X_1, X_2) suit la même loi que (X_{2i-1}, X_{2i}) pour $i \in [\![1; \lfloor n/2 \rfloor]\!]$ par hypothèse, donc $\mathbb{P}(Y_{2i-1} \leqslant k) = \mathbb{P}(|X_{2i} - X_{2i-1}| \leqslant k) = \mathbb{P}(|X_2 - X_1| \leqslant k)$, ce qui donne comme attendu l'inégalité $\mathbb{P}(\Delta_n \leqslant k) \leqslant \big(\mathbb{P}(|X_2 - X_1| \leqslant k)\big)^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

c. • Si $k = 0$, $(|X_2 - X_1| \leqslant 0) = (X_2 = X_1) = \bigcup_{i=1}^{n} (X_1 = i, X_2 = i)$, et par incompatibilité de ces évènements et indépendance de X_1 et X_2 qui suivent la loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$, on a $\mathbb{P}(|X_2 - X_1| \leqslant 0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$.

• Si $k \geqslant 1$, $(|X_2 - X_1| \leqslant k) = (X_2 = X_1) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{n-k} (X_1 = j, X_2 = j+k)\Big) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{n-k} (X_1 = j+k, X_2 = j)\Big)$ et, avec les mêmes arguments, $\mathbb{P}(|X_2 - X_1| \leqslant k) = \frac{1}{n} + 2\sum_{j=1}^{n-k} \frac{1}{n^2} = \frac{(2k+1)n - k(k+1)}{n^2}$ (après calculs).

Ainsi, pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, on a la formule $\mathbb{P}(|X_2 - X_1| \leqslant k) = \frac{(2k+1)n - k(k+1)}{n^2}$.

d. • On sait que $\lfloor \lambda n \rfloor \leqslant \lambda n < \lfloor \lambda n \rfloor + 1$, donc $(\Delta_n \leqslant \lambda n) \subset (\Delta_n \leqslant \lfloor \lambda n \rfloor + 1)$ donc, par croissance de $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}(\Delta_n \leqslant \lambda n) \leqslant \mathbb{P}(\Delta_n \leqslant \lfloor \lambda n \rfloor + 1) \leqslant \big(\mathbb{P}(|X_2 - X_1| \leqslant \lfloor \lambda n \rfloor + 1)\big)^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Or a vu en question **c.** que $\mathbb{P}(|X_2 - X_1| \leqslant \lfloor \lambda n \rfloor + 1) = \frac{(2k+1)n - k(k+1)}{n^2}$ avec $k = \lfloor \lambda n \rfloor + 1$ qui vérifie $\lambda n < k \leqslant \lambda n + 1$. Or $2k+1 \leqslant 2\lambda n + 3$ et $k(k+1) \geqslant \lambda n(\lambda n + 1)$ de sorte que $\mathbb{P}(|X_2 - X_1| \leqslant \lfloor \lambda n \rfloor + 1) \leqslant \frac{(2\lambda n + 3)n - \lambda n(\lambda n + 1)}{n^2}$.
Mais $\lim_{n \to +\infty} \frac{(2\lambda n + 3)n - \lambda n(\lambda n + 1)}{n^2} = \lambda(2 - \lambda) < 1$ (car $(\lambda - 1)^2 > 0$). Ainsi, par encadrement, on trouve d'abord $\lim_{n \to +\infty} \big(\mathbb{P}(|X_2 - X_1| \leqslant \lfloor \lambda n \rfloor + 1)\big)^{\lfloor n/2 \rfloor} = 0$ puis $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\Delta_n \leqslant \lambda n) = 0$. Par conséquent, comme $\mathbb{P}(\Delta_n > \lambda n) = 1 - \mathbb{P}(\Delta_n \leqslant \lambda n)$, il vient $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\Delta_n > \lambda n) = 1$.

• D'abord, quels que soient $a > 0$ et $\alpha \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant n - an^\alpha \leqslant n$. Dès que $n \geqslant n_0$, comme $\lfloor n - an^\alpha \rfloor \leqslant n - an^\alpha < \lfloor n - an^\alpha \rfloor + 1$, donc $(\Delta_n \leqslant n - an^\alpha) \subset (\Delta_n \leqslant \lfloor n - an^\alpha \rfloor + 1)$ donc, par croissance de $\mathbb{P}$, on a $\mathbb{P}(\Delta_n \leqslant n - an^\alpha) \leqslant \mathbb{P}(\Delta_n \leqslant \lfloor n - an^\alpha \rfloor + 1) \leqslant \big(\mathbb{P}(|X_2 - X_1| \leqslant \lfloor n - an^\alpha \rfloor + 1)\big)^{\lfloor n/2 \rfloor}$.
Or $\mathbb{P}(|X_2 - X_1| \leqslant \lfloor n - an^\alpha \rfloor + 1) \leqslant 1$ donc $\mathbb{P}(\Delta_n \leqslant n - an^\alpha) \leqslant \big(\mathbb{P}(|X_2 - X_1| \leqslant \lfloor n - an^\alpha \rfloor + 1)\big)^{(n/2)-1}$ car $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > \frac{n}{2} - 1$. D'après **c.**, $\mathbb{P}(|X_2 - X_1| \leqslant \lfloor n - an^\alpha \rfloor + 1) = \frac{(2k+1)n - k(k+1)}{n^2}$ avec $k = \lfloor n - an^\alpha \rfloor + 1$ qui vérifie $n - an^\alpha < k \leqslant n - an^\alpha + 1$. Or $2k+1 \leqslant 2n - 2an^\alpha + 3$ et $k(k+1) \geqslant (n - an^\alpha)(n - an^\alpha + 1)$ de sorte que $\mathbb{P}(|X_2 - X_1| \leqslant \lfloor n - an^\alpha + 1 \rfloor + 1) \leqslant \frac{(2n - 2an^\alpha + 3)n - (n - an^\alpha)(n - an^\alpha + 1)}{n^2}$. Ainsi, par croissance de $\ln$ et $\exp$, on a $\mathbb{P}(\Delta_n \leqslant n - an^\alpha) \leqslant \exp\left(\left(\frac{n}{2} - 1\right) \ln\left(\frac{(2n - 2an^\alpha + 3)n - (n - an^\alpha)(n - an^\alpha + 1)}{n^2}\right)\right)$. Or $\frac{(2n - 2an^\alpha + 3)n - (n - an^\alpha)(n - an^\alpha + 1)}{n^2} = 1 - a^2 n^{2\alpha - 2} + 2n^{-1} + an^{\alpha - 2} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{a^2}{n^{2(1-\alpha)}} + o\Big(\frac{1}{n^{2(1-\alpha)}}\Big)$.
Par conséquent, on obtient les équivalents $\ln\left(\frac{(2n - 2an^\alpha + 3)n - (n - an^\alpha)(n - an^\alpha + 1)}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{a^2}{n^{2(1-\alpha)}}$ puis $\left(\frac{n}{2} - 1\right) \ln\left(\frac{(2n - 2an^\alpha + 3)n - (n - an^\alpha)(n - an^\alpha + 1)}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{a^2}{2} n^{2\alpha - 1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Enfin, on a établi par encadrement que $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\Delta_n \leqslant n - an^\alpha) = 0$. Comme avant, $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\Delta_n > n - an^\alpha) = 1$.

11.86 **a.** Une arête dans ce graphe est caractérisée par les deux sommets qu'elle relie. On a n sommets et il faut en choisir deux parmi ceux-ci, cela fait exactement $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes (2 parmi n). Si la question est de déterminer le nombre d'arêtes une fois les choix de liaison effectués, alors ce nombre d'arêtes vaut $N = \sum_{1 \leqslant x < y \leqslant n} T_{x,y}$.

b. Si $k \in [\![1;n]\!]$, on note R_k le nombre de sommets qui sont reliés au sommet k (le degré de ce sommet). Par définition, on a $R_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} T_{i,k}$ ($n-1$ termes dans cette somme). Or les $T_{x,y}$ sont indépendants et suivent la loi de Bernoulli de paramètre p par hypothèse. D'après le cours, R_k suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n-1,p)$ ce qui signifie que $\forall j \in [\![0;n-1]\!]$, $\mathbb{P}(R_k = j) = \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j}$.

c. Aucune arête ne part du sommet k si et seulement si $R_k = 0$. Ainsi, comme $Z = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{(R_k=0)}$, on déduit de la linéarité de l'espérance que $\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(R_k=0)}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(R_k = 0) = n(1-p)^{n-1}$.

d. Méthode 1 : on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire Z qui admet bien un moment d'ordre 2 car elle est bornée. Ainsi, avec $\varepsilon = \mathbb{E}(Z) > 0$, on obtient la majoration $\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geqslant \mathbb{E}(Z)) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(Z)}{\mathbb{E}(Z)^2}$. Or $(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geqslant \mathbb{E}(Z)) = (Z \leqslant 0) \cup (Z \geqslant 2\mathbb{E}(Z)) = (Z = 0) \cup (Z \geqslant 2\mathbb{E}(Z))$ car Z est une variable aléatoire positive. Ainsi, on a l'inclusion $(Z = 0) \subset (|Z - \mathbb{E}(Z)| \geqslant \mathbb{E}(Z))$ donc, par croissance de la probabilité $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}(Z = 0) \leqslant \mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geqslant \mathbb{E}(Z)) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(Z)}{\mathbb{E}(Z)^2}$ et on a l'inégalité voulue.

Méthode 2 : comme $Z(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$ par construction, $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}((Z - \mathbb{E}(Z))^2) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Z = k)(k - \mathbb{E}(Z))^2$ par théorème de transfert. Tous les termes de cette somme sont positifs, ainsi $\mathbb{V}(Z)$ est supérieur au premier, $\mathbb{V}(Z) \geqslant \mathbb{P}(Z = 0)(0 - \mathbb{E}(Z))^2 = \mathbb{P}(Z = 0)\,\mathbb{E}(Z)^2$ donc $\mathbb{P}(Z = 0) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(Z)}{\mathbb{E}(Z)^2}$ car $\mathbb{E}(Z) > 0$ d'après **c.**.

e. $\mathbb{E}(Z) = n(1-p)^{n-1} = n \exp\left((n-1)\ln\left(1 - c\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right)$ or, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$, on a le calcul suivant :
$(n-1)\ln\left(1 - c\dfrac{\ln(n)}{n}\right) \underset{+\infty}{=} n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\left(-c\dfrac{\ln(n)}{n} + O\left(\dfrac{\ln(n)^2}{n^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} -c\ln(n) + o(1)$ (après regroupement).
Ainsi, $\exp\left((n-1)\ln\left(1 - c\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} e^{-c\ln(n)+o(1)} \underset{+\infty}{=} n^{-c}e^{o(1)} \underset{+\infty}{\sim} n^{-c}$ donc $\mathbb{E}(Z) \underset{+\infty}{\sim} n^{1-c}$.
Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(Z) = 0$ si $c > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(Z) = +\infty$ si $c < 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(Z) = 1$ si $c = 1$.

f. Comme Z est à valeurs entières, $\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geqslant k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z \geqslant k)$. Ainsi, $\mathbb{P}(Z \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}(Z)$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(Z) = 0$ car $c > 1$ et $\mathbb{E}(Z) \underset{+\infty}{\sim} n^{1-c}$ donc $\mathbb{P}(Z \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(Z = 0)$ tend vers 0, ce qui montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z = 0) = 1$ si $c > 1$. On n'a presque sûrement aucun sommet isolé quand n tend vers $+\infty$ si $c > 1$.

g. $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2$ et $Z^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{(R_k=0)}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{(R_k=0)}^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{1}_{(R_i=0)}\mathbb{1}_{(R_j=0)}$ ce qui donne $Z^2 = \mathbb{E}(Z) + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{1}_{(R_i=0)\cap(R_j=0)}$ d'où $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(Z) + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{P}(R_i = 0, R_j = 0)$. Il y a une arête possible entre les sommets i et j, et $n-2$ autres arêtes possibles arrivant en i et $n-2$ autres arrivant en j. Par indépendance mutuelle, on a $\mathbb{P}(R_i = 0, R_j = 0) = (1-p)^{2n-3}$. Ainsi, en reportant, on obtient $\mathbb{V}(Z) = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3} - n^2(1-p)^{2n-2}$ donc, en factorisant par rapport aux puissances de $1-p$, cela donne $\mathbb{V}(Z) = n(1-p)^{n-1}(1-(1-p)^{n-2}) + n^2p(1-p)^{2n-3}$. Comme $(1-p)^{n-1} \underset{+\infty}{\sim} n^{-c}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty}(1-p) = 1$, $(1-p)^{2n-3} = \dfrac{(1-p)^{2n-2}}{1-p} \underset{+\infty}{\sim} n^{-2c}$ donc $n^2p(1-p)^{2n-3} \underset{+\infty}{\sim} cn^{1-2c}\ln(n)$. De plus, comme $\lim\limits_{n \to +\infty}(1-(1-p)^{n-2}) = 1$, on a $n(1-p)^{n-1}(1-(1-p)^{n-2}) \underset{+\infty}{\sim} n^{1-c}$ d'où $n^2p(1-p)^{2n-3} \underset{+\infty}{=} o(n^{1-c})$ ce qui prouve que $\mathbb{V}(Z) \underset{+\infty}{\sim} n^{1-c}$. Par conséquent, $\dfrac{\mathbb{V}(Z)}{\mathbb{E}(Z)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{1-c}}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathbb{V}(Z)}{\mathbb{E}(Z)^2} = 0$ si $c < 1$. D'après la question **d.** et par encadrement, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z=0)=0$. Il y a presque sûrement au moins un point isolé si $c<1$ quand n tend vers $+\infty$ (en fait il y en a beaucoup puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z)=+\infty$).

11.87 **a.** Les relations de l'énoncé s'écrivent aussi matriciellement $V_n=A_nU_n$ en notant ${}^tU_n=(u_0\ \cdots\ u_n)$, ${}^tV_n=(v_0\ \cdots\ v_n)$ et $A_n=\left(\binom{i}{j}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Or ${}^tA_n$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ de l'endomorphisme $f_n : P\mapsto P(X+1)$. Or f_n est clairement bijective avec $f_n^{-1} : P\mapsto P(X-1)$ donc $({}^tA_n)^{-1}={}^t(A_n^{-1})=\left((-1)^{i-j}\binom{i}{j}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Ainsi, comme $U_n=A_n^{-1}V_n$, on a la formule d'inversion de PASCAL, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}v_{n-k}=(-1)^n\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}v_{n-k}$.

b. On note S_n l'ensemble de toutes les permutations de $[\![1;n]\!]$. On sait que $\text{card}\,(S_n)=n!$. On partitionne (ou plutôt on partage) S_n selon le nombre de points fixes des permutations. Notons donc $S_{n,k}$ l'ensemble des permutations de S_n qui ont exactement k points fixes. Alors $S_n=\bigcup\limits_{k=0}^{n}S_{n,k}$ (réunion disjointe) avec $S_{n,n-1}=\emptyset$ car si une permutation a au moins $n-1$ points fixes, c'est forcément l'identité donc elle a en fait n points fixes. On a donc $\text{card}\,(S_n)=n!=\sum\limits_{k=0}^{n}\text{card}\,(S_{n,k})$.

Pour dénombrer $S_{n,k}$, on choisit les k points fixes parmi les éléments de $[\![1;n]\!]$; ensuite on choisit une permutation des $n-k$ éléments restants sans point fixe, elles sont au nombre de d_{n-k} par définition (le nombre de dérangements, c'est le nom des permutations de $S_{n,0}$, ne dépend que du nombre d'éléments de l'ensemble qu'on "dérange"). On obtient donc $\text{card}\,(S_{n,k})=\binom{n}{k}d_k$. Ainsi, il vient $\forall n\in\mathbb{N},\ n!=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_{n-k}$.

D'après **a.**, $\forall n\in\mathbb{N},\ d_n=(-1)^n\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!=n!\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}$.

c. Pour toute permutation σ_0 de S_n, $(\sigma=\sigma_0)=\bigcap\limits_{k=1}^{n}(\sigma(k)=\sigma_0(k))$ donc, avec la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}(\sigma=\sigma_0)=\mathbb{P}(\sigma(1)=\sigma_0(1))\times\mathbb{P}_{(\sigma(1)=\sigma_0(1))}(\sigma(2)=\sigma_0(2))\times\cdots\times\mathbb{P}_{\bigcap\limits_{i=1}^{n-1}(\sigma(i)=\sigma_0(i))}(\sigma(n)=\sigma_0(n))$ ce qui donne, comme une fois k boules sorties de l'urne, la probabilité qu'on tire une boule donnée est $\dfrac{1}{n-k}$, $\mathbb{P}(\sigma=\sigma_0)=\dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{n-1}\times\cdots\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{n!}$. Comme $\text{card}\,(S_n)=n!$, σ suit donc la loi uniforme sur S_n.

d. Par construction $\mathbb{1}_Q(\Omega)\subset\{0,1\}$ donc $\mathbb{1}_Q$ suit une loi de BERNOULLI. Par définition, $\mathbb{1}_Q=f(\sigma)$ où $f : S_n\to\{0,1\}$ est définie par $f(s)=1$ si tous les éléments de Q sont invariants par la permutation s et $f(s)=0$ sinon. Par le théorème de transfert, $\mathbb{E}(\mathbb{1}_Q)=\mathbb{P}(\mathbb{1}_Q=1)=\sum\limits_{s\in S_n}f(s)\,\mathbb{P}(\sigma=s)$. Or, on sait que la loi de σ est uniforme sur S_n, donc $\mathbb{P}(\mathbb{1}_Q=1)=\dfrac{1}{n!}\sum\limits_{s\in S_n}f(s)$. Or le nombre de permutations laissant tous les éléments de Q invariants est $(n-\text{card}\,(Q))!$ car les images des éléments de Q sont fixés et on permute comme on veut les $n-\text{card}\,(Q)$ autres. Ainsi, $\mathbb{1}_Q$ suit la loi de BERNOULLI de paramètre $p_Q=\dfrac{(n-\text{card}\,(Q))!}{n!}$.

e. F est une variable aléatoire bornée donc, pour $j\in[\![0;n]\!]$, $\binom{F}{j}=\sum\limits_{Q\subset[\![1;n]\!],\ \text{card}(Q)=j}\mathbb{1}_Q$ étant le nombre de parties à j éléments de l'ensemble des points fixes de σ l'est aussi ; elle admet donc une espérance finie. Par linéarité de l'espérance et d'après **d.**, $\mathbb{E}\left(\binom{F}{j}\right)=\sum\limits_{Q\subset[\![1;n]\!],\ \text{card}(Q)=j}\mathbb{E}(\mathbb{1}_Q)$. Si $j\in[\![0;n]\!]$, comme il y a $\binom{n}{j}$ parties de $[\![1;n]\!]$ à j éléments et $\mathbb{E}(\mathbb{1}_Q)=p_Q=\dfrac{(n-j)!}{n!}$ si $\text{card}\,(Q)=j$, on a $\mathbb{E}\left(\binom{F}{j}\right)=\binom{n}{j}\dfrac{(n-j)!}{n!}=\dfrac{1}{j!}$.

f. F est bornée par n donc f est polynomiale et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(F = k)x^k$. Pour $j \in [\![0; n]\!]$, on dérive j fois et $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(j)}(x) = \sum\limits_{k=j}^{n} k(k-1)\cdots(k-j+1)\,\mathbb{P}(F = k)x^{k-j}$ donc $f^{(j)}(1) = \sum\limits_{k=j}^{n} k(k-1)\cdots(k-j+1)\,\mathbb{P}(F = k)$ d'où $\dfrac{f^{(j)}(1)}{j!} = \sum\limits_{k=j}^{n} \dfrac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!}\mathbb{P}(F = k) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{k}{j}\mathbb{P}(F = k) = \mathbb{E}\Big(\dbinom{F}{j}\Big)$ par la formule de transfert. D'après **e.**, $\dfrac{f^{(j)}(1)}{j!} = \dfrac{1}{j!}$ donc $f^{(j)}(1) = 1$. Par TAYLOR, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{f^{(j)}(1)}{j!}(x-1)^j = \sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{(x-1)^j}{j!}$.

g. Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, $\mathbb{P}(F = k) = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$ toujours d'après TAYLOR (mais en 0) donc, dès que $n \geqslant k$, $\mathbb{P}(F = k) = \dfrac{1}{k!}\sum\limits_{j=k}^{n} \dfrac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!} = \dfrac{1}{k!}\sum\limits_{i=0}^{n-k} \dfrac{(-1)^i}{i!}$ car $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{j=k}^{n} \dfrac{j!}{(j-k)!}\dfrac{(x-1)^{j-k}}{j!} = \sum\limits_{j=k}^{n} \dfrac{(x-1)^{j-k}}{(j-k)!}$. Ainsi, $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}(F = k) = \dfrac{e^{-1}}{k!}$, ce qui est cohérent car $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-1}}{k!} = 1$.

11.88 **a.** Par construction, $T(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $(T = n) = \Big(\bigcap\limits_{k=0}^{n-1}(X_k = 1)\Big) \cap (X_n = 0)$ est un évènement car les X_i sont des variables aléatoires. Ainsi, T est une variable aléatoire car, de plus $(T = +\infty) = \bigcap\limits_{k=0}^{+\infty}(X_k = 1)$. Par indépendance des X_i, on a $\mathbb{P}(T = n) = \Big(\prod\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{2}\Big) \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$. De même, comme $(T > n) = \bigcap\limits_{k=0}^{n}(X_k = 1)$, on a $\mathbb{P}(T > n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Comme $(T = +\infty) = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty}(T > n)$ et que la suite $\big((T > n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'évènements, par continuité décroissante, on a $\mathbb{P}(T = +\infty) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T > n) = 0$ d'après **a.**. Plus simplement, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on peut dire que $(T = +\infty) \subset (T > n)$ donc $0 \leqslant \mathbb{P}(T = +\infty) \leqslant \mathbb{P}(T > n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ donc, par passage à la limite, on en déduit que $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$. On pouvait aussi écrire $(T < +\infty) = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}(T = n)$ (réunion incompatible) donc, par σ-additivité, $\mathbb{P}(T < +\infty) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-(1/2)} = 1$ donc on retrouve à nouveau $\mathbb{P}(T = +\infty) = 1 - \mathbb{P}(T < +\infty) = 1 - 1 = 0$.

c. On sait d'après le cours que T admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(T > n)$ converge, ce qui est le cas car c'est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2} < 1$, et qu'on a alors la relation $\mathbb{E}(T) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T > n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{n+1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-(1/2)} = 1$. De même, T admet une variance finie si et seulement si T admet un moment d'ordre 2, ce qui équivaut par la formule de transfert à la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2\,\mathbb{P}(T = n)$. Or $\dfrac{n^2}{2^{n+1}} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ par croissances comparées donc T admet une variance finie. On sait qu'alors $\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2 = \mathbb{E}(T(T-1)) + \mathbb{E}(T) - \mathbb{E}(T)^2 = \mathbb{E}(T(T-1))$ car $\mathbb{E}(T) = 1$. Par le théorème de transfert, $\mathbb{E}(T(T-1)) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\,\mathbb{P}(T = n) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{n+1}$. Or $\forall x \in]-1; 1[,\ \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ qu'on dérive deux fois (sur l'intervalle ouvert de convergence) pour avoir $\dfrac{2}{(1-x)^3} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$ et enfin $\dfrac{2x^3}{(1-x)^3} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n+1}$. En prenant $x = \dfrac{1}{2}$, $\mathbb{E}(T(T-1)) = \dfrac{2(1/2)^3}{(1-(1/2))^3} = 2$ donc $\mathbb{V}(T) = 2$.

Beaucoup plus simplement, $\forall n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(T+1=n) = \mathbb{P}(T=n-1) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2}$ donc $T+1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Ainsi, d'après le cours, $\mathbb{E}(T+1) = \frac{1}{(1/2)} = 2$ et $\mathbb{V}(T+1) = \frac{1-(1/2)}{(1/2)^2} = 2$.
Comme $\mathbb{E}(T+1) = \mathbb{E}(T)+1$ et $\mathbb{V}(T+1) = \mathbb{V}(T)$, on retrouve $\mathbb{E}(T) = 1$ et $\mathbb{V}(T) = 2$.

d. Par définition de T',

- $(T'=1) = (X_0=1, X_1=1)$ donc, par indépendance de X_0 et X_1, $\mathbb{P}(T'=1) = \frac{1}{4}$.
- $(T'=2) = (X_0=0, X_1=1, X_2=1)$. Par indépendance mutuelle de X_0, X_1, X_2, on a $\mathbb{P}(T'=2) = \frac{1}{8}$.
- De même, $(T'=3) = (X_1=0, X_2=1, X_3=1)$ (peu importe X_0) donc, comme avant, $\mathbb{P}(T'=3) = \frac{1}{8}$.
- À nouveau, $(T'=4) \cup (X_0=1, X_1=1, X_2=0, X_3=1, X_4=1) = (X_2=0, X_3=1, X_4=1)$ donc, par incompatibilité de ces deux évènements, $\mathbb{P}(T'=4) + \frac{1}{32} = \frac{1}{8}$ ce qui donne $\mathbb{P}(T'=4) = \frac{3}{32}$.

e. Il est clair que si on a $T' > n$, on a a fortiori $T' > n-2$ et on ne peut pas avoir $X_{n-1} = X_n = 1$ sinon on aurait $T' \leqslant n$. Ceci se résume en l'inclusion $(T'>n) \subset (T'>n-2) \cap \overline{(X_{n-1}=1, X_n=1)}$. Or $(T'>n-2)$ ne dépend que des variables $X_0, \cdots, X_{n-2}$ donc, par le lemme des coalitions, $(T'>n-2)$ et $\overline{(X_{n-1}=1, X_n=1)}$ sont indépendants. Ainsi, $\mathbb{P}(T'>n) \leqslant \mathbb{P}(T'>n-2) \times \mathbb{P}\big(\overline{(X_{n-1}=1, X_n=1)}\big) = \frac{3\,\mathbb{P}(T'>n-2)}{4}$.

f. Comme avant, la suite $\big((T'>n)\big)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et on a $(T'=+\infty) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (T'>n)$ donc, par continuité décroissante, $\mathbb{P}(T'=+\infty) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T'=n)$. Comme la suite $\big(\mathbb{P}(T'>n)\big)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et positive donc converge vers un réel $\ell \geqslant 0$, en passant à la limite dans l'inégalité $\mathbb{P}(T'>n) \leqslant \frac{3\,\mathbb{P}(T'>n-2)}{4}$, il vient $\ell \leqslant \frac{3\ell}{4}$ ce qui impose $\ell = 0$. Ainsi $\mathbb{P}(T'=+\infty) = 0$ et, comme attendu, T' est presque sûrement finie.

g. Si on a $T'=n$ pour $n \geqslant 2$, on ne peut pas commencer par $X_0 = X_1 = 1$ sinon ça donnerait $T'=1$. Ainsi, on peut écrire $(T'=n) = (T'=n, X_0=0) \cup (T'=n, X_0=1, X_1=0)$ (réunion de deux évènements incompatibles) donc $\mathbb{P}(T'=n) = \mathbb{P}(T'=n, X_0=0) + \mathbb{P}(T'=n, X_0=1, X_1=0)$. Par les probabilités conditionnelles, $\mathbb{P}(T'=n) = \mathbb{P}(X_0=0) \times \mathbb{P}_{(X_0=0)}(T'=n) + \mathbb{P}(X_0=1, X_1=0) \times \mathbb{P}_{(X_0=1,X_1=0)}(T'=n)$. Si $X_0=0$, c'est comme si on repartait au point de départ après un tirage donc $\mathbb{P}_{(X_0=0)}(T'=n) = \mathbb{P}(T'=n-1)$. De même, si $X_0=1$ et $X_1=0$, on repart au point de départ après deux étapes donc $\mathbb{P}_{(X_0=1,X_1=0)}(T'=n) = \mathbb{P}(T'=n-2)$.
On a donc bien $\mathbb{P}(T'=n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(T'=n-1) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(T'=n-2)$.
Pour être totalement "rigoureux", mais la méthode précédente suffit largement à l'oral, on peut écrire l'égalité $(T'=n, X_0=0) = (X_0=0) \cap \Big(\bigcap_{k=2}^{n-1} \overline{(X_k = X_{k-1} = 1)}\Big) \cap (X_n = X_{n-1} = 1)$ donc, par le lemme des coalitions, $\mathbb{P}(T'=n, X_0=0) = \mathbb{P}(X_0=0) \times \mathbb{P}\bigg(\Big(\bigcap_{k=2}^{n-1} \overline{(X_k = X_{k-1} = 1)}\Big) \cap (X_n = X_{n-1} = 1)\bigg)$. Mais $\mathbb{P}\bigg(\Big(\bigcap_{k=2}^{n-1} \overline{(X_k = X_{k-1} = 1)}\Big) \cap (X_n = X_{n-1} = 1)\bigg) = \mathbb{P}\bigg(\Big(\bigcap_{k=1}^{n-2} \overline{(X_k = X_{k-1} = 1)}\Big) \cap (X_{n-1} = X_{n-2} = 1)\bigg)$ car la famille de variables aléatoires $(X_1, \cdots, X_n)$ suit la même loi que $(X_0, \cdots, X_{n-1})$. Et comme on a $(T'=n-1) = \Big(\bigcap_{k=1}^{n-2} \overline{(X_k = X_{k-1} = 1)}\Big) \cap (X_{n-1} = X_{n-2} = 1)$ par définition de T', on en déduit que

$\mathbb{P}(T' = n, X_0 = 0) = \mathbb{P}(X_0 = 0)\,\mathbb{P}(T' = n-1) = \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}(T' = n-1)$. De la même manière, on montre que $\mathbb{P}(T' = n, X_0 = 1, X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_0 = 1)\,\mathbb{P}(X_1 = 0)\,\mathbb{P}(T' = n-2)$.

De nouveau, on retrouve la relation $\mathbb{P}(T' = n) = \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}(T' = n-1) + \dfrac{1}{4}\,\mathbb{P}(T' = n-2)$.

h. Comme $\mathbb{P}(T' > 0) = 1$ et $\mathbb{P}(T' > 1) = \dfrac{3}{4}$ d'après **d.**, par récurrence avec **e.**, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(T' > 2n) \leqslant \Big(\dfrac{3}{4}\Big)^n$ et $\mathbb{P}(T' > 2n+1) \leqslant \Big(\dfrac{3}{4}\Big)^{n+1}$. Ainsi, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(T' > n)$ converge (comme une série géométrique car $P(T' > n) \underset{+\infty}{=} O\Big(\Big(\dfrac{3}{4}\Big)^{n/2}\Big)$, ce qui assure l'existence d'une espérance finie pour T' (à valeurs dans $\mathbb{N}$). Et $\mathbb{E}(T') = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(T' = n) = \mathbb{P}(T' = 1) + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n\Big(\dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}(T' = n-1) + \dfrac{1}{4}\,\mathbb{P}(T' = n-2)\Big)$ d'après **g.**. Comme les deux séries convergent, $\mathbb{E}(T') = \mathbb{P}(T' = 1) + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(n-1+1)\,\mathbb{P}(T' = n-1) + \dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(n-2+2)\,\mathbb{P}(T' = n-2)\Big)$ ce qui devient, après séparation des séries convergentes et ré-indexation et comme $T'(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T' = n) = 1$ d'après **f.**, $\mathbb{E}(T') = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\,\mathbb{E}(T') + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\,\mathbb{E}(T') + \dfrac{1}{2}$.

On pouvait écrire $\mathbb{E}(T') = \mathbb{P}(T' = 1) + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n\Big(\dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}(T'+1 = n) + \dfrac{1}{4}\,\mathbb{P}(T'+2 = n)\Big) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\mathbb{E}(T'+1)}{2} + \dfrac{\mathbb{E}(T'+2)}{4}$ avec le même résultat. On trouve finalement la valeur $\mathbb{E}(T') = 5$ (6 tirages).

11.89 **a.** Comme $\Omega = \mathbb{N}^*$, les conditions imposées à $\lambda \in \mathbb{R}$ sont $\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(\{n\}) \in [0;1]$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$. On doit donc prendre $\lambda > 0$ et λ vérifiant la relation $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lambda n^{-s} = \lambda\zeta(s) = 1$ (la série de Riemann converge car justement $s > 1$). La seule valeur λ telle que la famille $\big(\lambda n^{-s}\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ avec $\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(\{n\}) = \lambda n^{-s}$ est donc $\lambda = \dfrac{1}{\zeta(s)}$.

b. Par définition, la variable aléatoire X admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} n\,\mathbb{P}(X = n)$ converge. Or $n\,\mathbb{P}(X = n) = n\dfrac{n^{-s}}{\zeta(s)} = \dfrac{1}{\zeta(s)n^{s-1}}$. Ainsi, d'après les résultats sur les séries de Riemann, on sait que X admet une espérance finie si et seulement si $s - 1 > 1$, c'est-à-dire si et seulement si $s > 2$.

c. Par définition, $A_p = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \{pn\}$ et, par σ-additivité, on a donc

$$\mathbb{P}(A_p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{pn\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^{-s}}{\zeta(s)} = \frac{1}{p^s}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{-s}}{\zeta(s)} = \frac{1}{p^s}.$$

Soit p et q deux nombres premiers distincts. Il est clair qu'un multiple de pq est un multiple à la fois de p et de q donc $A_{pq} \subset A_p \cap A_q$. Réciproquement, soit un entier n à la fois multiple de p et de q. La décomposition en produit de nombres premiers de n contient donc au moins p^1 et q^1, ce qui fait que n est aussi un multiple de pq et on a établi que $A_p \cap A_q \subset A_{pq}$. On aurait pu dire que puisque p et q sont premiers entre eux, on a $(p|n$ et $q|n) \iff pq|n)$ mais ce n'est pas au programme dans notre filière. Par double inclusion, $A_{pq} = A_p \cap A_q$ donc $\mathbb{P}(A_p \cap A_q) = \mathbb{P}(A_{pq}) = \dfrac{1}{(pq)^s} = \dfrac{1}{p^s}\dfrac{1}{q^s} = \mathbb{P}(A_p)\,\mathbb{P}(A_q)$ donc les évènements A_p et A_q sont indépendants par définition.

Plus généralement, on se donne une famille $p_{i_1}, \cdots, p_{i_r}$ une liste de nombres premiers tous différents.

• Un multiple de $\prod_{k=1}^{r} p_{i_k}$ est (par transitivité de la divisibilité) un multiple de chaque p_{i_j} pour $j \in [\![1;r]\!]$.

• Réciproquement, si n est un multiple de tous les $p_{i_1}, \cdots, p_{i_r}$, alors la décomposition en produit de nombres premiers de n contient au moins $p_{i_1}^1 \times \cdots p_{i_r}^1$ donc n est un multiple de $m = \prod_{k=1}^{r} p_{i_k}$. Par double inclusion, comme ci-dessus, on a $A_m = \bigcap_{k=1}^{r} A_{i_k}$ donc

$$\mathbb{P}(A_m) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{r} A_{i_k}\Big) = \frac{1}{m^s} = \prod_{k=1}^{r} \frac{1}{p_{i_k}^s} = \prod_{k=1}^{r} \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Par définition, les évènements $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ sont mutuellement indépendants (pour la loi précédente).

d. Tout entier $n \geqslant 2$ est le multiple d'au moins un nombre premier donc $\mathbb{N}^* \setminus \{1\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_{p_k}$ ce qui donne, en passant au complémentaire, $\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{A_{p_k}} = \{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k \not| n\} = \{1\}$. On peut écrire $\{1\} = \bigcap_{N=1}^{+\infty} I_N$ avec $I_N = \bigcap_{k=1}^{N} \overline{A_{p_k}}$ et la suite des $(I_N)_{N \geqslant 1}$ étant décroissante pour l'inclusion, on peut conclure avec le théorème de continuité décroissante que $\mathbb{P}(\{1\}) = \dfrac{1}{\zeta(s)} = \lim\limits_{N \to +\infty} \mathbb{P}(I_N)$. Or les $(A_{p_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ étant indépendants mutuellement, les $(\overline{A_{p_k}})_{k \in \mathbb{N}^*}$ le sont aussi ce qui montre que $\mathbb{P}(I_N) = \prod_{k=1}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_{p_k}}) = \prod_{k=1}^{N} \Big(1 - \dfrac{1}{p_k^s}\Big)$. On a bien, en passant à l'inverse : $\zeta(s) = \lim\limits_{N \to +\infty} \prod_{k=1}^{N} \dfrac{1}{1 - p_k^{-s}}$ qu'on note $\zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty} \Big(1 - \dfrac{1}{p_k^s}\Big)$.

e. On va montrer que la série à termes positifs $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{p_n}$ diverge. Si $s > 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^s}$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{k^s} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^s}$ par comparaison série-intégrale. On somme pour $k \in \mathbb{N}^*$ (tout converge) et on trouve avec CHASLES $\zeta(s) \geqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \Big[\frac{t^{1-s}}{1-s}\Big]_1^{+\infty} = \frac{1}{s-1}$. Ainsi, par encadrement, $\lim\limits_{s \to 1^+} \zeta(s) = +\infty$.

Soit $A \geqslant 0$, il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\forall s \in]1;1+\alpha]$, $A+1 \leqslant \zeta(s)$. Or $\zeta(1+\alpha) = \lim\limits_{N \to +\infty} \prod_{n=1}^{N} \dfrac{1}{1 - p_n^{-1-\alpha}}$ d'après la question **d.**, donc il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall N \geqslant N_0$, $\zeta(1+\alpha) - 1 \leqslant \prod_{n=1}^{N} \dfrac{1}{1 - p_n^{-1-\alpha}} (\leqslant \zeta(1+\alpha))$. Par conséquent, $\forall N \geqslant N_0$, $\prod_{n=1}^{N} \dfrac{1}{1 - p_n^{-1-\alpha}} \geqslant A$. Or $\prod_{n=1}^{N} \dfrac{1}{1 - p_n^{-1}} \geqslant \prod_{n=1}^{N} \dfrac{1}{1 - p_n^{-1-\alpha}}$ donc $\prod_{n=1}^{N} \dfrac{1}{1 - p_n^{-1}} \geqslant A$. Ceci montre que $\lim\limits_{N \to +\infty} \prod_{n=1}^{N} \dfrac{1}{1 - p_n^{-1}} = +\infty$ ce qui s'énonce aussi $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \ln\Big(1 - \dfrac{1}{p_n}\Big) = -\infty$ en passant au logarithme. Ainsi, la série $\sum_{n \geqslant 1} \ln\Big(1 - \dfrac{1}{p_n}\Big)$ diverge. Or, comme il existe une infinité de nombres premiers, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = +\infty$ donc $\ln\Big(1 - \dfrac{1}{p_n}\Big) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{p_n} < 0$ d'où la divergence de $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{p_n}$.

11.90 **a.** Soit X une variable aléatoire réelle positive admet une espérance finie et $\varepsilon > 0$, alors $\mathbb{P}(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$. En effet, on dispose de l'inégalité $X \geqslant \varepsilon \mathbb{1}_{(X \geqslant \varepsilon)}$ puisque si $X(\omega) \geqslant \varepsilon$, elle se résume à $X(\omega) \geqslant \varepsilon \times 1 = \varepsilon$ et, si $X(\omega) < \varepsilon$, elle revient à $X(\omega) \geqslant \varepsilon \times 0 = 0$ qui est vrai car X est positive. Par croissance et linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(X) \geqslant \varepsilon\, \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(X \geqslant \varepsilon)}) = \varepsilon P(X \geqslant \varepsilon)$ et on divise par $\varepsilon > 0$ pour avoir l'inégalité de MARKOV.

b. D'après l'énoncé, $S_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$ donc $S_n - \frac{n}{2}$ est une variable aléatoire bornée mais pas toujours positive. Par contre $\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| > \varepsilon\right) = \left(S_n - \frac{n}{2} > \varepsilon\right) \cup \left(S_n - \frac{n}{2} < -\varepsilon\right) = \left(S_n - \frac{n}{2} > \varepsilon\right) \cup \left(S'_n - \frac{n}{2} > \varepsilon\right)$ en notant $S'_n = \sum_{k=1}^{n}(1 - X_k)$. En notant $Y_k = 1 - X_k$, la famille $(Y_1, \cdots, Y_n)$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi de BERNOULLI de paramètre $\frac{1}{2}$ donc $S'_n - \frac{n}{2}$ suit la même loi que $S_n - \frac{n}{2}$. Par conséquent, comme les évènements $\left(S_n - \frac{n}{2} > \varepsilon\right)$ et $\left(S_n - \frac{n}{2} < -\varepsilon\right)$ sont incompatibles, on a $\mathbb{P}\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| > \varepsilon\right) = 2\,\mathbb{P}\left(S_n - \frac{n}{2} > \varepsilon\right)$. Comme S_n est bornée, elle admet un moment d'ordre 2 donc, puisque $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \frac{n}{2}$ et d'après l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV, on a $\mathbb{P}\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2}$ mais $\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k)$ par indépendance deux à deux des $X_1, \cdots, X_n$ donc $\mathbb{V}(S_n) = \frac{n}{4}$ et, comme $\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| > \varepsilon\right) \subset \left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right)$ et par croissance de $\mathbb{P}$, on a donc la majoration $\mathbb{P}\left(\left|S_n - \frac{n}{2}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{n}{4\varepsilon^2}$ donc $\mathbb{P}\left(S_n - \frac{n}{2} > \varepsilon\right) \leqslant \frac{n}{8\varepsilon^2}$.

11.91 **a.** Comme $p \neq 0$ et $p \neq 1$, on en déduit que $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$. Par indépendance de X_n et X_{n+1}, il vient $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1)\,\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = p^2$. Ainsi Y_n suit la loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(p^2)$. D'après le cours, $\mathbb{E}(Y_n) = p^2$, $\mathbb{V}(Y_n) = p^2(1 - p^2)$.

b. • Si $i = j$, $Y_i = Y_j$ donc $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \mathbb{V}(Y_i) = p^2(1 - p^2) > 0$. Y_i et Y_j ne sont pas indépendantes.

• Si $j = i+1$, $Y_iY_j = X_{i-1}X_i^2X_{i+1} = X_{i-1}X_iX_{i+1}$ et $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \mathbb{E}(X_{i-1}X_iX_{i+1}) - \mathbb{E}(Y_i)\,\mathbb{E}(Y_j) = p^3 - p^4 > 0$ par indépendance de X_{i-1}, X_i et X_{i+1}. Ainsi, Y_i et Y_j ne sont pas non plus indépendantes.

• si $j > i+1$, alors Y_i dépend de X_{i-1} et X_i alors que Y_j dépend de X_{j-1} et X_j, ainsi, Y_i et Y_j sont indépendantes par le lemme des coalitions. Ainsi, $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = 0$.

c. Comme S_n est bornée, elle admet un moment d'ordre 2, donc une variance, et on a d'après l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV, pour $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2}$.

d. On traite trois cas selon le couple (n, m) :

- Si $n = m$, comme $Y_nY_m = Y_n^2 = Y_n$, on en déduit que $\mathbb{E}(Y_nY_m) = \mathbb{E}(Y_n) = p^2$.
- Si $|n - m| = 1$, $\mathbb{E}(Y_nY_m) = p^3$ d'après la question **b.**.
- Si $|n - m| \geqslant 2$, par indépendance de Y_n et Y_m, $\mathbb{E}(Y_nY_m) = \mathbb{E}(Y_n)\,\mathbb{E}(Y_m) = p^4$.

Les Y_n ne sont pas indépendants donc les hypothèses de la loi faible des grands nombres ne sont pas respectées. Par linéarité de l'espérance, comme $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{E}(Y_k) = p^2$, on a $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(Y_k) = \frac{np^2}{n} = p^2$.

Comme Y_n et Y_m sont indépendantes dès que $|n - m| \geqslant 2$, on a $\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(Y_k) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1})$ d'après le cours. Si $i \in [\![1;n-1]\!]$, $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \mathbb{E}(Y_iY_{i+1}) - \mathbb{E}(Y_i)\,\mathbb{E}(Y_{i+1}) = p^3 - p^4 = p^3(1-p)$ donc $\mathbb{V}(S_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p)$. Comme $p^3(1-p) \geqslant 0$, $V(S_n) \leqslant Cn$ avec $C = p^2(1-p^2) + 2p^3(1-p)$ donc $C = p^2(1-p)[1+p+2p] = [p(1-p)](1+3p)p \leqslant \frac{1}{4} \times 4 \times 1 = 1$ et $\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) \leqslant \frac{C}{n} \leqslant \frac{1}{n}$.

D'après l'inégalité de TCHEBYCHEV, on a la majoration $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n/n)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}$. Or

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n\varepsilon^2}=0$ donc, par encadrement, $\forall\varepsilon>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}-p^2\right|\geqslant\varepsilon\right)=0$ donc la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ satisfait les hypothèses de la loi faible des grands nombres même si elle n'en vérifie pas les hypothèses.

11.92 **a.** Le nombre de victoires V de Pierre parmi les $2n$ premières parties suit (les parties sont indépendantes mutuellement) une loi binomiale $\mathcal{B}(2n,p)$. Ainsi $a_{2n}=\mathbb{P}(V=n)=\dbinom{2n}{n}p^n(1-p)^{2n-n}=\dbinom{2n}{n}(p(1-p))^n$.
Bien sûr, il ne peut pas y avoir d'égalité du nombre de victoires après un nombre impair de parties.

b. Soit $x\neq 0$, si $u_n=a_{2n}x^{2n}$, alors $0<\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\dbinom{2(n+1)}{n+1}p^{n+1}(1-p)^{n+1}}{\dbinom{2n}{n}p^n(1-p)^n}x^2=\dfrac{2(2n+1)}{n+1}p(1-p)x^2$ qui tend vers $\ell=4p(1-p)x^2$. Par la règle ded'Alembert, si $|x|<\dfrac{1}{\sqrt{4p(1-p)}}$, alors $\ell<1$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ converge ce qui prouve que $R_a\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{4p(1-p)}}$. Si $|x|>\dfrac{1}{\sqrt{4p(1-p)}}$, on a $\ell>1$ et, par d'Alembert, $\sum\limits_{n\geqslant 0}u_n$ diverge donc $R_a\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{4p(1-p)}}$. Par conséquent, le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_{2n}x^{2n}$ vaut $R_a=\dfrac{1}{\sqrt{4p(1-p)}}$.
Il vaut donc $R_a=+\infty$ si $p=0$ ou $p=1$ qui sont des cas inintéressants où l'un ou l'autre des deux joueurs gagne presque sûrement toutes les parties.

c. Si $p\neq\dfrac{1}{2}$, on a $4p(1-p)=1-(1-2p)^2<1$ (parabole atteignant son maximum en $\dfrac{1}{2}$) donc $R_a>1$ et $A(1)$ est bien défini car $1\in]R_a;R_a[$ (intervalle ouvert de convergence).
Réciproquement, si $p=\dfrac{1}{2}$, alors $a_{2n}=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}}{e^{2n}}\times\dfrac{1}{2^{2n}}\times\dfrac{e^{2n}}{(2\pi n)n^{2n}}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ avec la formule de Stirling donc $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_{2n}$ diverge d'après Riemann et $A(1)$ n'est pas défini.
En conclusion : $A(1)$ existe si et seulement si $p\neq\dfrac{1}{2}$.

d. On sait que $\forall y\in]-1;1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+y}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}y^n$. Pour $x\in]-R_a;R_a[$, $y=-4p(1-p)x^2\in]-1;1[$,
$\dfrac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)x^2}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}4^np^n(1-p)^n(-1)^nx^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}p^n(1-p)^nx^{2n}=A(x)+1$. On en déduit bien que $\forall x\in]-R_a;R_a[$, $A(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}-1$.

e. Pour $n\geqslant 1$, posons les évènements $B_n=$ "il y a égalité pour la première fois après n parties" tel que $b_{2n}=\mathbb{P}(B_{2n})$ et $A_n=$ "il y a égalité après n parties" tel que $a_{2n}=\mathbb{P}(A_{2n})$. On pose $a_0=b_0=0$.
Pour $n\geqslant 1$, s'il y a égalité du nombre de parties gagnées après $2n$ parties, alors il y a eu égalité pour la première fois du nombre de parties gagnées au bout de $2k$ parties avec $k\in[\![1;n]\!]$. Ceci nous donne la partition suivante : $A_{2n}=\bigcup\limits_{k=1}^{n}(A_{2n}\cap B_{2k})$. Comme ces évènements sont incompatibles, on en déduit que $a_{2n}=\mathbb{P}(A_{2n})=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_{2n}\cap B_{2k})=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{P}_{B_{2k}}(A_{2n})\mathbb{P}(B_{2k})$. Clairement, pour tout entier $k\in[\![1;n-1]\!]$, on a $\mathbb{P}_{B_{2k}}(A_{2n})=a_{2(n-k)}$ (si on a égalité après $2k$ parties, avoir égalité après $2n$ parties revient à avoir égalité sur une période de $2(n-k)$ parties - elles sont indépendantes mutuellement). Par contre, comme $B_{2n}\subset A_{2n}$, on a $\mathbb{P}_{B_{2n}}(A_{2n})=1$. Ainsi $a_{2n}=b_{2n}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}b_{2k}a_{2(n-k)}=b_{2n}+\sum\limits_{k=0}^{n}b_{2k}a_{2(n-k)}$ car on a posé $a_0=b_0=0$.

Sous réserve de convergence, c'est-à-dire si $|x| < R$ où $R = \mathrm{Min}(R_a, R_b)$ (avec des notations évidentes), on a par produit de CAUCHY de séries absolument convergentes :

$$A(x)B(x) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_{2n}x^{2n}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} b_{2k}a_{2(n-k)}\Big)x^{2n}\Big) = A(x) - B(x).$$

Comme $B_{2n} \subset A_{2n}$, on a $0 \leqslant b_{2n} \leqslant a_{2n}$ donc $R_a \leqslant R_b$. On a donc $\forall x \in]-R_a; R_a[,\ B(x) = \dfrac{A(x)}{A(x)+1}$ d'après la relation de la question **b.**. Ainsi : $\forall x \in]-R_a; R_a[,\ B(x) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} - 1}{\dfrac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}} = 1 - \sqrt{1-4pqx^2}$.

f. Or, $\forall y \in]-1;1[,\ \sqrt{1+y} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n(n!)^2(2n-1)} y^n$. Pour $x \in]-R_a; R_a[$, $y = -4p(1-p)x^2 \in]-1;1[$ donc $B(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n(n!)^2(2n-1)} 4^n p^n(1-p)^n(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2(2n-1)} p^n(1-p)^n x^{2n}$. On peut identifier car les rayons sont strictement positifs et $\forall n \geqslant 1,\ b_{2n} = \dbinom{2n}{n}\dfrac{p^n(1-p)^n}{2n-1}$ (inutile ici).

Mais cette expression de b_{2n} nous permet de trouver R_b. En effet, pour $x \neq 0$, en posant $v_n = b_{2n}x^{2n}$, on a $0 < \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\dbinom{2(n+1)}{n+1}p^{n+1}(1-p)^{n+1}(2n-1)}{\dbinom{2n}{n}p^n(1-p)^n(2n+1)}x^2 = \dfrac{2(2n-1)}{n+1}p(1-p)x^2$ qui tend aussi vers $\ell = 4p(1-p)x^2$.

Comme à la question **c.**, on a $R_b = R_a = \dfrac{1}{\sqrt{4p(1-p)}}$. Si $p \neq \dfrac{1}{2}$, $1 \in]-R_b; R_b[$ donc $B(1)$ existe. Si $p = \dfrac{1}{2}$, $b_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2(2n-1)} p^n(1-p)^n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$ avec STIRLING à nouveau donc $B(1)$ existe pour tout $p \in [0;1]$.

Notons l'évènement $J =$ "ne jamais obtenir égalité du nombre de parties gagnées par Pierre et Marie". Alors on a clairement $\overline{J} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_{2n}$ (réunion d'évènements deux à deux incompatibles) donc $\mathbb{P}(\overline{J}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_{2n})$ (ce qui prouve que $B(1)$ existe dans tous les cas comme on l'a vérifié ci-dessus).

Ainsi, par σ-additivité : $\eta = \mathbb{P}(J) = 1 - \mathbb{P}(\overline{J}) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n} = 1 - B(1)$. Or, en posant $f_n : x \mapsto b_{2n}x^{2n}$, on a $||f_n||_{\infty,[0;1]} = b_{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_{2n}$ converge, ainsi par convergence normale de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0;1]$ et continuité de toutes les f_n, on a B continue sur $[0;1]$ (ce qui était évident si $R_b > 1$ mais pas clair si $p = \dfrac{1}{2}$). Ainsi $\eta = 1 - B(1) = 1 - \lim_{x\to 1^-} B(x) = \sqrt{1-4p(1-p)}$.

11.93 **a.** Bien sûr, les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

En effet, $(X_1 = n, X_2 = n) = \emptyset$ donc $\mathbb{P}(X_1 = n, X_2 = n) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X_1 = n) = p^n$ (par indépendance des personnes appelées) et $\mathbb{P}(X_2 = n) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = n) = \mathbb{P}(X_2 = n|X_1 = 0)\,\mathbb{P}(X_1 = 0) = p^n(1-p)^n \neq 0$.

Par conséquent, $\mathbb{P}(X_1 = n, X_2 = n) \neq \mathbb{P}(X_1 = n)\,\mathbb{P}(X_2 = n)$.

b. X_1 suit naturellement la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par indépendance des réponses des n personnes. La famille $((X_1 = j))_{0\leqslant j\leqslant n}$ constitue un système complet d'évènements donc $\mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k)$ pour tout pour $k \in [\![0;n]\!]$. Or $\mathbb{P}(X_1 = j, X_2 = k) = 0$ si $n - j < k$ et, comme la loi de X_2 sachant $(X_1 = j)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n-j,p)$ si $n - j \geqslant k$, on a $\mathbb{P}(X_2 = k|X_1 = j) = \dbinom{n-j}{k}p^k(1-p)^{n-j-k}$. Ainsi,

$\mathbb{P}(X_2=k)=\sum\limits_{j=0}^{n-k}\binom{n-j}{k}p^k(1-p)^{n-j-k}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}=\binom{n}{k}(1-p)^kp^k\sum\limits_{j=0}^{n-k}\binom{n-k}{j}((1-p)^2)^{n-j-k}p^j$

donc $\mathbb{P}(X_2=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^k((1-p)^2+p)^{n-k}=\binom{n}{k}(p(1-p))^k(1-p(1-p))^{n-k}$: $X_2\sim\mathcal{B}(n,p(1-p))$.

Y_i est le premier succès dans une répétition infinie de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de paramètre p donc, d'après le cours, Y_i suit la loi géométrique de paramètre p pour tout $i\in[\![1;n]\!]$ donc $\forall m\geqslant 1,\ \mathbb{P}(Y_i=m)=p(1-p)^{m-1}$.

c. Par construction, pour $k\geqslant 3$, on a $X_k(\Omega)=[\![0;n]\!]$ et, si $j\in[\![0;n]\!]$, pour que l'on ait $X_k=j$, il est nécessaire et suffisant qu'exactement j clients vérifient $Y_i=k$ (eus au téléphone exactement lors de l'appel k) et $n-j$ clients vérifient $Y_i\neq k$ (pas eus lors de l'appel k). Ainsi, $(X_k=j)=\bigcup\limits_{\substack{I\subset[\![1;n]\!]\\ card(I)=j}}\Big(\bigcap\limits_{i\in I}(Y_i=k)\cap\bigcap\limits_{i\notin I}(Y_i\neq k)\Big)$.

Cette réunion est disjointe, comporte $\binom{n}{j}$ termes de probabilités égales car les $(Y_i)_{1\leqslant n}$ sont mutuellement indépendants et suivent la même loi. Or $\mathbb{P}(Y_i=k)=p(1-p)^{k-1}$ car Y_i suit la loi géométrique de paramètre p et donc $\mathbb{P}(Y_i\neq k)=1-p(1-p)^{k-1}$. Par conséquent, $\mathbb{P}(X_k=j)=\binom{n}{j}(p(1-p)^{k-1})^j(1-p(1-p)^{k-1})^{n-j}$ donc X_k suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p(1-p)^{k-1})$. Plus simplement, on aurait pu écrire que $X_k=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{(Y_i=k)}$ et les variables aléatoires $(\mathbb{1}_{(Y_i=k)})_{1\leqslant i\leqslant n}$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p(1-p)^{k-1}$ d'après la question **b.** puisque Y_i suit la loi géométrique de paramètre p. D'après le cours, la somme X_k de ces n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p(1-p)^{k-1})$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p(1-p)^{k-1})$.

d. Par définition, pour $k\in\mathbb{N}^*$, on a $S_k(\Omega)=[\![0;n]\!]$ et, si $j\in[\![0;n]\!]$, pour que l'on ait $S_k=j$, il est nécessaire et suffisant qu'exactement j clients vérifient $Y_i\leqslant k$ (eus au téléphone avant l'appel k) et $n-j$ clients vérifient $Y_i>k$ (pas eus lors des k premiers appels). Ainsi, $(S_k=j)=\bigcup\limits_{\substack{I\subset[\![1;n]\!]\\ card(I)=j}}\Big(\bigcap\limits_{i\in I}(Y_i\leqslant k)\cap\bigcap\limits_{i\notin I}(Y_i>k)\Big)$.

Cette réunion est disjointe, comporte $\binom{n}{j}$ termes de probabilités égales car les $(Y_i)_{1\leqslant n}$ sont mutuellement indépendants et suivent la même loi. Or $\mathbb{P}(Y_i>k)=(1-p)^k$ car Y_i suit la loi géométrique de paramètre p et donc $\mathbb{P}(Y_i\leqslant k)=1-\mathbb{P}(Y_i>k)=1-(1-p)^k$. Par conséquent, $\mathbb{P}(S_k=j)=\binom{n}{j}(1-(1-p)^k)^j(1-p)^{k(n-j)}$ donc S_k suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,1-(1-p)^k)$. Plus simplement, on aurait pu écrire que $S_k=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{(Y_i\leqslant k)}$ et les variables aléatoires $(\mathbb{1}_{(Y_i\leqslant k)})_{1\leqslant i\leqslant n}$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-p)^k$ d'après la question **b.** puisque Y_i suit la loi géométrique de paramètre p. D'après le cours, la somme S_k de ces n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(1-(1-p)^k)$ suit la loi $\mathcal{B}(n,1-(1-p)^k)$.

e. Par définition de la variable aléatoire N, on a $N=Max(Y_1,\cdots,Y_n)$ de sorte que, pour $k\in\mathbb{N}^*$, on a $(N\leqslant k)=\bigcap\limits_{i=1}^{n}(Y_i\leqslant k)$ donc, par indépendance mutuelle entre les personnes appelées, on parvient à la relation $\mathbb{P}(N\leqslant k)=\prod\limits_{i=1}^{n}\mathbb{P}(Y_i\leqslant k)=(1-(1-p)^k)^n$. Comme, pour $k\in\mathbb{N}^*$, on a $(N\leqslant k)=(N=k)\cup(N\leqslant k-1)$ (incompatibles), on a $\mathbb{P}(N=k)=\mathbb{P}(N\leqslant k)-\mathbb{P}(N\leqslant k-1)=(1-(1-p)^k)^n-(1-(1-p)^{k-1})^n$.

On aurait aussi pu écrire que $(N\leqslant k)=(S_k=n)$ avec directement $\mathbb{P}(N=k)=(1-(1-p)^k)^n$ avec la question **d.** ou que $(N=k)=(S_k=n)\setminus(S_{k-1}=n)$ (le premier instant où on a contacté les n personnes) avec $(S_{k-1}=n)\subset(S_k=n)$ donc $\mathbb{P}(N=n)=\mathbb{P}(S_k=n)-\mathbb{P}(S_{k-1}=n)$ avec la même conclusion.

On sait que N admet une espérance finie si et seulement $\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}(N>k)$ converge. Or, avec ce qui précède, il vient $\mathbb{P}(N>k)=1-\mathbb{P}(N\leqslant k)=1-(1-(1-p)^k)^n=1-\exp(n\ln(1-(1-p)^k))$ et, comme $\ln(1-(1-p)^k)\underset{+\infty}{=}-(1-p)^k+o((1-p)^k)$ et que $e^u\underset{0}{=}1+u+o(u)$, en composant les développements limités d'ordre 1, on a $\mathbb{P}(N>k)\underset{+\infty}{=}n(1-p)^k+o((1-p)^k)\underset{+\infty}{\sim}n(1-p)^k\underset{+\infty}{=}o\Big(\frac{1}{k^2}\Big)$ donc la série $\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}(N>k)$ converge. Ainsi, N admet une espérance finie et $\mathbb{E}(N)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N>k)$. Or, par le binôme de NEWTON, $\mathbb{P}(N>k)=1-(1-(1-p)^k)^n=1-\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}((1-p)^k)^j=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\binom{n}{j}(1-p)^{kj}$ et toutes les séries géométriques $\sum_{k\geqslant 0}(1-p)^{kj}$ convergent pour $j\geqslant 1$ car $|(1-p)^j|<1$. Ainsi, par somme d'un nombre fini de séries convergentes, on a $\mathbb{E}(N)=\sum_{j=1}^{n}\Big((-1)^{j+1}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{kj}\Big)=\sum_{j=1}^{n}\dfrac{(-1)^{j+1}\binom{n}{j}}{1-(1-p)^j}$.

11.94 Si $n=1$, la seule permutation de $[\![1;1]\!]=\{1\}$ est l'identité donc $F_1=1$ et $\mathbb{E}(F_1)=1$, $V(F_1)=0$.

Si $n\geqslant 2$, soit $k\in[\![1;n]\!]$, on définit l'évènement $A_k=$ “k est fixe” et on pose $X_k=\mathbb{1}_{A_k}$ de sorte que $X_k=1$ si k est fixe et $X_k=0$ s'il ne l'est pas. Par définition, on a $F_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ donc, par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(F_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)$. Parmi les $n!$ permutations de $[\![1;n]\!]$, il y a en a $(n-1)!$ qui laisse fixe l'élément k (il faut permuter les $n-1$ autres éléments), ainsi, comme on prend les permutations selon la loi uniforme, on a $\mathbb{P}(A_k)=\dfrac{(n-1)!}{n!}=\dfrac{1}{n}$. Alors, $\mathbb{E}(F_n)=1$.

Comme $\mathbb{V}(F_n)=\mathbb{E}(F_n^2)-\mathbb{E}(F_n)^2$, on calcule $F_n^2=\sum_{k=1}^{n}X_k^2+\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}}X_iX_j=\sum_{k=1}^{n}X_k+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}X_iX_j$ car $X_k^2=X_k$. Or, si $i\neq j$, $X_iX_j=\mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{A_j}=\mathbb{1}_{A_i\cap A_j}$ donc $\mathbb{E}(X_iX_j)=\mathbb{P}(A_i\cap A_j)=\dfrac{(n-2)!}{n!}=\dfrac{1}{n(n-1)}$ comme avant. Il y a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ couples $(i,j)\in[\![1;n]\!]$ tels que $i<j$, d'où $\mathbb{E}(F_n^2)=n\times\dfrac{1}{n}+2\times\dfrac{n(n-1)}{2}\times\dfrac{1}{n(n-1)}=2$ et $\mathbb{V}(F_n)=2-1=1$. En ce qui concerne l'espérance et la variance, c'est comme si F_n suivait la loi de POISSON de paramètre $\lambda=1$ car $\mathbb{E}(F_n)=\mathbb{V}(F_n)=1$.

En notant d_n le nombre de dérangements de S_n, c'est-à-dire les permutations sans aucun point fixe, alors $\mathbb{P}(F_n=k)=\dfrac{\binom{n}{k}\times d_{n-k}}{n!}$ car il faut d'abord choisir les k points fixes parmi les n entiers de $[\![1;n]\!]$ et ensuite “déranger” les $n-k$ autres entiers pour ne pas faire évoluer le nombre de points fixes. On se rappelle que $d_n=n!\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}$ donc $d_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{n!}{e}$. Ainsi, pour k fixé, dès que $n\geqslant k$, on a $\mathbb{P}(F_n=k)=\dfrac{1}{ek!}=\dfrac{1^ke^{-1}}{k!}$ ce qui prouve que la suite de variables aléatoires $(F_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi de POISSON de paramètre 1 comme attendu.

11.95 **a.** Soit un entier $n\in\mathbb{N}^*$, par définition d'une probabilité conditionnelle, on a déjà $u_n\in[0;1]$. Si on avait $u_n=\dfrac{\mathbb{P}(X=n,X>n-1)}{\mathbb{P}(X>n-1)}=1$, on aurait $\mathbb{P}(X=n,\ X>n-1)=\mathbb{P}(X>n-1)=\mathbb{P}(X=n)$ car $(X=n,\ X>n-1)=(X=n)$. Or $(X>n-1)=(X=n)\cup(X>n)$ et ces deux évènements sont incompatibles donc $\mathbb{P}(X > n-1) = \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X > n)$ et on aurait donc $\mathbb{P}(X > n) = 0$ contrairement à l'hypothèse de l'énoncé. On a montré par l'absurde que $u_n \neq 1$ et on a bien $u_n \in [0;1[$.

De plus, comme $(X > n-1) = (X > 1) \cap (X > 2) \cap \cdots \cap (X > n-1)$, d'après la formule des probabilités composées et car $\bigcap_{i=1}^{k-1} (X > i) = (X > k-1)$ pour $k \in [\![2; n-1]\!]$, on a $\mathbb{P}(X > n-1) = \mathbb{P}(X > 1) \prod_{k=2}^{n-1} \mathbb{P}(X > k | X > k-1)$. À nouveau, pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, on a $(X > k-1) = (X = k) \cup (X > k)$ donc $\mathbb{P}(X > k-1) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X > k)$ ce qui, en divisant par $\mathbb{P}(X > k-1)$, devient $1 = \mathbb{P}(X = k | X > k-1) + \mathbb{P}(X > k | X > k-1)$ puis $\mathbb{P}(X > k | X > k-1) = 1 - u_k$. Ainsi, comme $\mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}(X > 1 | X > 0) = 1 - u_1$ car $(X > 0) = \Omega$ sachant que X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a bien $\mathbb{P}(X > n-1) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - u_k)$.

b. D'après la question **a.**, $\ln(\mathbb{P}(X > n-1)) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 - u_k)$. Or la suite d'évènements $\big((X > n-1)\big)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et $\bigcap_{n=1}^{+\infty} (X > n-1) = \emptyset$ car X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc, par continuité décroissante, on a $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X > n-1) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ d'où $\lim_{n \to +\infty} \ln(\mathbb{P}(X > n-1)) = -\infty$ ce qui justifie avec la relation précédente que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln(1 - u_n)$ diverge car la suite de ses sommes partielles tend vers $-\infty$. Traitons deux cas :

- si $(u_n)_{n \geqslant 1}$ ne tend pas vers 0, alors $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ diverge grossièrement.
- si $(u_n)_{n \geqslant 1}$ tend vers 0, alors $\ln(1 - u_n) \underset{+\infty}{\sim} -u_n < 0$ et, par comparaison, $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ diverge.

Dans les deux cas, on a la même conclusion, $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ diverge.

c. On admet qu'une telle variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ existe si on arrive à trouver une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \in [0;1]$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$ et qu'on impose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n) = p_n$.

Posons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - v_k) - \prod_{k=1}^{n} (1 - v_k) = v_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - v_k)$ (car Y joue ici le rôle du X de la question **a.** où on avait $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X > n-1) - \mathbb{P}(X > n)$). Par hypothèse, on a bien $p_n \in [0;1[$. De plus, $p_1 = v_1$, $p_2 = v_2(1 - v_1)$ donc $p_1 + p_2 = v_1 + v_2 - v_1 v_2 = 1 - (1 - v_1)(1 - v_2)$, ce qui nous fait conjecturer que $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - v_k)$. Cette relation est vérifiée si $n = 1$. Supposons-la vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, alors $p_{n+1} = v_{n+1} \prod_{k=1}^{n} (1 - v_k)$ donc, par hypothèse de récurrence, il vient $\sum_{k=1}^{n+1} p_k = p_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} p_k = v_{n+1} \prod_{k=1}^{n} (1 - v_k) + 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - v_k) = 1 - \prod_{k=1}^{n+1} (1 - v_k)$. Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - v_k)$. Or $\ln\Big(\prod_{k=1}^{n} (1 - v_k)\Big) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 - v_k) \leqslant -\sum_{k=1}^{n} v_k$ par l'inégalité classique $\ln(1 + x) \leqslant x$ pour $x > -1$. Comme $\sum_{n \geqslant 1} v_n$ diverge, par encadrement, $\lim_{n \to +\infty} \ln\Big(\prod_{k=1}^{n} (1 - v_k)\Big) = -\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - v_k) = 0$ et on a donc $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$ comme attendu.

Il existe donc une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n) = p_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y > n-1) = \sum_{k=n}^{+\infty} p_k = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - v_k) > 0$ car $(Y > n-1) = \bigcup_{k=n}^{+\infty} (Y = k)$ (réunion incompatible) et $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$, $v_k < 1$ par hypothèse. Enfin, avec ce qui précède, on obtient bien la relation

$\mathbb{P}(Y=n|Y>n-1)=\dfrac{\mathbb{P}(Y=n,Y>n-1)}{\mathbb{P}(Y>n-1)}=v_n$ car $(Y=n,Y>n-1)=(Y=n)$.

11.96 **a.** D'après l'énoncé et par indépendance mutuelle des $n=5$ tirages puisque les tirages se font avec remise, comme la probabilité de tirer une boule blanche est de $p=\dfrac{2}{2+8}=\dfrac{1}{5}$, la variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)=\mathcal{B}\left(5,\dfrac{1}{5}\right)$. D'après le cours, $\mathbb{E}(X)=np=1$ et $\mathbb{V}(X)=np(1-p)=\dfrac{4}{5}$.

b. Le nombre de boules noires tirées vaut $X'=5-X$ et, d'après l'énoncé, $Y=2X-3X'=2X-3(5-X)=5X-15$. Ainsi, $Y(\Omega)=\{-15,-10,-5,0,5,10\}$ et $\forall k\in[\![0;5]\!]$, $\mathbb{P}(Y=5k-15)=\dbinom{5}{k}p^k(1-p)^{5-k}$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Y)=5\,\mathbb{E}(X)-15=-10$. De plus, on sait que $\mathbb{V}(Y)=\mathbb{V}(5X-15)=5^2\,\mathbb{V}(X)=20$.

c. Cette fois-ci, comme il n'y a plus remise, on a $X(\Omega)=\{0,1,2\}$. Or, en notant $B_k=$ "on tire une boule blanche ou tirage k", on a $(X=0)=\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}\cap\overline{B_4}\cap\overline{B_5}$ donc, par la formule des probabilités composées, on obtient $\mathbb{P}(X=0)=\dfrac{8}{10}\times\dfrac{7}{9}\times\dfrac{6}{8}\times\dfrac{5}{7}\times\dfrac{4}{6}=\dfrac{5\times 4}{10\times 9}=\dfrac{2}{9}$. De même, on peut décomposer l'évènement $(X=1)$ en les cinq évènements incompatibles suivants :

- $B_1\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}\cap\overline{B_4}\cap\overline{B_5}$: une boule blanche au premier tirage et, après, des boules noires.
- $\overline{B_1}\cap B_2\cap\overline{B_3}\cap\overline{B_4}\cap\overline{B_5}$: une boule blanche au second tirage uniquement.
- $\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap B_3\cap\overline{B_4}\cap\overline{B_5}$: une boule blanche au troisième tirage exclusivement.
- $\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}\cap B_4\cap\overline{B_5}$: une boule blanche au quatrième tirage seulement.
- $\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}\cap\overline{B_4}\cap B_5$: quatre boules noires d'affilée et on termine par une boule blanche.

Ainsi, toujours par la formule des probabilités composées, on obtient $\mathbb{P}(X=1)$ sous forme de somme avec $\mathbb{P}(X=1)=\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{6}+\frac{8}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{8}\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{6}+\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{6}{7}\times\frac{5}{6}+\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}+\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}$, ce qui donne après calculs $\mathbb{P}(X=1)=\dfrac{5}{9}$ car ces cinq évènements sont la même probabilité qui vaut $\dfrac{1}{9}$. Enfin, comme $(X=0)\cup(X=1)\cup(X=2)=\Omega$, on a $\mathbb{P}(X=2)=1-\mathbb{P}(X=0)-\mathbb{P}(X=1)=\dfrac{2}{9}$.

On revient à la définition de l'espérance $\mathbb{E}(X)=\sum\limits_{x\in X(\Omega)}x\,\mathbb{P}(X=x)=0\times\dfrac{2}{9}+1\times\dfrac{5}{9}+2\times\dfrac{2}{9}=1$ (comme dans le cas "avec remise") et de la variance $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)=(0-1)^2\times\dfrac{2}{9}+(1-1)^2\times\dfrac{5}{9}+(2-1)^2\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{4}{9}$.

d. À nouveau, on a $Y=5X-15$ donc $\mathbb{E}(Y)=5\,\mathbb{E}(X)-15=-10$ et $\mathbb{V}(Y)=25\,\mathbb{V}(X)=\dfrac{100}{9}$.

11.97 **a.** Comme $\text{rang}\,(U{}^tU)\leqslant\text{Min}(\text{rang}\,(U),\text{rang}\,({}^tU))\leqslant 1$ car U est une matrice colonne, on a $\text{rang}\,(M)\in\{0,1\}$. Or $\text{Tr}\,(M)=\text{Tr}\,(U{}^tU)=||U||^2$ donc si $M=0$, on a $U=0$ et, si $U=0$, il est clair que $M=0$. Ainsi, $M=0\Longleftrightarrow\text{rang}\,(M)=0\Longleftrightarrow U=0$ donc $\text{rang}\,(M)$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $q=\mathbb{P}(U\neq 0)$.

Comme $(U=0)=\bigcap\limits_{k=1}^{n}(X_k=0)$ et que les variables aléatoires $X_1,\cdots,X_n$ sont mutuellement indépendantes, $\mathbb{P}(\text{rang}\,(M)=0)=\mathbb{P}(U=0)=\prod\limits_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k=0)=(1-p)^n$ d'où $\mathbb{P}(\text{rang}\,(M)=1)=1-(1-p)^n$.

Ainsi, $\text{rang}\,(M)$ suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(q)$ de paramètre $q=1-(1-p)^n$.

De plus $\text{Tr}\,(M)=\sum\limits_{k=1}^{n}X_i^2=\sum\limits_{k=1}^{n}X_i$ car comme X_i suit une loi de Bernoulli, on a $X_i^2=X_i$. À nouveau, comme $X_1,\cdots,X_n$ sont mutuellement indépendantes et suivent toutes le loi de Bernoulli de paramètre p, on sait d'après le cours que $\text{Tr}\,(M)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

b. Classiquement, on a $M^2 = U^tUU^tU = U(^tUU)^tU = ||U||^2M$ et $||U||^2 = \text{Tr}\ (^tUU) = \text{Tr}\ (U^tU) = \text{Tr}\ (M)$ donc $M^2 = \text{Tr}\ (M)M$. On en déduit que $(M^2 = M) = (\text{Tr}\ (M) = 1) \cup (M = 0)$ (réunion disjointe) donc $\mathbb{P}(M^2 = M) = \mathbb{P}(\text{Tr}\ (M) = 1) + \mathbb{P}(M = 0)$ mais d'après la question **a.** on a $\mathbb{P}(\text{Tr}\ (M) = 1) = \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1}$ car $\text{Tr}\ (M)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. La probabilité que la matrice M soit une matrice de projection est donc $\mathbb{P}(M^2 = M) = np(1-p)^{n-1} + (1-p)^n = (1-p)^{n-1}((n-1)p+1)$.

c. On calcule $S = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} X_iX_j = \text{Tr}\ (M) + 2\sum\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant n} X_iX_j$, il s'agit de la somme de toutes les cases de la matrice M. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(\text{Tr}\ (M)) + 2\sum\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant n} \mathbb{E}(X_i)\,\mathbb{E}(X_j)$ car X_i et X_j sont indépendantes. Il y a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ couples $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tels que $i < j$, $\mathbb{E}(X_i) = p$ et $\mathbb{E}(\text{Tr}\ (M)) = np$ d'après la question **a.** donc $\mathbb{E}(S) = np + 2\dfrac{n(n-1)}{2}p^2 = np(1+(n-1)p)$.

On sait que $\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}(S^2) - \mathbb{E}(S)^2$. Or $S^2 = \Big(\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} X_iX_j\Big)\Big(\sum\limits_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} X_kX_\ell\Big) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j,k,\ell \leqslant n} X_iX_jX_kX_\ell$. En considérant les quadruplets (i,j,k,ℓ) selon le cardinal de $A = \{i,j,k,\ell\}$, la contribution à $\mathbb{E}(S^2)$ est :

- np pour les n quadruplets (i,i,i,i).
- $4n(n-1)p^2$ pour les $4n(n-1)$ quadruplets $(i,i,i,j), \cdots, (j,i,i,i)$ avec $i \neq j$ car $X_i^3 = X_i$ et que X_i et X_j sont des variables aléatoires indépendantes.
- $3n(n-1)p^2$ pour les $3n(n-1) = \binom{4}{2}\binom{n}{2}$ quadruplets $(i,i,j,j), \cdots, (j,j,i,i)$ avec $i \neq j$ car i et j jouent des rôles symétriques.
- $6n(n-1)(n-2)p^3$ pour les $6n(n-1)(n-2) = 12n\binom{n-1}{2}$ quadruplets $(i,i,j,k), \cdots, (j,k,i,i)$ tels que $\text{card}\,(A) = 3$ car j et k jouent des rôles symétriques.
- $n(n-1)(n-2)(n-3)p^4$ pour les $n(n-1)(n-2)(n-3)$ quadruplets (i,j,k,ℓ) tels que $\text{card}\,(A) = 4$.

Comme il y a n^4 quadruplets $(i,j,k,\ell) \in [\![1;n]\!]^4$, on vérifie qu'on n'a oublié aucun quadruplet ci-dessus car $n^4 = n + 4n(n-1) + 3n(n-1) + 6n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)(n-3)$.

Ainsi, $\mathbb{E}(S^2) = np + 7n(n-1)p^2 + 6n(n-1)(n-2)p^3 + n(n-1)(n-2)(n-3)p^4$ et, avec la formule de König-Huygens, on a donc $\mathbb{V}(S) = np + 7n(n-1)p^2 + 6n(n-1)(n-2)p^3 + n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 - (np(1+(n-1)p))^2$.

11.98 **a.** Par définition, $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et, comme $X \leqslant N$, on a $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. On suppose qu'il y a indépendance mutuelle pour le genre des N enfants. Soit $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, traitons deux cas :

- Si $k > n$, comme $X \leqslant N$ par définition, on a $\mathbb{P}(N = n, X = k) = 0$.
- Si $0 \leqslant k \leqslant n$, à $N = n$ fixé, le nombre de filles suit, par l'indépendance mutuelle supposée, la loi binomiale de paramètres n et p de sorte que $\mathbb{P}(N = n, X = k) = \mathbb{P}(N = n) \times \mathbb{P}(X = k\ |N = n)$ donne la loi conjointe $\mathbb{P}(N = n, X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

b. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $(X = k) = \bigcup\limits_{n=k}^{+\infty}(X = k, N = n)$ (réunion incompatible) donc, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(X = k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty}\mathbb{P}(N = n, X = k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \times \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \dfrac{\lambda^kp^ke^{-\lambda}}{k!}\sum\limits_{n=k}^{+\infty}\dfrac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}$. Bien sûr, comme $\big((N = n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, la formule des probabilités totales donne aussi $\mathbb{P}(X=k)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n,X=k)=\sum\limits_{n=k}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n,X=k)$ car $\mathbb{P}(X=k,N=n)=0$ si $n<k$. On pose $i=n-k$ et $\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{\lambda^k p^k e^{-\lambda}}{k!}\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\dfrac{(\lambda(1-p))^i}{i!}=\dfrac{\lambda^k p^k e^{-\lambda}}{k!}e^{\lambda(1-p)}=\dfrac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}$ en reconnaissant une série exponentielle. Ainsi, X suit la loi de POISSON de paramètre λp.

11.99 **a.** Comme Y est à valeurs positives, on a $0\leqslant X\leqslant Z$. Et comme Z suit une loi géométrique, Z admet une espérance finie. On en déduit par comparaison que X admet aussi une espérance finie.
De même, Z^2 admet aussi une espérance finie car Z admet une variance finie. Ainsi, comme $0\leqslant X^2\leqslant Z^2$, la variable aléatoire X^2 admet une espérance finie donc X admet une variance finie.
Par linéarité de l'espérance et d'après le cours, $\mathbb{E}(Z)=\dfrac{1}{p}=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)+1=2\,\mathbb{E}(X)+1$ donc $\mathbb{E}(X)=\dfrac{1-p}{2p}$.
Puisque X et Y sont indépendantes, $\mathbb{V}(Z)=\dfrac{1-p}{p^2}=\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)=2\,\mathbb{V}(X)$ donc $\mathbb{V}(X)=\dfrac{1-p}{2p^2}$.

b. Comme le rayon de convergence de toute série génératrice est supérieur à 1, et que d'après le cours $\forall t\in]-1;1[,\ G_Z(t)=\dfrac{pt}{1-(1-p)t}$, on a $\forall t\in]-1;1[,\ G_{X+Y+1}(t)=\mathbb{E}(t^{X+Y+1})=\mathbb{E}(tt^{X+Y})=t\,\mathbb{E}(t^{X+Y})$ par linéarité de l'espérance. De plus, comme X et Y sont indépendantes, $\mathbb{E}(t^{X+Y})=G_{X+Y}(t)=G_X(t)G_Y(t)$ donc $G_{X+Y}(t)=tG_X(t)G_Y(t)$. Mais comme X et Y suivent la même loi, on a $G_X=G_Y$ donc $G_Z(t)=tG_X(t)^2$. On en déduit donc que $\forall t\in]-1;1[,\ G_X(t)=\sqrt{\dfrac{p}{1-(1-p)t}}$ car G_X est positive sur $]-1;1[$.

c. On sait que $\forall x\in]-1;1[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}x^n$ ce qui donne, en remplaçant x par $-(1-p)t$, $\forall t\in[-1;1]\ G_X(t)=\sqrt{p}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}(-1)^n(1-p)^nt^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{p}\,(2n)!(1-p)^n}{4^n(n!)^2}t^n$. En identifiant les coefficients, par unicité du développement en série entière, comme le rayon R de convergence vérifie $R\geqslant 1$, on a la loi de X donnée par $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n)=\dfrac{\sqrt{p}\,(2n)!(1-p)^n}{4^n(n!)^2}$.

11.100 **a.** On a $Y(\Omega)\subset(\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\})\setminus\{1\}$ par construction. Pour $k\geqslant 2$, en notant N_i le numéro du jeton obtenu au tirage i, on a $(Y=k)=\bigcup\limits_{\substack{1\leqslant a,b\leqslant 3\\ a\neq b}}(N_1=a,\cdots,N_{k-1}=a,N_k=b)$ (on tire d'abord tout le temps le numéro a et enfin, au tirage k, on obtient le numéro b). Ces évènements étant incompatibles, comme il y a 6 couples (a,b) possibles, que les N_i sont mutuellement indépendantes par hypothèse et suivent toutes la loi uniforme sur $[\![1;3]\!]$, $\mathbb{P}(Y=k)=6\Big(\prod\limits_{i=1}^{k-1}\mathbb{P}(N_i=a)\Big)\mathbb{P}(N_k=b)=\frac{6}{3^k}$. $(Y\neq+\infty)=\bigcup\limits_{k=2}^{+\infty}(Y=k)$ (réunion incompatible) donc, par σ-additivité, $\mathbb{P}(Y\neq+\infty)=\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{6}{3^k}=\frac{6}{9}\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{3^{k-2}}=\frac{6}{9}\times\dfrac{1}{1-(1/3)}=1$. Comme attendu, on en conclut que $\mathbb{P}(Y=+\infty)=0$ (il est presque sûr d'arriver à avoir deux numéros différents).

b. D'après la question précédente, $(Y-1)(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y-1=k)=\frac{6}{3^{k+1}}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ donc $Y-1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$. Ainsi, d'après le cours et par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(Y-1)+1=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$ et $\mathbb{V}(Y)=\mathbb{V}(Y-1)=\dfrac{1-(2/3)}{(2/3)^2}=\frac{3}{4}$.

c. Pour $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$, on a $\mathbb{P}(Y=m,Z=n)=0$ si $n\leqslant m$ ou si $m=1$ par construction. Si $n>m\geqslant 2$, on a $(Y=m,Z=n)=(Y=m,Z-Y=n-m)$ et $Z-Y$ représente le temps d'attente du troisième numéro une fois obtenus les deux premiers. $Z-Y$ et Y sont donc indépendants et $Z-Y$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$ donc $\mathbb{P}(Y=m,Z=n)=\mathbb{P}(Y=m)\,\mathbb{P}(Z-Y=n-m)=\frac{6}{3^m}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-m-1}\times\frac{1}{3}=\frac{2^{n-m}}{3^{n-1}}$.

d. Par construction, $Z(\Omega)\subset(\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\})\setminus\{1,2\}$. Pour $n\geqslant 3$, $(Z=n)=\bigcup\limits_{m=2}^{n-1}(Y=m,Z=n)$ (réunion incompatible) donc $\mathbb{P}(Z=n)=\sum\limits_{m=2}^{n-1}\frac{2^{n-m}}{3^{n-1}}=\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}\sum\limits_{m=2}^{n-1}\frac{1}{2^{m-2}}=\frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}\times\frac{1-(1/2)^{n-2}}{1-(1/2)}=\frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}}$.

À nouveau, $(Z\neq+\infty)=\bigcup\limits_{n=3}^{+\infty}(Z=n)$ donc $\mathbb{P}(Z\neq+\infty)=\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}}=\frac{4}{9}\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{2^{n-3}}{3^{n-3}}-\frac{2}{9}\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{3^{n-3}}$ donc $\mathbb{P}(Z\neq 0)=\frac{4}{9}\times\frac{1}{1-(2/3)}-\frac{2}{9}\times\frac{1}{1-(1/3)}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$. Comme attendu, on a $\mathbb{P}(Z=+\infty)=0$ (il est presque sûr d'arriver à avoir les trois numéros). $\sum\limits_{n\geqslant 3}n\,\mathbb{P}(Z=n)$ converge car, par croissances comparées, $n\,\mathbb{P}(Z=n)=n\frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}}\underset{+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, $\mathbb{E}(Z)=\sum\limits_{n=3}^{+\infty}n\,\mathbb{P}(Z=n)=\sum\limits_{n=3}^{+\infty}n\frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}}$. Or, pour tout $x\in]-1;1[$, $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}nx^{n-1}=\left(\sum\limits_{n=3}^{+\infty}x^n\right)'=\left(\frac{1}{1-x}-1-x-x^2\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}-1-2x$ en dérivant terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence. En écrivant $\mathbb{E}(Z)=\sum\limits_{n=3}^{+\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-2\sum\limits_{n=3}^{+\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, on a donc $\mathbb{E}(Z)=\frac{1}{(1-(2/3))^2}-1-2(2/3)-2\left(\frac{1}{(1-(1/3))^2}-1-2(1/3)\right)=\frac{11}{2}$.

On pouvait dire, par indépendance de Y et $Z-Y$, que $\mathbb{E}(Z)=\mathbb{E}(Y)+\mathbb{E}(Z-Y)=\frac{5}{2}+3$ puisque $Z-Y$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

11.101 **a.** Par construction, $(X_n,Y_n)(\Omega)=\{(x,y)\in[\![1;n]\!]^2\mid x\geqslant y\}$. Et comme on peut supposer que la loi de X_n est uniforme sur $[\![1;n]\!]$ et que la loi de Y_n sachant $(X_n=x)$ est aussi uniforme sur $[\![1;x]\!]$, on a $\forall x\in[\![1;n]\!]$, $\forall y\in[\![1;x]\!]$, $\mathbb{P}(X_n=x,Y_n=y)=\mathbb{P}(X_n=x)\,\mathbb{P}(Y_n=y\mid X_n=x)=\frac{1}{n}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{nx}$.

b. On a $Y_n(\Omega)=[\![1;n]\!]$ et, pour $y\in[\![1;n]\!]$, $(Y_n=y)=\bigcup\limits_{x=y}^{n}(X_n=x,Y_n=y)$ (car on ne peut tirer la boule numéro y que dans une urne de numéro x tel que $y\leqslant x\leqslant n$). Comme ces évènements sont incompatibles, on a $\mathbb{P}(Y_n=y)=\sum\limits_{x=y}^{n}\mathbb{P}(X_n=x,Y_n=y)=\sum\limits_{x=y}^{n}\frac{1}{nx}$.

c. Y_n est bornée donc admet une espérance finie, $\mathbb{E}(Y_n)=\sum\limits_{y=1}^{n}y\,\mathbb{P}(Y_n=y)=\sum\limits_{y=1}^{n}\sum\limits_{x=y}^{n}\frac{y}{nx}=\sum\limits_{1\leqslant y\leqslant x\leqslant n}\frac{y}{nx}$ et, en inversant les sommes doubles, $\mathbb{E}(Y_n)=\frac{1}{n}\sum\limits_{x=1}^{n}\left(\frac{1}{x}\sum\limits_{y=1}^{x}y\right)=\frac{1}{n}\sum\limits_{x=1}^{n}\frac{x+1}{2}=\frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n\right)=\frac{n+3}{4}$.
On vérifie bien que si $n=1$, on a $\mathbb{E}(Y_1)=1$ ce qui est logique car, dans ce cas, on a $X_1=Y_1=1$ sûrement.
d. De même, Y_n^2 étant bornée, elle admet une espérance finie et $\mathbb{E}(Y_n^2)=\sum\limits_{y=1}^{n}y^2\,\mathbb{P}(Y_n=y)$ par la formule de transfert. Comme avant, $\mathbb{E}(Y_n^2)=\sum\limits_{y=1}^{n}\sum\limits_{x=y}^{n}\frac{y^2}{nx}=\sum\limits_{1\leqslant y\leqslant x\leqslant n}\frac{y^2}{nx}=\sum\limits_{x=1}^{n}\sum\limits_{y=1}^{x}\frac{y^2}{nx}=\frac{1}{n}\sum\limits_{x=1}^{n}\left(\frac{1}{x}\sum\limits_{y=1}^{x}y^2\right)$ donc $\mathbb{E}(Y_n^2)=\frac{1}{n}\sum\limits_{x=1}^{n}\frac{(x+1)(2x+1)}{6}=\frac{1}{6n}\sum\limits_{x=1}^{n}(2x^2+3x+1)=\frac{1}{6n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}+\frac{3n(n+1)}{2}+n\right)$ et on trouve $\mathbb{E}(Y_n^2)=\frac{4n^2+15n+17}{36}$. Par la formule de KÖNIG-HUYGENS, comme $\mathbb{V}(Y_n)=\mathbb{E}(Y_n^2)-\mathbb{E}(Y_n)^2$, on obtient $\mathbb{V}(Y_n)=\frac{4n^2+15n+17}{36}-\left(\frac{n+3}{4}\right)^2=\frac{(n-1)(7n+13)}{144}$ après calcul. Encore une fois, c'est logique qu'on

retrouve $\mathbb{V}(Y_1) = 0$ car Y_1 est constante.

11.102 **a.** Par construction, $Y_k = \dfrac{X_k+1}{2}$ suit la loi de BERNOULLI de paramètre $\dfrac{1}{2}$ car $Y_k = 0 \Longleftrightarrow X_k = -1$ et $Y_k = 1 \Longleftrightarrow X_k = 1$. Ainsi, d'après le cours, par indépendance de $X_1, \cdots, X_n$ donc de $Y_1, \cdots, Y_n$, $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$. Or $X_k = 2Y_k - 1$ donc $S_n = 2\left(\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k\right) - n = 2T_n - n$. Ainsi, comme $T_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$, il vient $S_n(\Omega) = \{-n, -(n-2), \cdots, (n-2), n\}$ et, pour la loi de S_n, si $k \in [\![0;n]\!]$, on a $\mathbb{P}(S_n = 2k-n) = \mathbb{P}(T_n = k) = \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-k} = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}$. Par les propriétés classiques de l'espérance et la variance, $\mathbb{E}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = 0$ et $\mathbb{V}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = n$ car $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes car on a clairement $\mathbb{E}(X_k) = 0$ et $\mathbb{V}(X_k) = 1$. On pouvait aussi utiliser la linéarité de l'espérance et la relation $\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}(2T_n - n) = 4\,\mathbb{V}(T_n)$ donc $\mathbb{E}(S_n) = 2\,\mathbb{E}(T_n) - n = 2(n/2) - n = 0$ et $\mathbb{V}(S_n) = 4(n/4) = n$ car $T_n \sim \mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$ donc $\mathbb{E}(T_n) = n\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $\mathbb{V}(T_n) = n\left(\dfrac{1}{2}\right) \times \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)$.

b. $(T = 2) = (X_1 = 1, X_2 = -1) \sqcup (X_1 = -1, X_2 = 1)$ donc, par incompatibilité de ces deux évènements et indépendance de X_1 et X_2, $\mathbb{P}(T = 2) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$. De même, il vient $\mathbb{P}(T = 4) = \dfrac{1}{8}$ car $(T = 4) = (X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = -1, X_4 = -1) \sqcup (X_1 = -1, X_2 = -1, X_3 = 1, X_4 = 1)$.

Au bout de $2n+1$ étapes dans cette marche aléatoire, on a forcément $S_{2n+1} = \sum\limits_{k=1}^{2n+1} X_k$ impair car tous les X_k sont impairs, ainsi $(S_{2n+1} = 0) = \emptyset$ donc $(T = 2n+1) = \emptyset$ et $\mathbb{P}(T = 2n+1) = 0$.

c. Soit $x \in]-1;1[$, on a $|p_n x^n| \leqslant |x|^n$ car $p_n \in [0;1]$ donc, comme la série géométrique $\sum\limits_{n \geqslant 0} |x|^n$ converge car $|x| < 1$, par comparaison, $\sum\limits_{n \geqslant 0} p_n x^n$ converge absolument.

d. Pour $n \geqslant 1$, on peut partitionner $(S_{2n} = 0)$ en $(S_{2n} = 0) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n}((S_{2n} = 0) \cap (T = 2k))$ en distinguant selon la première fois (notée T) où l'on va avoir $(S_{2k} = 0)$ (il est impossible d'avoir $S_{2k+1} = 0$). Ces évènements étant incompatibles, $p_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_{2n} = 0, T = 2k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{(T=2k)}(S_{2n} = 0)\,\mathbb{P}(T = 2k)$ avec les probabilités conditionnelles. Pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$, on a $\mathbb{P}_{(T=2k)}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(S_{2(n-k)} = 0)$ (on repart de 0 après $2k$ "mouvements" et on veut être à 0 au bout de $2n$ étapes). Par contre, comme $(T = 2n) \subset (S_{2n} = 0)$, on a $\mathbb{P}_{(T=2n)}(S_{2n} = 0) = 1$. Ainsi $p_n = q_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} q_k p_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} q_k p_{n-k}$ car on a posé $p_0 = 1$.

La série génératrice $\sum\limits_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(T = n)x^n$ de T, qui est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$, a un rayon de convergence au moins égal à 1 d'après le cours. Si $x \in]-1;1[$, d'après **c.**, on peut effectuer le produit de CAUCHY, comme $\mathbb{P}(T = 2n+1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_T(x)p(x^2) = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q_n x^{2n}\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n x^{2n}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} q_k p_{n-k}\right)x^{2n}$.

Or $p_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p_{n-k}q_k$ si $n \in \mathbb{N}^*$ car $q_0 = 0$ mais $\sum\limits_{k=0}^{0} p_{n-k}q_k = p_0 q_0 = 0$ alors que $p_0 = 1$. Ainsi, pour tout $x \in]-1;1[$, $G_T(x)p(x^2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n x^{2n} = p(x^2) - 1$. Mais $p(x^2) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n x^{2n} \geqslant 1$ car $p_n \geqslant 0$ donc $p(x^2) > 0$ et on a donc la relation attendue : $G_T(x) = \dfrac{p(x^2) - 1}{p(x^2)}$.

e. D'après **a.**, comme $p_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$, il vient $\forall x \in]-1;1[$, $p(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n$. Or, on sait ou on retrouve facilement que $\forall y \in]-1;1[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1+y}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2} y^n$. On en déduit donc que $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ donc $p(x^2) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $G_T(x) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 1 - \sqrt{1-x^2}$. Or on sait aussi que, pour $y \in]-1;1[$, on a le développement en série entière $\sqrt{1+y} = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n(n!)^2(2n-1)} y^n$.

Ainsi, pour $x \in]-1;1[,\ G_T(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n(n!)^2(2n-1)} (-1)^n x^{2n} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)} x^{2n}$. On identifie car les rayons sont strictement positifs et $\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(T=2n) = \dfrac{1}{2^{2n}(2n-1)}\dbinom{2n}{n}$.

$G_T : x \mapsto 1 - \sqrt{1-x^2}$ n'est pas dérivable en 1 car $\sqrt{\ }$ ne l'est pas en 0. D'après le cours, T n'admet pas une espérance finie. Pourtant, $\mathbb{P}(T=+\infty) = 1 - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T=n) = 1 - G_T(1) = 1 - 1 = 0$: T est presque sûrement finie mais admet une espérance infinie. Bizarre.

11.103 **a.** Si X est une VAD de type 2, comme $\mathbb{P}(\Omega) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1$, on a $|G_X(-1)| = 1$ car :

- soit $r = 1$ et $\mathbb{P}(X=2k) = 0$ d'où $\mathbb{P}(\Omega) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=2k+1) = 1$ donc $G_X(-1) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=2k+1) = -1$.
- soit $r = 0$ et $\mathbb{P}(X=2k+1) = 0$ d'où $\mathbb{P}(\Omega) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=2k) = 1$ donc $G_X(-1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=2k) = 1$.

Réciproquement, si $G_X(-1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=2k) - \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=2k+1) = \mathbb{P}(X \text{ pair}) - \mathbb{P}(X \text{ impair}) = \pm 1$, comme $\mathbb{P}(X \text{ pair}) \in [0;1]$ et $\mathbb{P}(X \text{ impair}) \in [0;1]$:

- soit $G_X(-1) = 1$ donc $\mathbb{P}(X \text{ pair}) = 1$ et $\mathbb{P}(X \text{ impair}) = 0$ et on a bien $(\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=2k+1) = 0)$: $r = 0$.
- soit $G_X(-1) = -1$ donc $\mathbb{P}(X \text{ impair}) = 1$ et $\mathbb{P}(X \text{ pair}) = 0$ et on a bien $(\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=2k) = 0)$: $r = 1$.

Et on a établi que X est de type 2. On a bien l'équivalence annoncée par double implication.

b. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{m}} \in \mathbb{U}_m$. En distinguant selon le reste r de la division euclidienne de n par m, comme $\omega^n = \omega^{qm+r} = \omega^r$, $G_X(\omega) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\omega^n = \sum_{r=0}^{m-1} \Big(\sum_{q=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=mq+r)\Big)\omega^r = \sum_{r=0}^{m-1} \mathbb{P}(X \equiv r\ [m])\omega^r$.

- Supposons X d'ordre m. Soit $r \in [\![0;m-1]\!]$ tel que $\forall k \in \mathbb{N},\ k \not\equiv r\ [m],\ \mathbb{P}(X=k) = 0$. Alors, en sommant, on a $\mathbb{P}(X \equiv r'\ [m]) = 0$ si $r' \in [\![0;m-1]\!]$ et $r' \neq r$. Par conséquent, $G_X(\omega) = \mathbb{P}(X \equiv r\ [m])\omega^r = \omega^r$ car $\mathbb{P}(X \equiv r\ [m]) = 1$ et on a bien $|G_X(\omega)| = 1$.
- Réciproquement, si $|G_X(\omega)| = 1$, comme $G_X(\omega) = \displaystyle\sum_{r=0}^{m-1} \mathbb{P}(X \equiv r\ [m])\omega^r$ on a par inégalité triangulaire $1 = |G_X(\omega)| \leqslant \displaystyle\sum_{r=0}^{m-1} \mathbb{P}(X \equiv r\ [m])|\omega^r| = \sum_{r=0}^{m-1} \mathbb{P}(X \equiv r\ [m]) = 1$ donc on a égalité dans l'inégalité triangulaire.

Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire montre que $\mathbb{P}(X \equiv 0\ [m])\omega^0, \cdots, \mathbb{P}(X \equiv m-1\ [m])\omega^{m-1}$ sont positivement liés. Mais les m racines m-ièmes $\omega^0, \cdots, \omega^{m-1}$ de l'unité sont non colinéaires, ceci n'est possible que s'il existe $r \in [\![0;m-1]\!]$ tel que $\mathbb{P}(X \equiv r\ [m]) = 1$ et $\mathbb{P}(X \equiv r'\ [m]) = 0$ si $r' \neq r$. X est donc de type m.

Par double implication : X est de type m si et seulement si $\Big|G_X\big(e^{\frac{2i\pi}{m}}\big)\Big| = 1$.

c. Si r et r' dans $[\![1;m-1]\!]$ vérifient cette condition, alors pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a soit $k \not\equiv r\ [m]$, soit

$k \neq r'$ $[m]$ ce qui prouve que $\mathbb{P}(X = k) = 0$. Mais on a alors $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 0$ contredisant que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ ce qui implique $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. Ainsi, si r existe, r est bien unique.

d. ($\Longleftarrow$) Si X et Y sont de type m, alors $\big|G_X(\omega)\big| = 1$ et $\big|G_Y(\omega)\big| = 1$ d'après la question **b.**. Ainsi, comme X et Y sont indépendantes, $G_W = G_X G_Y$ donc $\big|G_W(\omega)\big| = \big|G_X(\omega)\big|\big|G_X(\omega)\big| = 1 \times 1 = 1$ et W est de type m.
($\Longrightarrow$) D'après la question **b.**, il vient $\big|G_W(\omega)\big| = 1$ donc $\big|G_X(\omega)\big|\big|G_X(\omega)\big| = 1$. Or on a vu à la question **b.** que $\big|G_X(\omega)\big| \leqslant 1$ et, de même, $\big|G_Y(\omega)\big| \leqslant 1$. Or $\big|G_X(\omega)\big|\big|G_X(\omega)\big| = 1$ donc ces inégalités sont des égalités et $\big|G_X(\omega)\big| = 1$ et $\big|G_Y(\omega)\big| = 1$. Toujours d'après **b.** : X et Y sont donc de type m.
On conclut par double implication que W de type $m \Longleftrightarrow X$ et Y de type m.

e. Avec ces conditions, si $n \not\equiv r(X) + r(Y)$ $[m]$, comme $(W = n) = \bigsqcup\limits_{k=0}^{n} (X = k, Y = n - k)$, par indépendance de X et Y, on a $\mathbb{P}(W = n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = n - k)$. Pour $k \in [\![0;n]\!]$, on a deux cas :

- si $k \not\equiv r(X)$ $[m]$, on a $\mathbb{P}(X = k) = 0$ par définition de $r(X)$ donc $\mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = n - k) = 0$.
- si $k \equiv r(X)$ $[m]$, alors $n - k \equiv n - r(X) \not\equiv r(Y)$ $[m]$ par hypothèse donc $\mathbb{P}(Y = n - k) = 0$ par définition de $r(Y)$ donc on a encore $\mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = n - k) = 0$.

Dans tous les cas, $\mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = n - k) = 0$ donc $\mathbb{P}(W = n) = 0$ si $n \not\equiv r(X) + r(Y)$ $[m]$. C'est la définition de $r(W)$ qui vérifie donc $r(W) \equiv r(X) + r(Y)$ $[m]$.

11.104 **a.** Tous les tirages sont des pics si et seulement si on tire dans l'ordre les boules numérotées $1, 2, \cdots, n$ donc $(S_n = n) = (X_1 = 1) \cap \cdots \cap (X_n = n)$ ce qui donne, par la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}(S_n = n) = \mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 2) \times \cdots \times \mathbb{P}_{(X_1=1)\cap\cdots\cap(X_{n-1}=n-1)}(X_n = n) = \frac{1}{n} \times \cdots \times \frac{1}{1} = \frac{1}{n!}$.
Puisqu'on a toujours un pic au tirage 1, on n'a qu'un seul pic lors de ces tirages si et seulement si $X_1 = n$. Ainsi, $(S_n = 1) = (X_1 = n)$ donc $\mathbb{P}(S_n = 1) = \mathbb{P}(X_1 = n) = \frac{1}{n}$.

b. Par construction, si on note $\sigma : [\![1;n]\!] \to [\![1;n]\!]$ tel que $\sigma(k)$ est le numéro de la k-ième boule tirée, alors σ est une permutation de $[\![1;n]\!]$ et elles sont équiprobables. L'évènement $(T_k = 1)$ a donc pour probabilité $\mathbb{P}(T_k = 1) = \dfrac{\text{card}\left(\{T_k = 1\}\right)}{n!}$ car il y a $n!$ permutations de $[\![1;n]\!]$. Pour choisir une permutation σ qui admet un pic au tirage k, il faut et il suffit que $\sigma(k)$ soit le maximum de $\sigma(1), \cdots, \sigma(k)$. Protocole de choix :

- On choisit les k boules tirées lors des k premiers tirages : $\dbinom{n}{k}$ choix.
- La plus grande de ces k boules est forcément $\sigma(k)$: 1 seul choix.
- On répartit les $k - 1$ autres boules parmi ces k boules dans $\sigma(1), \cdots, \sigma(k - 1)$: $(k - 1)!$ choix.
- On répartit les $n - k$ boules restantes dans $\sigma(k + 1), \cdots, \sigma(n)$: $(n - k)!$ choix.

Ainsi, $\mathbb{P}(T_k = 1) = \dfrac{\dbinom{n}{k}(k - 1)!(n - k)!}{n!} = \dfrac{n!(k - 1)!(n - k)!}{k!(n - k)!n!} = \dfrac{1}{k}$ donc $T_k \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

c. Comme $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} T_k$ par définition, on a $\mathbb{E}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(T_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

d. D'après la question **b.**, si $(i, j) \in [\![1;n]\!]$ et $i \neq j$, $\mathbb{P}(T_i = 1, T_j = 1) = \frac{1}{ij} = \frac{1}{i} \times \frac{1}{j} = \mathbb{P}(T_i = 1)\,\mathbb{P}(T_j = 1)$.
Ainsi, les évènements $A = (T_i = 1)$ et $B = (T_j = 1)$ sont indépendants. On sait d'après le cours qu'alors A et $\overline{B}$

le sont aussi, $\overline{A}$ et B le sont encore, et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont toujours. Ainsi, $\mathbb{P}(T_i = 1, T_j = 0) = \mathbb{P}(T_i = 1)\,\mathbb{P}(T_j = 0)$, $\mathbb{P}(T_i = 0, T_j = 1) = \mathbb{P}(T_i = 0)\,\mathbb{P}(T_j = 1)$ et $\mathbb{P}(T_i = 0, T_j = 0) = \mathbb{P}(T_i = 0)\,\mathbb{P}(T_j = 0)$. Comme T_i et T_j ne prennent que les valeurs 0 et 1, les variables aléatoires T_i et T_j sont indépendantes.

e. D'après le cours, comme $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} T_k$, on a $\mathbb{V}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(T_k) + 2 \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(T_i, T_j)$. Comme T_i et T_j sont indépendantes si $i < j$, on a $\mathrm{Cov}(T_i, Y_j) = 0$ et $V(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(T_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big(1 - \frac{1}{k}\Big) = H_n - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Il est classique qu'alors on a $\mathbb{V}(S_n) \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma - \frac{\pi^2}{6} + o(1)$.

<u>Résultat admis</u> : pour choisir une permutation σ telle que $T_i = 1$ et $T_j = 1$ (avec $i < j$), on a le protocole :

- On choisit les j boules tirées lors des j premiers tirages : $\dbinom{n}{j}$ choix.
- La plus grande de ces j boules est forcément $\sigma(j)$: 1 seul choix.
- On choisit parmi les $j-1$ restantes les i qui seront $\sigma(1), \cdots, \sigma(i)$: $\dbinom{j-1}{i}$ choix.
- La plus grande de ces i boules est forcément $\sigma(i)$: 1 seul choix.
- On répartit les $i-1$ restantes dans $\sigma(1), \cdots, \sigma(i-1)$: $(i-1)!$ choix.
- On répartit les $j-i+1$ restantes (les j privées des $i+1$) dans $\sigma(i+1), \cdots, \sigma(j-1)$: $(j-i+1)!$ choix.
- On répartit les $n-j$ boules restantes dans $\sigma(j+1), \cdots, \sigma(n)$: $(n-j)!$ choix.

Ainsi, $\mathbb{P}(T_i = 1, T_j = 1) = \dfrac{\dbinom{n}{j}\dbinom{j-1}{i}(i-1)!(j-i+1)!(n-j)!}{n!} = \dfrac{n!(j-1)!(i-1)!(j-i+1)!(n-j)!}{j!(n-j)!(j-1-i)i!} = \dfrac{1}{ij}$.

11.105 **a.** On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ suit la loi de Rademacher. Comme $-1 \leqslant X_k \leqslant 1$ pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on a $S_n \in [\![-n; n]\!]$. De plus, X_k étant impair, S_n a la parité de n. Ainsi, $S_n(\Omega) \subset \{-n, -(n-2), \cdots, (n-2), n\}$.

Pour aller plus loin, si $B_k = \dfrac{1 + X_k}{2}$ pour $k \in [\![1; n]\!]$, on a $B_k(\Omega) = \{0, 1\}$ et, comme $(B_k = 0) = (X_k = -1)$ et $(B_k = 1) = (X_k = 1)$, on a $\mathbb{P}(B_k = 0) = \mathbb{P}(B_k = 1) = \frac{1}{2}$ donc B_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Comme $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, $B_1, \cdots, B_n$ le sont aussi d'après le cours, et on sait qu'alors $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} B_k$ suit la loi binomiale de paramètres $n, \frac{1}{2}$. Comme $S_n = 2T_n - n$, on connaît donc la loi de S_n, donnée par les relations $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $\mathbb{P}(S_n = 2k - n) = \dbinom{n}{k}\Big(\frac{1}{2}\Big)^k\Big(1 - \frac{1}{2}\Big)^{n-k} = \frac{1}{2^n}\dbinom{n}{k} = \mathbb{P}(S_n = n - 2k)$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(|S_{n+1}| = 1) = (S_{n+1} = 1) \sqcup (S_{n+1} = -1)$ donc, par incompatibilité de ces évènements, on a $\mathbb{P}(|S_{n+1}| = 1) = \mathbb{P}(S_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(S_{n+1} = -1)$. Par incompatibilité et indépendance de S_n et X_{n+1} par le lemme des coalitions, comme $(S_{n+1} = 1) = (S_n = 0, X_{n+1} = 1) \sqcup (S_n = 2, X_{n+1} = -1)$, on a la relation $\mathbb{P}(S_{n+1} = 1) = \dfrac{\mathbb{P}(S_n = 0)}{2} + \dfrac{\mathbb{P}(S_n = 2)}{2}$. Comme on peut décomposer l'évènement $(S_{n+1} = -1)$ en $(S_{n+1} = -1) = (S_n = 0, X_{n+1} = -1) \sqcup (S_n = -2, X_{n+1} = 1)$, on en déduit de la même manière que $\mathbb{P}(S_{n+1} = -1) = \dfrac{\mathbb{P}(S_n = 0)}{2} + \dfrac{\mathbb{P}(S_n = -2)}{2}$. Or $(S_n = 0) = (|S_n| = 0)$ et $(|S_n| = 2) = (S_n = 2) \sqcup (S_n = -2)$, ce qui donne $\mathbb{P}(|S_{n+1}| = 1) = \mathbb{P}(|S_n| = 0) + \dfrac{\mathbb{P}(|S_n| = 2)}{2}$.

c. Comme avant, $(|S_{n+1}| = k) = (|S_n| = k+1, X_{n+1} = -\varepsilon_{n+1}) \sqcup (|S_n| = k-1, X_{n+1} = \varepsilon_{n+1})$ en notant ε_{n+1} le signe de S_{n+1} donc, avec les mêmes arguments d'incompatibilité et d'indépendance de S_n et X_{n+1}, on a la relation $\mathbb{P}|S_{n+1}|=k)=\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=k-1)}{2}+\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=k-1)}{2}$.

d. Comme $|S_n|$ est à valeurs dans $[\![0;n]\!]$, $\mathbb{E}(|S_n|)=\sum\limits_{k=1}^{n}k\,\mathbb{P}(|S_n|=k)$. Ainsi, $\mathbb{E}(|S_{n+1}|)=\sum\limits_{k=1}^{n+1}k\,\mathbb{P}(|S_{n+1}|=k)$ qu'on écrit $\mathbb{E}(|S_{n+1}|)=\mathbb{P}(|S_{n+1}|=1)+\sum\limits_{k=2}^{n+1}k\,\mathbb{P}(|S_{n+1}|=k)$. Or, d'après la question précédente, on a $k\,\mathbb{P}(|S_{n+1}|=k)=\dfrac{(k-1+1)\,\mathbb{P}(|S_n|=k-1)}{2}+\dfrac{(k+1-1)\,\mathbb{P}(|S_n|=k+1)}{2}$ si $k\geqslant 2$ donc on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|S_{n+1}|) &= \mathbb{P}(|S_n|=0)+\frac{\mathbb{P}(|S_n|=2)}{2}+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{(k-1)\,\mathbb{P}(|S_n|=k-1)}{2}\\ &\quad+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{(\mathbb{P}(|S_n|=k-1)}{2}+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{(k+1)\,\mathbb{P}(|S_n|=k+1)}{2}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{\mathbb{P}(|S_n|=k+1)}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{E}(|S_{n+1}|)=\mathbb{P}(|S_n|=0)+\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=2)}{2}+\dfrac{E(|S_n|)}{2}+\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=1)}{2}+\dfrac{\mathbb{E}(|S_n|)}{2}-\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=1)}{2}-\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=2)}{2}$ car $\sum\limits_{k=2}^{n+1}\dfrac{(\mathbb{P}(|S_n|=k-1)}{2}-\sum\limits_{k=2}^{n+1}\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=k+1)}{2}=\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=1)}{2}-\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=n+1)}{2}-\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=n+2)}{2}$ et que $\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=n+1)}{2}=\dfrac{\mathbb{P}(|S_n|=n+2)}{2}=0$. On en déduit bien que $\mathbb{E}(|S_{n+1}|)=\mathbb{E}(|S_n|)+\mathbb{P}(|S_n|=0)$.

e. Par imparité de S_{2n+1}, on ne peut pas avoir $S_{2n+1}=0$ donc $\mathbb{P}(S_{2n+1}=0)$. Par contre, $S_{2n}=0$ si et seulement si il y a autant de 1 que de -1 dans les $2n$ étapes de cette marche aléatoire. Par indépendance des pas, on en déduit d'après le cours que $\mathbb{P}(S_{2n}=0)=\dbinom{2n}{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

f. D'après la question **e.**, la suite $(\mathbb{E}(|S_n|)_{n\geqslant 1}$ est croissante et, par dualité suite-série, elle converge si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 1}\big(\mathbb{E}(|S_{n+1}|)-\mathbb{E}(|S_n|)\big)$ converge. Or $\mathbb{E}(|S_{2n+2}|)-\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)=\mathbb{P}(|S_{2n+1}|=0)$ et $\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)-\mathbb{E}(|S_{2n}|)=\mathbb{P}(|S_{2n}|=0)=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{2n}}{2^{2n}(2\pi n)n^{2n}e^{2n}}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Sachant que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$ diverge par RIEMANN, on en déduit par comparaison que $\sum\limits_{n\geqslant 1}\big(\mathbb{E}(|S_{n+1}|)-\mathbb{E}(|S_n|)\big)$ diverge donc que $(\mathbb{E}(|S_n|)_{n\geqslant 1}$ diverge, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(|S_n|)=+\infty$.

g. J'ai rajouté cette question, pas sûr qu'elle fasse partie de l'oral ! D'après une remarque du cours, si $a_n>0\underset{+\infty}{\sim}b_n>0$ et si $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_n$ diverge, alors $\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\underset{+\infty}{\sim}\sum\limits_{k=0}^{n}b_k$ (c'est hors programme). On l'applique ici avec $\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)-\mathbb{E}(|S_{2n}|)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$, ce qui, comme $\sum\limits_{k=1}^{n}(\mathbb{E}(|S_{2k+1}|)-\mathbb{E}(|S_{2k}|)=\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)-\mathbb{E}(|S_2|)$ donne $\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)\underset{+\infty}{\sim}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{\pi k}}$. Par comparaison série-intégrale, on montre classiquement que $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\underset{+\infty}{\sim}2\sqrt{n}$ avec la décroissante et la continuité de la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ sur $[1;+\infty[$ dont une primitive est $t\mapsto 2\sqrt{t}$. Ainsi, $\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)\underset{+\infty}{\sim}2\sqrt{\dfrac{n}{\pi}}\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{2(2n+1)}{\pi}}$. Comme $\mathbb{E}(|S_{2n}|)=\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)$, on a $\mathbb{E}(|S_{2n}|)\underset{+\infty}{\sim}2\sqrt{\dfrac{n}{\pi}}\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{2(2n)}{\pi}}$ donc la suite $\left(\dfrac{\mathbb{E}(|S_n|)}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ et on a $\mathbb{E}(|S_n|)\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}$.

$\boxed{\textbf{11.106}}$ **a.** On a $\det(M)=X^2-Y^2=(X-Y)(X+Y)$ et $X+Y\neq 0$ car $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$ par hypothèse donc $X+Y\geqslant 2$. Ainsi, M inversible $\iff X\neq Y$. Or $(X=Y)=\bigsqcup\limits_{n=1}^{+\infty}(X=n,Y=n)$ (réunion d'évènements incompatibles) donc, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n,Y=n)$. Or, X et Y ont été supposées indépendantes ce qui donne la relation $\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}(Y=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}p(1-p)^{n-1}p(1-p)^{n-1}$. Comme $0<(1-p)^2<1$, on peut calculer avec les séries géométriques : $\mathbb{P}(X=Y)=\dfrac{p^2}{1-(1-p)^2}=\dfrac{p}{2-p}$. La probabilité que M soit inversible est donc $1-\mathbb{P}(X=Y)=\dfrac{2-2p}{2-p}$.

b. La matrice M est symétrique réelle donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et les valeurs propres α et β vérifient $\alpha+\beta=\mathrm{Tr}\,(M)=X+Y$ et $\alpha\beta=\det(M)=X^2-Y^2=(X-Y)(X+Y)$. Ainsi, les deux valeurs propres de M sont $X+Y$ et $X-Y$. Par conséquent, comme $Y>0$, on a $U=X+Y\geqslant 2$ et $V=X-Y\in\mathbb{Z}$. D'après le cours, $\mathrm{Cov}(U,V)=\mathbb{E}(UV)-\mathbb{E}(U)\,\mathbb{E}(V)$. Or $\mathbb{E}(V)=\mathbb{E}(X-Y)=\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y)=0$ par linéarité de l'espérance et que X et Y suivent la même loi. Ainsi, $\mathrm{Cov}(UV)=\mathbb{E}(UV)=\mathbb{E}((X+Y)(X-Y))=\mathbb{E}(X^2-Y^2)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(Y^2)=0$. Or $(U=2,V=0)=(U=2)=(X=Y=1)$ donc $\mathbb{P}(U=2,V=0)=\mathbb{P}(X=1,Y=1)=\mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=1)$ car X,Y indépendantes donc $\mathbb{P}(U=2)=\mathbb{P}(U=2,V=0)=p^2$.

Par contre, $(V=0)=(X=Y)=\bigcup_{n=1}^{+\infty}(X=Y=n)$ (réunion incompatible) donc $\mathbb{P}(V=0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)^2$ par σ-additivité, indépendance de X et Y qui suivent la même loi. Comme $\mathbb{P}(U=2,V=0)\neq\mathbb{P}(U=2)(V=0)$ car $\mathbb{P}(V=0)=\sum_{n=1}^{+\infty}p^2(1-p)^{2(n-1)}=\dfrac{p^2}{1-(1-p)^2}=\dfrac{p}{2-p}<1$, U et V ne sont pas indépendantes.

c. Comme $Z(\Omega)=\mathbb{N}^*\subset\mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(Z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Z\geqslant n)$ d'après le cours. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $(Z<n)=(X<n)\cap(Y<n)$ donc, par indépendance de X et Y, $\mathbb{P}(Z<n)=\mathbb{P}(X<n)^2=(1-\mathbb{P}(X\geqslant n))^2$ car X et Y suivent la même loi. Ainsi, $\mathbb{P}(Z\geqslant n)=1-\mathbb{P}(Z<n)=1-(1-(1-p)^{n-1})^2$ (classique). On en déduit donc que $\mathbb{P}(Z\geqslant n)=2(1-p)^{n-1}-(1-p)^{2(n-1)}$. On sait sommer les séries géométriques, et comme $|1-p|<1$, Z admet une espérance finie et $\mathbb{E}(Z)=\dfrac{2}{1-(1-p)}-\dfrac{1}{1-(1-p)^2}=\dfrac{3-2p}{p(2-p)}$.
s

11.107 **a.** Pour $k\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$, par définition du maximum, on a $(M_n\leqslant k-1)=\bigcap_{i=1}^{n}(X_i\leqslant k-1)$ donc, par indépendance des X_i, on a $\mathbb{P}(M_n\leqslant k-1)=\prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i\leqslant k-1)$ or $X_1,\cdots,X_n$ suivent la même loi que X_1 donc $\forall i\in[\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(X_i\leqslant k-1)=\mathbb{P}(X_1\leqslant k-1)$ et on a bien $\mathbb{P}(M_n\leqslant k-1)=\mathbb{P}(X_1\leqslant k-1)^n$.

b. D'abord, on a $\mathbb{P}(X_1\leqslant k-1)=1-\mathbb{P}(X_1>k-1)$. Mais comme X_1 est à valeurs entières, on a $(X_1>k-1)=(X_1\geqslant k)$. Comme $x\mapsto x^\alpha$ est strictement croissante, $(X_1\geqslant k)=(X_1^\alpha\geqslant k^\alpha)$ donc, comme X_1^α est une variable aléatoire positive admettant une espérance finie par hypothèse et $k^\alpha>0$, par l'inégalité de Markov, $\mathbb{P}(X_1\geqslant k)=\mathbb{P}(X_1^\alpha\geqslant k^\alpha)\leqslant\dfrac{\mathbb{E}(X_1^\alpha)}{k^\alpha}=\dfrac{m_\alpha}{k^\alpha}$. Ainsi, $\mathbb{P}(X_1\leqslant k-1)\geqslant 1-\dfrac{m_\alpha}{k^\alpha}$ pour $k\in\mathbb{N}^*$.

Comme M_n est aussi à valeurs entières, on a $(M_n>k-1)=(M_n\geqslant k)$ pour $k\in\mathbb{N}^*$ donc on obtient $\mathbb{P}(M_n\geqslant k)=\mathbb{P}(M_n>k-1)=1-\mathbb{P}(M_n\leqslant k-1)=1-\mathbb{P}(X_1\leqslant k-1)^n\leqslant 1-\left(1-\dfrac{m_\alpha}{k^\alpha}\right)$. Quand k tend vers $+\infty$, on effectue un développement limité et $1-\left(1-\dfrac{m_\alpha}{k^\alpha}\right)\underset{+\infty}{=}1-\left(1-\dfrac{nm_\alpha}{k^\alpha}+o\left(\dfrac{1}{k^\alpha}\right)\right)\underset{+\infty}{=}\dfrac{nm_\alpha}{k^\alpha}+o\left(\dfrac{1}{k^\alpha}\right)$ donc $1-\left(1-\dfrac{m_\alpha}{k^\alpha}\right)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{nm_\alpha}{k^\alpha}$. Puisque la série de Riemann $\sum_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{k^\alpha}$ converge car $\alpha>1$ et que n et m_α sont des constantes, par comparaison, la série $\sum_{k\geqslant 1} \mathbb{P}(M_n \geqslant k)$ converge donc, d'après le cours, M_n admet une espérance finie qui vaut $\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(M_n \geqslant k)$.

c. Ici X_1 suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Prenons $\alpha = 2$, alors X_1 admet un moment d'ordre 2 (une variance finie) d'après le cours donc, d'après la question **b.** avec $\alpha = 2 > 1$, M_n admet une espérance finie et $\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(M_n \geqslant k) = \sum_{k=1}^{+\infty}(1 - \mathbb{P}(M_n \leqslant k-1)) = \sum_{k=1}^{+\infty}(1 - \mathbb{P}(X_1 \leqslant k-1)^n)$ avec la question **a.**.

Ici, $\mathbb{P}(X_1 \leqslant k-1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > k-1) = 1 - 2^{1-k}$. En effet, classiquement, $(X_1 > k-1) = \bigsqcup_{n=k}^{+\infty}(X_1 = n)$ donc, par σ-additivité, $\mathbb{P}(X_1 > k-1) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{(1/2)^k}{1-(1-(1/2))} = 2^{1-k}$.

On a bien la relation attendue, $\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(1 - (1-2^{1-k})^n\right)$.

d. Par le binôme de Newton, on a $\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{j+1}2^{-(k-1)j}\right)$. Or les n séries géométriques de raison $\frac{1}{2^j}$ pour $j \in [\![1;n]\!]$ convergent donc, par somme d'un nombre fini de séries convergentes, on peut écrire $\mathbb{E}(M_n) = \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{j+1}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}(2^{-j})^{k-1}\right) = \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{j+1}\frac{1}{1-2^{-j}} = \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\frac{(-1)^{j+1}2^j}{2^j-1}$.

11.108 **a.** Comme la variable aléatoire e^{itX} est bornée sur Ω, elle admet une espérance finie et on a, par théorème de transfert, $\mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{k=1}^{n} e^{itx_k}\,\mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k e^{itx_k}$. Par inégalité triangulaire sur les complexes, $|\mathbb{E}(e^{itX})| = \left|\sum_{k=1}^{n} p_k e^{itx_k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|p_k e^{itx_k}| = \sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^{n}(X = x_k)\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

b. Comme $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\Phi(t)|^2 = \Phi(t)\overline{\Phi(t)}$ il vient avec **a.** la relation $|\Phi(t)|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} p_j e^{itx_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} p_k e^{-itx_k}\right)$, d'où $|\Phi(t)|^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k^2 + \sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant n} p_j p_k e^{it(x_j-x_k)}$. Si on passe en mode développement limité en 0, on obtient $|\Phi(t)|^2 \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} p_k^2 + \sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant n} p_j p_k\left(1 + it(x_j - x_k) - \frac{t^2(x_j-x_k)^2}{2} + o(t^2)\right)$. Or, en échangeant les rôles joués par j et k, on a $\sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant n} p_j p_k(x_j - x_k) = \sum_{1\leqslant k\neq j\leqslant n} p_k p_j(x_k - x_j) = -\sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant n} p_j p_k(x_j - x_k) = 0$. Or, $1 = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)^2$ donc, en développant, $1 = \sum_{k=1}^{n} p_k^2 + \sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant n} p_j p_k$. En reportant dans le développement limité, $|\Phi(t)|^2 \underset{0}{=} 1 - \sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant n} p_j p_k + \sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant n} p_j p_k\left(1 - \frac{t^2(x_j-x_k)^2}{2} + o(t^2)\right) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2}\left(\sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant n} p_j p_k(x_j - x_k)^2\right)t^2 + o(t^2)$.

De plus, $\mathbb{V}(X^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k p_k\right)^2$ par formule de transfert donc, en développant, $\mathbb{V}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2(p_k - p_k^2) - \sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant n} x_j x_k p_j p_k = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^2\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} p_j\right) - \sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant n} x_j x_k p_j p_k$ qu'on peut aussi écrire $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{2}\left(\sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant n} p_j p_k x_k^2 + \sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant n} p_k p_j x_j^2 - 2\sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant n} x_j x_k p_j p_k\right)$ par symétrie entre j et k et on obtient bien la relation $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{2}\left(\sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant n} p_j p_k(x_k^2 + x_j^2 - 2x_j x_k)\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant n} p_j p_k(x_j - x_k)^2\right)$ qui justifie bien le développement attendu : $|\Phi(t)|^2 \underset{0}{=} 1 - \mathbb{V}(X)t^2 + o(t^2)$.

c. L'hypothèse $X(\Omega) \subset a + \mathbb{Z}b$ se traduit par $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\exists m_k \in \mathbb{Z}$, $x_k = a + m_k b$. Ainsi, pour tout

$t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k e^{it(a+m_k b)} = e^{ita} \sum\limits_{k=1}^{n} p_k (e^{itb})^{m_k}$ donc $|\Phi(t)| = \Big| \sum\limits_{k=1}^{n} p_k (e^{itb})^{m_k} \Big|$. Il suffit de prendre $t_0 \neq 0$ tel que $e^{it_0 b} = 1$, par exemple $t_0 = \dfrac{2\pi}{b} \neq 0$, pour que $|\Phi(t_0)| = \Big| \sum\limits_{k=1}^{n} p_k \Big| = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$.

d. Réciproquement, supposons qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\Phi(t_0)| = 1$. Alors, $\Phi(t_0) \in \mathbb{U}$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(t_0) = e^{i\alpha}$. Ainsi, $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k e^{it_0 x_k} = e^{i\alpha} = e^{i\alpha} \sum\limits_{k=1}^{n} p_k$ donc, en multipliant par $e^{-i\alpha}$, on a la relation $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k e^{it_0 x_k - i\alpha} = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k e^{i(t_0 x_k - \alpha)}$.

Ainsi, par inégalité triangulaire, $1 = \Big| \sum\limits_{k=1}^{n} p_k e^{i(t_0 x_k - \alpha)} \Big| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} p_k |e^{i(t_0 x_k - \alpha)}| = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$. Or, on sait que le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire traduit le fait que les complexes $(p_k e^{i(t_0 x_k - \alpha)})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont positivement alignés, ou encore, comme $p_k > 0$ qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $p_k e^{i(t_0 x_k - \alpha)} = p_k e^{i\theta}$. Par conséquent, comme $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $e^{i(t_0 x_k - \alpha - \theta)} = 1$, il existe $m_k \in \mathbb{Z}$ tel que $t_0 x_k - \alpha - \theta = 2\pi m_k$ donc $x_k = a + m_k b$ en posant $b = \dfrac{2\pi}{t_0} \in \mathbb{R}^*$ et $a = \dfrac{\alpha + \theta}{t_0} \in \mathbb{R}$. On a donc bien $X(\Omega) \subset a + \mathbb{Z}b$.

11.109 Notons pour toute la suite T_k la variable aléatoire qui est le résultat du tirage d'indice k s'il a lieu. Par construction, $X_n(\Omega) \subset [\![1;n]\!]$ donc X_n est bornée et admet donc une espérance finie. On suppose bien sûr aussi que chaque boule de l'urne a autant de chance d'être tirée à chaque étape.

a. Si $n = 1$, on vide l'urne en un seul tirage. Ainsi, X_1 est constante égale à 1 donc $\mathbb{E}(X_1) = 1$.
Si $n = 2$, $(X_2 = 1) = (T_1 = 1)$ et $(X_2 = 2) = (T_1 = 2, T_2 = 1)$ donc $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(T_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(T_1 = 2)\,\mathbb{P}(T_2 = 1 \mid T_1 = 2) = \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, par définition, $\mathbb{E}(X_2) = \dfrac{1}{2} \times 1 + \dfrac{1}{2} \times 2 = \dfrac{3}{2}$.

b. Pour $n \geqslant 2$ et $i = 1$, on a $(X_n = 1) = (T_1 = 1)$ donc $\mathbb{P}(X_n = 1) = \dfrac{1}{n}$.

Pour $n \geqslant 2$ et $i \in [\![2;n]\!]$, on a $(X_n = i) = \bigsqcup\limits_{j=2}^{n} (T_1 = j, X_n = i)$. Cette réunion étant disjointe, on a donc $\mathbb{P}(X_n = i) = \sum\limits_{j=2}^{n} \mathbb{P}(T_1 = i)\,\mathbb{P}(X_n = i \mid T_1 = j)$. Or, quand on a tiré la boule j au premier tirage, on enlève les boules numérotées $j, j+1, \cdots, n$ et on se retrouve au point de départ du problème définissant X_{j-1}, une urne contenant les boules numérotées de 1 à $j-1$, avec les mêmes règles, sauf qu'on a déjà effectué un tirage. Ainsi, $\mathbb{P}(X_n = i \mid T_1 = j) = \mathbb{P}(X_{j-1} = i-1)$. Par conséquent, si $n \geqslant 2$ et $i \in [\![2;n]\!]$, $\mathbb{P}(X_n = i) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=2}^{n} \mathbb{P}(X_{j-1} = i-1) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = i-1)$ en posant $k = j-1$.

Alors, $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} i\,\mathbb{P}(X_n = i) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=2}^{n} i \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = i-1) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \sum\limits_{i=2}^{n} i\,\mathbb{P}(X_k = i-1)$ en inversant la somme double. Mais $\mathbb{P}(X_k = i-1) = 0$ dès que $i > k$ donc $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \sum\limits_{i=2}^{k+1} i\,\mathbb{P}(X_k = i-1)$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \sum\limits_{i=2}^{k+1} (i-1+1)\,\mathbb{P}(X_k = i-1) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \big(1 + \mathbb{E}(X_k)\big)$ car $\mathbb{E}(X_k) = \sum\limits_{i=2}^{k+1} (i-1)\,\mathbb{P}(X_k = i-1)$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \sum\limits_{i=2}^{k+1} \mathbb{P}(X_k = i-1)$. On a donc bien la relation attendue, $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$ si $n \geqslant 2$.

c. Méthode 1 : d'après **b.**, on a $\mathbb{E}(X_3) = 1 + \dfrac{1}{3}\Big(1 + \dfrac{3}{2}\Big) = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$. De même, on obtient $\mathbb{E}(X_4) = 1 + \dfrac{1}{4}\Big(1 + \dfrac{3}{2} + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\Big) = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{12}$. Il semble que $\mathbb{E}(X_n) = H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. On a déjà réalisé l'initialisation pour $n = 1$, et $n = 2$. Soit $n \geqslant 2$ tel que $\forall k \in [\![1; n-1]\!],\ E(X_k) = H_k$, d'après la question **b.**, on a $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(X_k) = 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}$ donc $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}\frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{n-j}{j} = 1 + \Big(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\Big) - \frac{n-1}{n} = H_n$. Par principe de récurrence forte, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X_n) = H_n$ donc $\mathbb{E}(X_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ (par comparaison série-intégrale avec $x \mapsto \frac{1}{x}$).

Méthode 2 : d'après **b.**, pour $n \geqslant 2$, $n\,\mathbb{E}(X_n) = n + \sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(X_k)$ et $(n+1)\,\mathbb{E}(X_{n+1}) = (n+1) + \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)$ donc $(n+1)\,\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + n\,\mathbb{E}(X_n) + \mathbb{E}(X_n) = (n+1)\,\mathbb{E}(X_n) + 1$ d'où $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n+1}$. Par télescopage, on a donc $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \sum_{k=1}^{n-1}\big(\mathbb{E}(X_{k+1}) - \mathbb{E}(X_k)\big) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} = H_n$ et $\mathbb{E}(X_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Question supplémentaire : comme $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[1; +\infty[$, on a la majoration $\forall k \in [\![1; n]\!], \int_k^{k+1} f(t)dt = \int_k^{k+1}\frac{dt}{t} \leqslant f(k) = \frac{1}{k}$ et $\forall k \in [\![2; n]\!],\ \int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t} \geqslant \frac{1}{k}$. En sommant la première inégalité pour $k \in [\![1; n]\!]$ et par CHASLES, on obtient $\int_1^{n+1}\frac{dt}{t} \leqslant H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Si on fait de même pour la seconde pour $k \in [\![2; n]\!]$, on a $\int_1^{n}\frac{dt}{t} \geqslant H_n - 1 = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$. Ainsi, $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$. Comme $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n) + 1$, par encadrement, on a donc $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

11.110 **a.** • Par définition de X_1X_2, on a $X_1X_2(\Omega) \subset \{-1, 1\}$ et $(X_1X_2 = 1) = (X_1 = 1, X_2 = 1) \sqcup (X_1 = -1, X_2 = -1)$ donc, par incompatibilité de ces deux évènements et indépendance de X_1, X_2, $\mathbb{P}(X_1X_2 = 1) = p^2 + (1-p)^2$. De même, $(X_1X_2 = 1) = (X_1 = 1, X_2 = -1) \sqcup (X_1 = -1, X_2 = 1)$ donc $\mathbb{P}(X_1X_2 = -1) = 2p(1-p)$.

$(\Longleftarrow)$ Si X_1X_2 et X_1 sont indépendantes, $\mathbb{P}(X_1X_2 = -1, X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1X_2 = -1)\,\mathbb{P}(X_1 = 1)$ par exemple. Or $(X_1X_2 = -1, X_1 = 1) = (X_1 = 1, X_2 = -1)$ donc $\mathbb{P}(X_1X_2 = -1, X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = -1)$ donc $\mathbb{P}(X_1X_2 = -1, X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\,\mathbb{P}(X_2 = -1) = p(1-p)$ car X_1, X_2 indépendantes et on a $p(1-p) = 2p(1-p)p$ qui équivaut à $p(1-p)(1-2p) = 0$ donc $p = \frac{1}{2}$ car $p \in]0; 1[$.

$(\Longrightarrow)$ Réciproquement, si $p = \frac{1}{2}$, on a $\mathbb{P}(X_1X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1X_2 = -1) = \frac{1}{4}$. De plus, pour tout couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 1\}^2$, on a $(X_1 = \varepsilon_1, X_1X_2 = \varepsilon_2) = (X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2)$ car $\frac{1}{\varepsilon_1} = \varepsilon_1$ puisque $\varepsilon_1 \in \{-1, 1\}$, ainsi $\mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1, X_1X_2 = \varepsilon_2) = \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2) = \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1)\,\mathbb{P}(X_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2) = \frac{1}{4}$ donc on en déduit la relation $\mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1, X_1X_2 = \varepsilon_2) = \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1)\,\mathbb{P}(X_1X_2 = \varepsilon_2)$, les variables X_1 et X_1X_2 sont indépendantes. Par symétrie entre X_1 et X_2, X_2 et $X_2X_1 = X_1X_2$ le sont aussi.

En conclusion, X_1 et X_1X_2 (resp. X_2 et X_1X_2) sont indépendantes si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

b. Écrivons la loi du couple (X_1, X_2). Pour $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 1\}^2$, $\big((X_1, X_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\big) = (X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_2)$ donc, par indépendance de X_1 et X_2, $\mathbb{P}\big((X_1, X_2) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\big) = P(X_1 = \varepsilon_1, X_2 = \varepsilon_2) = \mathbb{P}(X_1 = \varepsilon_1)\,\mathbb{P}(X_2 = \varepsilon_2)$ donc $\mathbb{P}\big((X_1, X_2) = (1, 1)\big) = p^2$, $\mathbb{P}\big((X_1, X_2) = (1, -1)\big) = p(1-p)$, $\mathbb{P}\big((X_1, X_2) = (-1, 1)\big) = p(1-p)$ et $\mathbb{P}\big((X_1, X_2) = (-1, -1)\big) = (1-p)^2$.

X_1X_2 et (X_1, X_2) ne sont indépendantes pour aucune valeur de p car $(X_1X_2 = -1, (X_1, X_2) = (1, 1)) = \emptyset$ donc $\mathbb{P}(X_1X_2 = -1, (X_1, X_2) = (1, 1)) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X_1X_2 = -1)\,\mathbb{P}((X_1, X_2) = (1, 1)) = 2p^3(1-p) \neq 0$.

11.111 **a.** Par construction, $Z_m(\Omega)[\![1;n]\!]$. Soit $k \in [\![1;n]\!]$, on a deux cas :

- si $k \leqslant m$, $(Z_m = k) = \bigsqcup_{i=0}^{m}(X = k, Y = i)$ (réunion disjointe) donc $\mathbb{P}(Z_m = k) = \sum_{i=0}^{m} \mathbb{P}(X = k, Y = i)$ et, puisque $X \perp\!\!\!\perp Y$ et suivent la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(Z_m = k) = \sum_{i=0}^{m} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = i) = \frac{m}{n^2}$.
- si $k > m$, on a $(Z_m = k) = (Y = k) \cup \Big(\bigsqcup_{i=0}^{m}(X = k, Y = i)\Big)$ (réunion disjointe à nouveau) donc $\mathbb{P}(Z_m = k) = \mathbb{P}(Y = k) + \sum_{i=0}^{m} \mathbb{P}(X = k, Y = i)$ et, puisque X et Y sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$, on a $\mathbb{P}(Z_m = k) = \mathbb{P}(Y = k) + \sum_{i=0}^{m} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{n} + \frac{m}{n^2}$.

b. $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$.
Pour $m \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{E}(Z_m) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(Z_m = k) = \sum_{k=1}^{m} k\frac{m}{n^2} + \sum_{k=m+1}^{n} k\Big(\frac{1}{n} + \frac{m}{n^2}\Big)$ d'après **a.**. On en déduit que $\mathbb{E}(Z_m) = \frac{m}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n} k = \frac{m}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} k = \frac{mn(n+1)}{2n^2} + \frac{n(n+1)}{2n} - \frac{m(m+1)}{2n}$ donc on l'expression compacte $\mathbb{E}(Z_m) = \frac{(m+n)(n+1) - m(m+1)}{2n}$.

c. Posons $f : x \mapsto (x+n)(n+1) - x(x+1)$ polynomiale sur $\mathbb{R}$ donc dérivable et $f'(x) = n+1-2x-1 = n-2x$. Ainsi, f est strictement croissante sur $[1;n/2]$ et strictement décroissante sur $[n/2;n]$ donc maximale en $\frac{n}{2}$.
Traitons donc deux cas :

- Si n est pair, $n = 2p$ et f est maximale en p donc $\mathbb{E}(Z_m)$ est maximale pour $m_0 = p$ uniquement et $\mathbb{E}(Z_{m_0}) = \mathbb{E}(Z_p) = \frac{5p-2}{4}$ (après calculs).
- Si n est impair, $n = 2p+1$ donc la valeur maximale de $\mathbb{E}(Z_m)$ est soit $\mathbb{E}(Z_p)$, soit $\mathbb{E}(Z_{p+1})$. Or, après calculs toujours, on vérifie que $\mathbb{E}(Z_p) = \mathbb{E}(Z_{p+1}) = \frac{5p^2+7p+2}{2(2p+1)}$ donc $\mathbb{E}(Z_m)$ est maximale pour les deux valeurs $m_0 = p$ ou $m_0 = p+1$ et $\mathbb{E}(Z_{m_0}) = \frac{5p^2+7p+2}{2(2p+1)}$.

11.112 **a.** Quand on choisit l'urne U_i, la probabilité de tirer une boule blanche est de $\frac{i}{p}$, et comme les tirages se font avec remise, ils sont indépendants. D'après le cours, la loi de N_p sachant A_i est la loi binomiale $\mathcal{B}\Big(n, \frac{i}{p}\Big)$. Par conséquent, $\mathbb{P}_{A_i}(N_p = k) = \binom{n}{k}\Big(\frac{i}{p}\Big)^k\Big(1 - \frac{i}{p}\Big)^{n-k}$ pour $i \in [\![0;p]\!]$ et $k \in [\![0;n]\!]$.
b. La variable aléatoire N_p est bornée car $0 \leqslant N_p \leqslant n$ donc elle admet une espérance finie et on a par définition $\mathbb{E}(N_p) = \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(N_p = k)$. Comme $\{A_0, \cdots, A_p\}$ est un système complet d'évènements, on a $\mathbb{P}(N_p = k) = \sum_{i=0}^{p} \mathbb{P}_{A_i}(N_p = k)\mathbb{P}(A_i)$ par la formule des probabilités totales. Si on suppose que toutes les urnes ont la même chance d'être choisies, $\mathbb{P}(N_p = k) = \sum_{i=0}^{p} \frac{\mathbb{P}_{A_i}(N_p = k)}{p+1}$. En reportant, on a donc la relation $\mathbb{E}(N_p) = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{n} k \sum_{i=0}^{p}\binom{n}{k}\Big(\frac{i}{p}\Big)^k\Big(1 - \frac{i}{p}\Big)^{n-k}$. En inversant cette somme double, on obtient $\mathbb{E}(N_p) = \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\Big(\frac{i}{p}\Big)^k\Big(1 - \frac{i}{p}\Big)^{n-k}$ qui devient, car $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et en posant le changement d'indice $j = k-1$, $\mathbb{E}(N_p) = \frac{n}{p+1}\sum_{i=0}^{p}\frac{i}{p}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\Big(\frac{i}{p}\Big)^j\Big(1 - \frac{i}{p}\Big)^{n-1-j}$. Or, avec le binôme

de NEWTON, on a $\sum\limits_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\left(\frac{i}{p}\right)^j\left(1-\frac{i}{p}\right)^{n-1-j} = \left(1-\frac{i}{p}+\frac{i}{p}\right)^{n-1} = 1$ donc on obtient finalement $\mathbb{E}(N_p) = \frac{n}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p}\frac{i}{p} = \frac{np(p+1)}{2(p+1)p} = \frac{n}{2}$. Rien que de très prévisible car il y a autant de chance en général de tirer des boules blanches ou noires et on en tire n en tout.

c. Pour $k \in [\![1;n-1]\!]$, on a $\mathbb{P}(N_p = k) = \frac{1}{p+1}\sum\limits_{i=0}^{p}\binom{n}{k}\left(\frac{i}{p}\right)^k\left(1-\frac{i}{p}\right)^{n-k}$ d'après la question précédente donc $\mathbb{P}(N_p = k) = \binom{n}{k}\frac{p}{p+1}\left[\frac{0^k 1^{n-k}}{p}+\frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{p}\left(\frac{i}{p}\right)^k\left(1-\frac{i}{p}\right)^{n-k}\right]$. Comme $f_k : x \mapsto x^k(1-x)^{n-k}$ est continue sur le segment $[0;1]$, et que $\frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{p}\left(\frac{i}{p}\right)^k\left(1-\frac{i}{p}\right)^{n-k} = \frac{1-0}{p}\sum\limits_{i=1}^{p} f_k\left(\frac{i}{p}\right)$ est une somme de RIEMANN associée à cette fonction, par théorème, $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{1}{p}\sum\limits_{i=1}^{p}\left(\frac{i}{p}\right)^k\left(1-\frac{i}{p}\right)^{n-k} = \int_0^1 f_k(x)dx$. Il est clair que $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{p}{p+1} = 1$ et $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{0^k 1^{n-k}}{p} = 0$ donc, par somme et produit, $\lim\limits_{p\to+\infty}\mathbb{P}(N_p = k) = \binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$.

11.113 **a.** Par construction, on a $X(\Omega) = [\![2;+\infty]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1;+\infty]\!]$ en convenant que $Y = +\infty$ si on n'obtient jamais pile et $X = +\infty$ si on n'obtient jamais la séquence "pile-face". On a aussi $X \geqslant Y+1$. En notant l'évènement P_k = "on tombe sur pile au lancer k", on peut écrire, pour des entiers $x \geqslant 2$ et $y \geqslant 1$ tels que $x > y$, $(X = x, Y = y) = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{y-1}\overline{P_i}\right)\cap\left(\bigcap\limits_{i=y}^{x-1}P_i\right)\cap\overline{P_x}$. On suppose que $(P_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite d'évènements indépendants, ce qui montre d'après le cours que $\overline{P_1},\cdots\overline{P_{y-1}},P_y,\cdots,P_{x-1},\overline{P_x}$ le sont aussi, ce qui donne $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \prod\limits_{i=1}^{y-1}\mathbb{P}(\overline{P_i})\times\prod\limits_{i=y}^{x-1}\mathbb{P}(P_i)\times\mathbb{P}(\overline{P_x}) = \frac{1}{2^x}$ car la pièce est équilibrée par hypothèse.

Pour $n \geqslant 1$, $(Y = +\infty) \subset \bigcap\limits_{y=1}^{n}\overline{P_y}$ donc $0 \leqslant \mathbb{P}(Y = +\infty) \leqslant \frac{1}{2^n}$. Par encadrement, $\mathbb{P}(Y = +\infty) = 0$.

b. Soit $x \geqslant 2$, on a $(X = x) = \bigsqcup\limits_{y=1}^{x-1}(X = x, Y = y)$ (réunion disjointe) donc $\mathbb{P}(X = x) = \sum\limits_{y=1}^{x-1}\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ par σ-additivité. Ainsi, $\mathbb{P}(X = x) = \frac{x-1}{2^x}$. On sait que $\forall t \in]-1;1[$, $\sum\limits_{x=2}^{+\infty}t^{x-1} = \frac{t}{1-t} = \frac{1}{1-t}-1$. On dérive à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence pour avoir $\forall t \in]-1;1[$, $\sum\limits_{x=2}^{+\infty}(x-1)t^{x-2} = \frac{1}{(1-t)^2}$ donc $\forall t \in]-1;1[$, $\sum\limits_{x=2}^{+\infty}(x-1)t^x = \frac{t^2}{(1-t)^2}$. En prenant $t = \frac{1}{2}$, on a $\sum\limits_{x=2}^{+\infty}\mathbb{P}(X = x) = 1$ donc, comme $\Omega = (X = +\infty)\sqcup\left(\bigsqcup\limits_{x=2}^{+\infty}(X = x)\right)$, il vient $\mathbb{P}(X = +\infty) = 1-\sum\limits_{x=2}^{+\infty}\mathbb{P}(X = x) = 0$ comme attendu.

c. $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x=2}^{+\infty}x\,\mathbb{P}(X = x) = \sum\limits_{x=2}^{+\infty}\frac{x(x-1)}{2^x}$. On dérive une autre fois $\forall t \in]-1;1[$, $\sum\limits_{x=2}^{+\infty}(x-1)t^x = \frac{t^2}{(1-t)^2}$ pour avoir $\forall t \in]-1;1[$, $\sum\limits_{x=2}^{+\infty}x(x-1)t^{x-1} = \frac{2t}{(1-t)^3}$ d'où $\forall t \in]-1;1[$, $\sum\limits_{x=2}^{+\infty}x(x-1)t^x = \frac{2t^2}{(1-t)^3}$. Avec $t = \frac{1}{2}$ à nouveau, on a $\mathbb{E}(X) = 4$.

11.114 **a.** Comme $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $(Y = n) = \bigsqcup\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X = k, Y = n)$ (incompatible) donc, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(Y = n) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X = k, Y = n) = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{p}{2^n}(1-p)^n$ d'après l'énoncé. Ainsi,

$\mathbb{P}(Y=n) = \dfrac{p}{2^n}(1-p)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \dfrac{p}{2^n}(1-p)^n(1+1)^n = p(1-p)^n$. Par conséquent, $1+Y$ suit la loi géométrique de paramètre p car $(1+Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(Y+1=n) = \mathbb{P}(Y=n-1) = p(1-p)^{n-1}$.

b. On sait que $\forall x \in]-1;1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. En dérivant cette relation k fois sur l'intervalle ouvert de convergence de cette fonction développable en série entière, on obtient la formule du binôme négatif, qui s'écrit $\forall x \in]-1;1[$, $\dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}$.

c. $\forall k \in \mathbb{N}$, $(X=k) = \displaystyle\bigsqcup_{n=0}^{+\infty}(Y=n,\ X=k)$ (réunion disjointe) donc, par σ-additivité, on obtient comme avant $\mathbb{P}(X=k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=n,\ X=k) = p\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n(1-p)^n = p\Big(\frac{1-p}{2}\Big)^k\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\Big(\frac{1-p}{2}\Big)^{n-k}$.
Ainsi $\mathbb{P}(X=k) = p\,\Big(\dfrac{1-p}{2}\Big)^k \times \dfrac{1}{\Big(1-(\frac{1-p}{2})\Big)^{k+1}} = \Big(\dfrac{2p}{1+p}\Big)\Big(\dfrac{1-p}{1+p}\Big)^k = \Big(\dfrac{2p}{1+p}\Big)\Big(1-\dfrac{2p}{1+p}\Big)^k$ après simplification. Comme en question **a.**, $1+X$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{2p}{1+p}$.

$\mathbb{P}(X=Y=0) = p \neq \dfrac{2p^2}{1+p} = \mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0)$ car $p^2 \neq p$: X et Y ne sont pas indépendantes.

d. Z prend presque sûrement ses valeurs dans $\mathbb{N}$ d'après les conditions imposées à X et Y et pour $m \in \mathbb{N}$, comme avant, on a $(Z=m) = \displaystyle\bigsqcup_{k=0}^{+\infty}(X=k,\ Y=m+k)$ donc $\mathbb{P}(Z=m) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{m+k}{k}a^{m+k}(1-p)^{m+k}p$.
Comme $\dbinom{m+k}{k} = \dbinom{m+k}{m}$ et en posant $i = m+k$, on a $\mathbb{P}(Z=m) = \displaystyle\sum_{i=m}^{+\infty}\binom{i}{m}(a(1-p))^i p$ donc $\mathbb{P}(Z=m) = p(a(1-p))^m\displaystyle\sum_{i=m}^{+\infty}\binom{i}{m}(a(1-p))^{i-m} = p\Big(\frac{1-p}{2}\Big)^m \times \frac{1}{\Big(1-(\frac{1-p}{2})\Big)^{m+1}} = \frac{2p}{1+p}\Big(\frac{1-p}{1+p}\Big)^m$.

Ainsi, $1+Z$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{2p}{1+p}$, comme X.

e. Comme $\mathbb{P}(Y=n) = p(1-p)^n > 0$, la loi de X sachant $(Y=n)$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $k > n$, $\mathbb{P}(X=k|Y=n) = 0$ par hypothèse et, si $k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k|Y=n) = \dfrac{\mathbb{P}(X=k, Y=n)}{\mathbb{P}(Y=n)}$ par définition donc $\mathbb{P}(X=k|Y=n) = \dfrac{\binom{n}{k}(1/2)^n(1-p)^n p}{p(1-p)^n} = \dbinom{n}{k}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^n$. La loi de X sachant $(Y=n)$ est la loi $\mathcal{B}\Big(n, \dfrac{1}{2}\Big)$.

11.115 **a.** Si $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0;n]\!]$, $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{k+1}{n+1} \times \dfrac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \alpha\dbinom{n+1}{k+1}$ si $\alpha = \dfrac{k+1}{n+1}$.

b. Comme $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k) = 1 = \sum_{k=0}^{n}\frac{a}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$ d'après **a.** donc, en posant $m = k+1$, $\dfrac{a}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{a}{n+1}\bigg(\Big(\sum_{m=0}^{n+1}\binom{n+1}{m}\Big)-1\bigg) = \frac{a}{n+1}(2^{n+1}-1) = 1$ ce qui donne $a = \dfrac{n+1}{2^{n+1}-1}$.

c. Comme X est bornée, X admet des moments à n'importe quel ordre. Par définition de l'espérance, on a $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\,\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2^{n+1}-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{k(n+1)}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{2^{n+1}-1}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n+1}{k+1}$. En écrivant $k = (k+1)-1$, on a $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{2^{n+1}-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n+1}{k+1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}$ et $(k+1)\dbinom{n+1}{k+1} = (n+1)\dbinom{n}{k}$ donc

$\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2^{n+1}-1}\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k} - \dfrac{1}{2^{n+1}-1}\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n+1}{k+1} = \dfrac{(n+1)2^n}{2^{n+1}-1} - \dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}-1} = \dfrac{(n-1)2^n+1}{2^{n+1}-1}$.

De plus, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - E(X)^2 = \mathbb{E}(X(X+1)) - \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$ par linéarité de l'espérance. Or, par la formule de transfert, $\mathbb{E}(X(X+1)) = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(k+1)ka}{k+1}\dbinom{n}{k} = a\sum\limits_{k=1}^{n}k\dbinom{n}{k} = a\sum\limits_{k=1}^{n}n\dbinom{n-1}{k-1} = an2^{n-1}$. Ainsi, $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n(n+1)2^{n-1}}{2^{n+1}-1} - \dfrac{(n-1)2^n+1}{2^{n+1}-1} - \dfrac{((n-1)2^n+1)^2}{(2^{n+1}-1)^2} = \dfrac{(n+1)2^{2n}-(n+1)(n+2)2^{n-1}}{(2^{n+1}-1)^2}$.

11.116 **a.** On a $Y(\Omega) \subset (\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}) \setminus \{1\}$ par construction. Pour $k \geqslant 2$, en notant N_i le numéro du jeton obtenu au tirage i, on a $(Y=k) = \bigcup\limits_{\substack{1\leqslant a,b\leqslant 3\\ a\neq b}} (N_1 = a, \cdots, N_{k-1} = a, N_k = b)$ (on tire d'abord tout le temps le numéro a et enfin, au tirage k, on obtient le numéro b). Ces évènements étant incompatibles, comme il y a 6 couples (a,b) possibles, que les N_i sont indépendantes par hypothèse et suivent toutes la loi uniforme sur $[\![1;3]\!]$, $\mathbb{P}(Y=k) = 6\Big(\prod\limits_{i=1}^{k-1}\mathbb{P}(N_i = a)\Big)\mathbb{P}(N_k = b) = \frac{6}{3^k}$. $(Y \neq +\infty) = \bigcup\limits_{k=2}^{+\infty}(Y=k)$ (réunion incompatible) donc, par σ-additivité, $\mathbb{P}(Y \neq +\infty) = \sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{6}{3^k} = \frac{6}{9}\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{3^{k-2}} = \frac{6}{9}\times\dfrac{1}{1-(1/3)} = 1$. Comme attendu, on en conclut que $\mathbb{P}(Y=+\infty) = 0$ (il est presque sûr d'arriver à avoir deux numéros différents).

b. D'après la question précédente, $(Y-1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y-1=k) = \frac{6}{3^{k+1}} = \frac{2}{3}\times\Big(\frac{1}{3}\Big)^{k-1}$ donc $Y-1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$. Ainsi, d'après le cours et par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y-1)+1 = \frac{3}{2}+1 = \frac{5}{2}$ et $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(Y-1) = \dfrac{1-(2/3)}{(2/3)^2} = \frac{3}{4}$.

c. Pour $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a $\mathbb{P}(Y=m, Z=n) = 0$ si $n \leqslant m$ ou si $m = 1$ par construction. Si $n > m \geqslant 2$, on a $(Y=m, Z=n) = (Y=m, Z-Y=n-m)$ et $Z-Y$ représente le temps d'attente du troisième numéro une fois obtenus les deux premiers. $Z-Y$ et Y sont donc indépendants et $Z-Y$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$ donc $\mathbb{P}(Y=m, Z=n) = \mathbb{P}(Y=m)\,\mathbb{P}(Z-Y=n-m) = \frac{6}{3^m}\times\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-m-1}\times\frac{1}{3} = \frac{2^{n-m}}{3^{n-1}}$.

d. Par construction, $Z(\Omega) \subset (\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}) \setminus \{1,2\}$. Pour $n \geqslant 3$, $(Z=n) = \bigcup\limits_{m=2}^{n-1}(Y=m, Z=n)$ (réunion incompatible) donc $\mathbb{P}(Z=n) = \sum\limits_{m=2}^{n-1}\frac{2^{n-m}}{3^{n-1}} = \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}\sum\limits_{m=2}^{n-1}\frac{1}{2^{m-2}} = \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}\times\dfrac{1-(1/2)^{n-2}}{1-(1/2)} = \dfrac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}}$.

À nouveau, $(Z \neq +\infty) = \bigcup\limits_{n=3}^{+\infty}(Z=n)$ donc $\mathbb{P}(Z \neq +\infty) = \sum\limits_{n=3}^{+\infty}\dfrac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}} = \frac{4}{9}\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{2^{n-3}}{3^{n-3}} - \frac{2}{9}\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{3^{n-3}}$ donc $\mathbb{P}(Z \neq 0) = \frac{4}{9}\times\dfrac{1}{1-(2/3)} - \frac{2}{9}\times\dfrac{1}{1-(1/3)} = \frac{4}{3}-\frac{1}{3} = 1$. Comme attendu, on a $\mathbb{P}(Z=+\infty) = 0$ (il est presque sûr d'arriver à avoir les trois numéros). $\sum\limits_{n\geqslant 3} n\,\mathbb{P}(Z=n)$ converge car, par croissances comparées, $n\,\mathbb{P}(Z=n) = n\dfrac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}} \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$. Ainsi, $\mathbb{E}(Z) = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(Z=n) = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} n\dfrac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}}$. Or, pour tout $x \in]-1;1[$, $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} nx^{n-1} = \Big(\sum\limits_{n=3}^{+\infty} x^n\Big)' = \Big(\dfrac{1}{1-x} - 1 - x - x^2\Big)' = \dfrac{1}{(1-x)^2} - 1 - 2x$ en dérivant terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence. En écrivant $\mathbb{E}(Z) = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} n\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-1} - 2\sum\limits_{n=3}^{+\infty} n\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n-1}$, on a donc $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{(1-(2/3))^2} - 1 - 2(2/3) - 2\Big(\dfrac{1}{(1-(1/3))^2} - 1 - 2(1/3)\Big) = \dfrac{11}{2}$.

On pouvait dire, par indépendance de Y et $Z-Y$, que $\mathbb{E}(Z)=\mathbb{E}(Y)+\mathbb{E}(Z-Y)=\dfrac{5}{2}+3$ puisque $Z-Y$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.

11.117 **a.** $Z(\Omega)\subset\mathbb{N}$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, comme X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $(Z=k)=\displaystyle\bigsqcup_{i=0}^{k}(X=i,\ Y=k-i)$ donc Z est une variable aléatoire car X et Y le sont. Comme ces évènements sont incompatibles, on a $\mathbb{P}(Z=k)=\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\mu}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i}=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!}(\lambda+\mu)^k$.
Ceci prouve que $Z=X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

b. Si $Z=n$, on a forcément $X\in[\![0;n]\!]$. Soit $k\in[\![0;n]\!]$, calculons $\mathbb{P}(X=k|Z=n)=\dfrac{\mathbb{P}(X=k,Z=n)}{\mathbb{P}(Z=n)}$. Or $(X=k,Z=n)=(X=k,Y=n-k)$ donc, par indépendance de X et Y, en posant $p=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\in]0;1[$, on a $\mathbb{P}(X=k|Z=n)=\dfrac{\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(Z=n)}=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k e^{-\mu}\mu^{n-k}n!}{k!(n-k)!e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Ainsi, la loi de X sachant $(Z=n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}\Big(n,\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\Big)$.

11.118 **a.** On peut mettre un jeton dans chaque urne et on peut mettre tous les jetons dans l'urne U_1, ce sont les cas extrêmes. Tous les cas intermédiaires sont possibles. Ainsi, $X_n(\Omega)=[\![0;n-1]\!]$. Si on note L_k le numéro de l'urne dans laquelle on met le k-ième jeton, on a $(X_n=0)=\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n}(L_k=k)$ (le jeton k dans l'urne U_k) ou $(X_n=n-1)=\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n}(L_k=1)$ (tous les jetons dans l'urne U_1) donc, par indépendance des "placements", $\mathbb{P}(X_n=0)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(L_k=k)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n!}$ et $\mathbb{P}(X_n=n)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(L_k=1)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n!}$.

b. Comme le premier jeton va dans l'urne U_1 par définition, $\mathbb{P}(B_1=1)=0$ et $\mathbb{P}(B_1=0)=1$.

Soit $k\in[\![2;n]\!]$, les $k-1$ premiers jetons ne peuvent pas aller dans l'urne U_k par construction, et l'urne U_k est vide à la fin si et seulement si les $n-k+1$ derniers jetons ne sont pas mis dans l'urne U_k. Ainsi, on a $(B_k=1)=\displaystyle\bigcap_{i=k}^{n}(L_i\neq k)$. Par "indépendance des jetons", $\mathbb{P}(B_k=1)=\displaystyle\prod_{i=k}^{n}\mathbb{P}(L_i\neq k)=\prod_{i=k}^{n}\frac{i-1}{i}=\frac{k-1}{n}$ par télescopage multiplicatif (marche aussi si $k=1$) : B_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{k-1}{n}$.

c. Comme $X_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}B_k$, $\mathbb{E}(X_n)=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\mathbb{E}(B_k)=\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{n}=\frac{n(n-1)}{2n}=\frac{n-1}{2}$ par linéarité de l'espérance. D'après le cours, $\mathbb{V}\Big(\displaystyle\sum_{k=2}^{n}B_k\Big)=\sum_{k=2}^{n}\mathbb{V}(B_k)+2\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{Cov}(B_i,B_j)$. Comme $B_k\sim\mathcal{B}\Big(\dfrac{k-1}{n}\Big)$, on sait que $\mathbb{V}(B_k)=\dfrac{k-1}{n}\Big(1-\dfrac{k-1}{n}\Big)=\dfrac{(k-1)(n-k+1)}{n^2}$. De plus, $\mathrm{Cov}(B_i,B_j)=\mathbb{E}(B_iB_j)-\mathbb{E}(B_i)\,\mathbb{E}(B_j)$ et la variable aléatoire B_iB_j suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(B_iB_j=1)=\mathbb{P}(B_i=1,B_j=1)$ car elle ne peut valoir que 0 ou 1. Comme avant, si $i<j$ et $n\geqslant 2$, $(B_i=1,B_j=1)=\Big(\displaystyle\bigcap_{k=i}^{j-1}(L_k\neq i)\Big)\times\Big(\bigcap_{k=j}^{n}(L_k\notin\{i,j\})\Big)$ d'où $\mathbb{P}(B_i=1,B_j=1)=\Big(\displaystyle\prod_{k=i}^{j-1}\frac{k-1}{k}\Big)\times\Big(\prod_{k=j}^{n}\frac{k-2}{k}\Big)=\frac{i-1}{j-1}\times\frac{(j-2)(j-1)}{n(n-1)}=\frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$ par indépendance des L_k. Ainsi, $\mathbb{V}(X_n)=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(n-k+1)}{n^2}+2\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}\frac{(i-1)(j-2)}{n(n-1)}$. En décalant les indices dans les deux

sommes, on obtient $\mathbb{V}(X_n)=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{m=1}^{n-1}m(n-m)+\frac{2}{n(n-1)}\sum\limits_{v=2}^{n-1}(v-1)\Big(\sum\limits_{u=1}^{v-1}u\Big)$. On connaît ces sommes, et on a $\mathbb{V}(X_n)=\frac{n^2(n-1)}{2n^2}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^2}+\frac{1}{n(n-1)}\sum\limits_{v=2}^{n-1}(v-1)^2v$. En écrivant $v=(v-1)+1$ et en décalant à nouveau, $\mathbb{V}(X_n)=\frac{n-1}{2}-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}+\frac{1}{n(n-1)}\Big(\frac{(n-2)^2(n-1)^2}{4}+\frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}\Big)$. Après simplifications, avec $\mathbb{V}(X_1)=0$, on a $\forall n\geqslant 2,\ \mathbb{V}(X_n)=\frac{3n^3-9n^2+10n-2}{12n}$.

11.119 **a.** X est le nombre de succès dans une répétition de n expériences (obtenir la face 1 au k-ième lancer) de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. D'après le cours, X suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. De même, $Y\sim\mathcal{B}(n,q)$. Bien sûr, puisqu'il n'y a que des faces 1, 2 ou 3, en notant Z le nombre de 3 obtenus, on a $Z=n-X-Y$ et, comme avant, $Z\sim\mathcal{B}(n,r)$.

b. Notons, pour un lancer m, L_m le résultat du m-ième lancer. Pour $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$ tel que $i+j\leqslant n$, on a $(X=i,Y=j)=\bigsqcup\limits_{\substack{1\leqslant a_1<\cdots<a_i\leqslant n\\ 1\leqslant b_1<\cdots<b_j\leqslant n\\ I=\{a_1,\cdots,a_i\}\cap\{b_1,\cdots,b_j\}=\emptyset}}\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{i}(L_{a_k}=1)\Big)\cap\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{j}(L_{b_k}=2)\Big)\cap\Big(\bigcap\limits_{k\in[\![1;n]\!]\setminus I}(L_k=3)\Big)$. Par indépendance des L_k, chaque évènement $\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{i}(L_{a_k}=1)\Big)\cap\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{j}(L_{b_k}=2)\Big)\cap\Big(\bigcap\limits_{k\in[\![1;n]\!]\setminus I}(L_k=3)\Big)$ a pour probabilité $p^iq^jr^{n-i-j}$. Or il y a $\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}$ évènements de ce type, c'est-à-dire de manière de choisir i entiers dans $[\![1;n]\!]$ (les lancers qui vont donner 1) puis j entiers dans les $n-i$ restants (ceux qui vont donner 2), les autres donnant forcément 3.

On trouve donc, si $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$ tel que $i+j\leqslant n$, $\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}p^iq^jr^{n-i-j}$.

Comme $(X=n,Y=n)=\emptyset$ car on ne peut pas avoir n fois 1 et n fois 2 en n lancers, $\mathbb{P}(X=n,Y=n)=0$ alors que $\mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}(Y=n)=p^nq^n\neq 0$ d'après **a.**. Ainsi, X et Y ne sont pas indépendantes.

d. Comme $N(\Omega)=\mathbb{N}$, on a aussi $X(\Omega)=\mathbb{N}$. Pour $i\in\mathbb{N}$, $(X=i)=\bigsqcup\limits_{n=i}^{+\infty}(X=i,N=n)$ car on a forcément $X\leqslant N$. Ces évènements étant incompatibles, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(X=i)=\sum\limits_{n=i}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i,N=n)$ donc $\mathbb{P}(X=i)=\sum\limits_{n=i}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i|N=n)\,\mathbb{P}(N=n)$. Or, la loi de X sachant $(N=n)$ est la loi binomiale de la question **a.** car on compte le nombre de 1 dans une répétition indépendante de lancers de même loi. Ainsi, $\mathbb{P}(X=i)=\sum\limits_{n=i}^{+\infty}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}=\frac{e^{-\lambda}p^i\lambda^i}{i!}\sum\limits_{n=i}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-i}(1-p)^{n-i}}{(n-i)!}=\frac{e^{-\lambda}p^i\lambda^i}{i!}\times e^{\lambda(1-p)}=\frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^i}{i!}$. Par conséquent, X suit dans ce cas la loi de Poisson de paramètre $p\lambda$. Par symétrie, $Y\sim\mathcal{P}(q\lambda)$.

Soit $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $(X=i,Y=j)=\bigsqcup\limits_{n=i+j}^{+\infty}(X=i,Y=j,N=n)$ car on a $X+Y\leqslant N$. À nouveau, par incompatibilité de ces évènements et σ-additivité, on a $\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\sum\limits_{n=i+j}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=j,N=n)$ donc $\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\sum\limits_{n=i+j}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=j|N=n)\,\mathbb{P}(N=n)$. En se servant de la question **b.**, on a donc

$\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\sum\limits_{n=i+j}^{+\infty}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}p^iq^jr^{n-i-j}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}=\dfrac{e^{-\lambda}p^iq^j\lambda^{i+j}}{i!j!}\sum\limits_{n=i+j}^{+\infty}\dfrac{r^{n-i-j}\lambda^{n-i-j}}{(n-i-j)!}$ qui se simplifie en $\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\dfrac{e^{-\lambda}p^iq^j\lambda^{i+j}e^{r\lambda}}{i!j!}=\dfrac{e^{-\lambda(p+q)}p^iq^j\lambda^{i+j}}{i!j!}=\dfrac{e^{-p\lambda}p^i\lambda^i}{i!}\times\dfrac{e^{-q\lambda)}q^j\lambda^j}{j!}$ car $r=1-p-q$. On a donc $\forall(i,j)\in\mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X=i,Y=j)=\mathbb{P}(X=i)\times\mathbb{P}(Y=j)$ d'après **d.** donc X et Y sont indépendantes.

11.120 **a.** L'application nulle est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 de Ω dans $\mathbb{R}$ et une combinaison linéaire de deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2 est aussi une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 d'après le cours, donc E est un espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à n car engendré par n "vecteurs". La variable aléatoire nulle appartient à G. Si $(X,Y)\in G^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\lambda X+\mu Y$ est une variable aléatoire réelle sur Ω et, comme $0\leqslant\mathbb{E}(XY)^2\leqslant\mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2)=0$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\mathbb{E}((\lambda X+\mu Y)^2)=\lambda^2\,\mathbb{E}(X^2)+2\lambda\mu\,\mathbb{E}(XY)+\mu^2\,\mathbb{E}(Y^2)=0$. Ainsi, G est bien un sous-espace vectoriel de E et, en tant que tel en dimension finie, admet un supplémentaire F.

Si $(X,Y)\in E^2$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, XY admet une espérance finie donc f est bien définie sur E. f est bilinéaire par linéarité de l'espérance, symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ et positive car X^2 étant une variable aléatoire positive, on a $\mathbb{E}(X^2)=f(X,X)\geqslant 0$. Par contre, $f(X,X)=\mathbb{E}(X^2)=0$ pour toute variable aléatoire X non nulle de G donc f n'est pas définie positive donc pas un produit scalaire sur E si $G\neq\{0\}$ car pour toute variable aléatoire X non nulle de G. Néanmoins, si $G=\{0\}$ et si $f(X)=\mathbb{E}(X^2)=0$, alors $X\in G$ donc $X=0$ et f est bien définie positive.

b. Par contre, $g=f|_{F^2}:F^2\to\mathbb{R}$ définie par $\forall(X,Y)\in F^2,\ g(X,Y)=f(X,Y)=\mathbb{E}(XY)$ a les mêmes propriétés de bilinéarité, symétrie, et positivité en tant qu'application induite mais elle est aussi définie positive car si $X\in F$ et $g(X,X)=\mathbb{E}(X^2)=0$, on a $X\in F\cap G=\{0_E\}$ donc $X=0$ est la variable aléatoire nulle. Par conséquent, $g=f|_{F^2}$ est un produit scalaire sur F.

c. Pour $(X,Y)\in F^2$, on a $\mathbb{E}(XY)^2\leqslant\mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2)$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

d. Méthode 1 : les variables aléatoires Z et $\mathbb{1}_{(Z>0)}$ admettent un moment d'ordre 2 donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(Z>0)}Z)^2\leqslant\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(Z>0)}^2)\,\mathbb{E}(Z^2)$. Or $\mathbb{1}_{(Z>0)}^2=\mathbb{1}_{(Z>0)}$ ce qui montre que $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(Z>0)}^2)=\mathbb{P}(Z>0)$ et $\mathbb{1}_{(Z>0)}Z=Z$ car Z est positive. On a donc $\mathbb{E}(Z)^2\leqslant\mathbb{P}(Z>0)\,\mathbb{E}(Z^2)$ donc, comme $\mathbb{E}(Z^2)>0$ par hypothèse, on a bien $\mathbb{P}(Z>0)\geqslant\dfrac{\mathbb{E}(Z)^2}{\mathbb{E}(Z^2)}$.

Méthode 2 : par définition $\mathbb{E}(Z)=\sum\limits_{z\in Z(\Omega)}z\,\mathbb{P}(Z=z)\geqslant 0$ puis par inégalité de Cauchy-Schwarz sur les séries, en écrivant $\mathbb{E}(Z)=\sum\limits_{\substack{z\in Z(\Omega)\\ z>0}}(z\sqrt{\mathbb{P}(Z=z)})(\sqrt{\mathbb{P}(Z=z)})$, comme ces séries convergent, on obtient $\mathbb{E}(Z)\leqslant\Big(\sum\limits_{\substack{z\in Z(\Omega)\\ z>0}}z^2\,\mathbb{P}(Z=z)\Big)\times\Big(\sum\limits_{\substack{z\in Z(\Omega)\\ z>0}}\mathbb{P}(Z=z)\Big)=\mathbb{E}(Z^2)\,\mathbb{P}(Z>0)$ donc $\mathbb{P}(Z>0)\geqslant\dfrac{\mathbb{E}(Z)^2}{\mathbb{E}(Z^2)}$ car $\mathbb{E}(Z^2)>0$.

e. Notons A_i le nombre d'arêtes issues du sommet i, on a $A_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}X_{i,j}$ par définition donc, comme les variables aléatoires $X_{i,j}$ suivent la même loi de Bernoulli et qu'elles sont indépendantes, d'après le cours, A_i suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n-1,p_n)$.

f. Aucune arête ne part du sommet i si et seulement si $A_i=0$. Ainsi, $Z_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{(A_i=0)}$ et, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(A_i=0)}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i = 0) = n(1-p_n)^{n-1}$.

g. Comme $p_n = c\dfrac{\ln(n)}{n}$, on a $\mathbb{E}(Z_n) = n(1-p)^{n-1} = n\exp\left((n-1)\ln\left(1 - c\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ donc $(n-1)\ln\left(1-c\dfrac{\ln(n)}{n}\right) \underset{+\infty}{=} n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(-c\dfrac{\ln(n)}{n}+O\left(\dfrac{\ln(n)^2}{n^2}\right)\right) \underset{+\infty}{=} -c\ln(n)+o(1)$ (après regroupement). Ainsi, $\exp\left((n-1)\ln\left(1-c\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right) \underset{+\infty}{=} e^{-c\ln(n)+o(1)} \underset{+\infty}{=} n^{-c}e^{o(1)} \underset{+\infty}{\sim} n^{-c}$ et on conclut que $\mathbb{E}(Z_n) \underset{+\infty}{\sim} n^{1-c}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z_n) = 0$ si $c > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z_n) = +\infty$ si $c < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z_n) = 1$ si $c = 1$.

h. Comme Z_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}(Z_n) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_n \geqslant k) \geqslant \mathbb{P}(Z_n \geqslant 1) = \mathbb{P}(Z_n > 0)$. Ainsi, il vient $\mathbb{P}(Z_n \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}(Z_n)$. C'est d'ailleurs direct par MARKOV car Z_n est à valeurs positives donc, avec $\varepsilon = 1 > 0$, $\mathbb{P}(Z_n \geqslant 1) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(Z_n)}{1}$. Or, comme $\forall n \geqslant n_0,\ \mathbb{E}(Z_n) \leqslant n\exp\left((n-1)\ln\left(1 - c\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right)$ car $c\dfrac{\ln(n)}{n} \leqslant p_n < 1$ pour tout $n \geqslant n_0$. On a donc, d'après **g.** et par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n > 0) = 0$ dans ces conditions. On n'a presque sûrement aucun sommet isolé quand n tend vers $+\infty$.

i. On développe $Z_n^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(A_i=0)}\right)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(A_i=0)}^2 + 2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{1}_{(A_i=0)}\mathbb{1}_{(A_j=0)}$ ce qui donne, comme $\mathbb{1}_{(A_i=0)}^2 = \mathbb{1}_{(A_i=0)}$, la relation $Z_n^2 = Z_n + 2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{1}_{(A_i=0)\cap(A_j=0)}$ d'où, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z_n^2) = \mathbb{E}(Z_n) + 2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{P}(A_i = 0, A_j = 0)$. Il y a une arête possible entre les sommets i et j, et $n-2$ autres arêtes possibles arrivant en i et $n-2$ autres arrivant en j. Par indépendance mutuelle, on obtient $\mathbb{P}(A_i = 0, A_j = 0) = (1-p_n)^{2n-3}$. Ainsi, en reportant, $\mathbb{E}(Z_n^2) = n(1-p_n)^{n-1} + n(n-1)(1-p_n)^{2n-3}$ donc, en factorisant par rapport aux puissances de $1-p_n$, $\mathbb{E}(Z_n^2) = n(1-p_n)^{n-1}(1+(n-1)(1-p_n)^{n-2})$. D'après la question **d.**, on a donc $1 \geqslant \mathbb{P}(Z_n > 0) \geqslant \dfrac{\mathbb{E}(Z_n)^2}{\mathbb{E}(Z_n^2)} = \dfrac{n}{n-1} \times (1-p_n) \times \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{(n-1)(1-p_n)^{n-2}}}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n-1} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-p_n) = 1$ car $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geqslant n_0,\ p_n \leqslant c\dfrac{\ln(n)}{n}$ et, comme en question **g.**, on a $\forall n \geqslant n_0,\ (n-1)(1-p_n)^{n-2} \geqslant (n-1)\exp\left((n-2)\ln(1-c\dfrac{\ln(n)}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Z_n)^2}{\mathbb{E}(Z_n^2)} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n > 0) = 1$ par encadrement. Il y a presque sûrement au moins un point isolé dans ce cas quand n tend vers $+\infty$ (en fait il y en a beaucoup puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Z_n) = +\infty$).

11.121 **a.** X_n représente le nombre de succès (la face du dé lancé vaut 1) lors d'une répétition de lancers indépendants suivant la même loi de BERNOULLI de paramètre $\dfrac{1}{2}$ (deux faces sur quatre). D'après le cours, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$. De même, comme il n'existe qu'une face sur quatre marquée 0 ou 2, Y_n et $Z_n = n - X_n - Y_n$ (qui représente le nombre de faces 2) suivent la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{4}\right)$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{n}{2}$ et $\mathbb{E}(Y_n) = \dfrac{n}{4}$.

b. Comme dit à la question précédente, $Z_n = n - X_n - Y_n$ suit la loi $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{4}\right)$ donc $(X_n + Y_n)(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et, pour $k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}(X_n + Y_n = k) = \mathbb{P}(Z_n = n-k) = \dbinom{n}{n-k}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-k}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{k}$ ce qui montre que $X_n + Y_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{3}{4}\right)$. On pouvait aussi dire que $X_n + Y_n$ représente le nombre de fois où l'on tombe sur les faces 0 ou 1 (3 faces sur 4) lors de n lancers indépendants avec la même conclusion, $X_n+Y_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{3}{4}\right)$.

c. Si F_k est le numéro de la face du lancer k, pour $(i,j) \in [\![0;n]\!]^2$, $\big((X_n,Y_n)=(i,j)\big)=\emptyset$ si $i+j>n$ et $\big((X_n,Y_n)=(i,j)\big) = \bigsqcup_{\substack{1\leqslant m_1<\cdots<m_i\leqslant n \\ 1\leqslant p_1<\cdots<p_j\leqslant n \\ \{m_1,\cdots,m_i\}_{(=M)}\cap\{p_1,\cdots,p_j\}_{(=P)}=\emptyset}} \bigcap_{k=1}^{i}(F_{m_k}=1) \cap \bigcap_{k=1}^{j}(F_{p_k}=0) \cap \bigcap_{k\notin M\cup P}(F_k=2)$ (réunion d'évènements incompatibles) donc, par indépendance des F_m et σ-additivité, on obtient la relation suivante : $\mathbb{P}((X_n,Y_n)=(i,j)) = N\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{4}\right)^j\left(\frac{1}{4}\right)^{n-i-j}$ où N est le nombre de $(i+j)$-uplets $(m_1,\cdots,m_i,p_1,\cdots,p_j)$ vérifiant les conditions imposées. Or il y a $\binom{n}{i}$ façons de choisir les $(m_1,\cdots,m_i)$ et, une fois choisi ce i-uplet, il y a, de manière indépendante, $\binom{n-i}{j}$ façons de choisir le j-uplet $(p_1,\cdots,p_j)$ parmi les $n-i$ lancers restants et un seul choix pour les indices correspondant à la face 2. Au total, cela donne l'expression $N=\binom{n}{i}\times\binom{n-i}{j}=\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}$ choix de tels $(i+j)$-uplets $(m_1,\cdots,m_i,p_1,\cdots,p_j)$.

Ainsi, $\mathbb{P}\big((X_n,Y_n)=(i,j)\big)=0$ si $i+j>n$ et $\mathbb{P}\big((X_n,Y_n)=(i,j)\big)=\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{4}\right)^{n-i}$ si $i+j\leqslant n$.

d. Comme X_n et Y_n sont bornées, la covariance demandée existe et $\mathrm{Cov}(X_n,Y_n)=\mathbb{E}(X_nY_n)-\mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(Y_n)$ donc $\mathrm{Cov}(X_n,Y_n)=\mathbb{E}(X_nY_n)-\frac{n^2}{8}$ d'après la question **a.**.

<u>Méthode 1 :</u> pour une variable aléatoire réelle U admettant un moment d'ordre 2, on a $\mathbb{E}(U^2)=\mathbb{V}(U)+\mathbb{E}(U)^2$ donc, comme on a aussi $X_nY_n=\frac{(X_n+Y_n)^2-X_n^2-Y_n^2}{2}$, par linéarité de l'espérance, cela donne la relation $\mathbb{E}(X_nY_n)=\frac{1}{2}\Big(\mathbb{V}(X_n+Y_n)+\mathbb{E}(X_n+Y_n)^2-\mathbb{V}(X_n)-\mathbb{V}(Y_n)-\mathbb{E}(X_n)^2-\mathbb{E}(Y_n)^2\Big)$. Or on connaît les lois de X_n, Y_n et X_n+Y_n donc $\mathbb{E}(X_n+Y_n)=\frac{3n}{4}$, $\mathbb{E}(X_n)=\frac{n}{2}$, $\mathbb{E}(Y_n)=\frac{n}{4}$, $\mathbb{V}(X_n)=\frac{n}{4}$, $\mathbb{V}(Y_n)=\frac{3n}{16}$ et $\mathbb{V}(X_n+Y_n)=\frac{3n}{16}$ ce qui donne $\mathbb{E}(X_nY_n)=\frac{1}{2}\left(\frac{3n}{16}+\frac{9n^2}{16}-\frac{n}{4}-\frac{3n}{16}-\frac{n^2}{4}-\frac{n^2}{16}\right)=\frac{n(n-1)}{8}$. Ainsi, on trouve $\mathrm{Cov}(X_n,Y_n)=\mathbb{E}(X_nY_n)-\frac{n^2}{8}=-\frac{n}{8}$.

<u>Méthode 2 :</u> par le théorème de transfert appliqué à (X_n,Y_n) dont on connaît la loi avec **c.** et avec $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ définie par $f(i,j)=ij$, on a $\mathbb{E}(X_nY_n)=\sum_{i+j\leqslant n} ij\,\mathbb{P}\big((X_n,Y_n)=(i,j)\big)=\sum_{i+j\leqslant n} ij\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{4}\right)^{n-i}$.

Traitons deux cas :

<u>$n=1$</u> Alors $X_1Y_1=0$ car il n'y a qu'un seul lancer donc $\mathbb{E}(X_1Y_1)=0$.

<u>$n\geqslant 2$</u> $\mathbb{E}(X_nY_n)=\frac{n(n-1)}{8}\sum_{\substack{i+j\leqslant n\\ i>0,j>0}}\frac{(n-2)!}{(i-1)!(j-1)!((n-2)-(i-1)-(j-1))!}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{(n-2)-(i-1)}$ et, avec $i'=i-1, j'=j-1$, $\mathbb{E}(X_nY_n)=\frac{n(n-1)}{8}\sum_{i'+j'\leqslant n-2}\frac{(n-2)!}{i'!j'!((n-2)-i'-j')!}\left(\frac{1}{2}\right)^{i'}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2-i'}$.

Avec **c.** appliquée avec $n-2$ à la place de n, comme $\Omega=\bigsqcup_{i'+j'\leqslant n-2}\big((X_{n-2},Y_{n-2})=(i',j')\big)$, on a $\sum_{i'+j'\leqslant n-2}\mathbb{P}\big((X_{n-2},Y_{n-2})=(i',j')\big)=\sum_{i'+j'\leqslant n-2}\frac{(n-2)!}{i'!j'!(n-2-i'-j')!}\left(\frac{1}{2}\right)^{i'}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2-i'}=1$. Cette relation est même vraie pour $n=2$ car $\sum_{i'+j'\leqslant 0}\frac{n!}{i'!j'!(0-i'-j')!}\left(\frac{1}{2}\right)^{i'}\left(\frac{1}{4}\right)^{0-i'}=\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^0=1$.

Ainsi, $\mathbb{E}(X_nY_n)=\frac{n(n-1)}{8}$.

Dans tous les cas, on a donc $\mathbb{E}(X_nY_n) = \dfrac{n(n-1)}{8}$ donc $\text{Cov}(X_n, Y_n) = \dfrac{n(n-1)}{8} - \dfrac{n^2}{8} = -\dfrac{n}{8}$.

11.122 Bien sûr, on suppose les tirages indépendants et équiprobables. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose l'évènement $R_n =$ "on tire une boule rouge au tirage n".

a. Soit $n \geqslant 0$ et $k \in [\![0; N-1]\!]$, on a deux possibilités pour avoir k boules rouges au bout de $n+1$ tirages :

- soit on a $k+1$ boules rouges au bout de n tirages et on a tiré une boule rouge au tirage $n+1$ qui a été remplacée par une boule verte.
- soit on a déjà k boules rouges au bout de p tirages et on a tiré une boule verte au tirage $p+1$.

Ceci se traduit par $(X_{n+1} = k) = \big((X_n = k) \cap \overline{R_{n+1}}\big) \sqcup \big((X_n = k+1) \cap R_{n+1}\big)$. Par incompatibilité de ces deux évènements, $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}_{(X_n=k)}(\overline{R_{n+1}})\,\mathbb{P}(X_n = k) + \mathbb{P}_{(X_n=k+1)}(R_{n+1})\,\mathbb{P}(X_n = k+1)$ (1).

Ou alors, comme $X_n(\Omega) \subset [\![N-n; N]\!]$, avec le système complet d'évènements $\big((X_n = i)\big)_{N-n \leqslant i \leqslant N}$ et la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(X_n + 1 = k) = \sum\limits_{i=N-n}^{N} \mathbb{P}(X_n = i)\,\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k)$ sachant que $i \neq k$ et $i \neq k+1$, $\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k) = 0$, ce qui donne à nouveau la formule (1).

Or, si $X_n = k$, il y a dans l'urne k boules rouges et $N-k$ boules vertes donc $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(\overline{R_{n+1}}) = \dfrac{N-k}{N}$. Et si $X_n = k+1$, il y a dans l'urne $k+1$ boules rouges et $N-k-1$ boules vertes donc $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(R_{n+1}) = \dfrac{k+1}{N}$.

Ainsi, avec la relation (1), on a $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{N-k}{N}\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\mathbb{P}(X_n = k+1)$.

Il reste à parler des cas particuliers :

- si $n = 0$ et $k = N$, on a $(X_1 = N) = \emptyset = (X_0 = N+1) = \emptyset$ et $(X_0 = N) = \Omega$ donc, comme $\dfrac{N-N}{N} = 0$, on a encore la relation $\mathbb{P}(X_{0+1} = N) = \dfrac{N-N}{N}\mathbb{P}(X_0 = N) + \dfrac{N+1}{N}\mathbb{P}(X_0 = N+1) = 0$.
- si ($n \geqslant 1$ et $k \geqslant N$) ou ($n = 0$ et $k > N$), on a $(X_{n+1} = N) = \emptyset = (X_n = N) = (X_n = N+1)$ donc on a toujours la relation $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{N-k}{N}\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\mathbb{P}(X_n = k+1) = 0$.

Ainsi, dans tous les cas, $\forall n \geqslant 0$, $\forall k \geqslant 0$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \dfrac{N-k}{N}\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\mathbb{P}(X_n = k+1)$.

b. Pour $n \geqslant 0$, on a $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ car $X_n(\Omega) \subset [\![0; N]\!]$ donc, avec la question précédente, il vient $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\Big(\dfrac{N-k}{N}\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{k+1}{N}\mathbb{P}(X_n = k+1)\Big)$ qu'on décompose, puisque $k = (k+1)-1$, en $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X_n = k) - \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N} k^2\,\mathbb{P}(X_n = k) + \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N}(k+1)^2\,\mathbb{P}(X_n = k+1) - \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N}(k+1)\,\mathbb{P}(X_n = k+1)$.
Après simplification et changement d'indice, comme $\mathbb{P}(X_n = N+1) = 0$, il ne reste dans cette formule que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X_n = k) - \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}(k+1)\,\mathbb{P}(X_n = k+1) = \Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big)\mathbb{E}(X_n)$.

c. $\big(\mathbb{E}(X_n)\big)_{n \geqslant 0}$ est géométrique et, comme $\mathbb{E}(X_0) = N$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n) = N\Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big)^n$ avec $1 - \dfrac{1}{N} \in]-1; 1[$. Or $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}(X_n = k) = \sum\limits_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(X_n = k) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$ donc $0 \leqslant \mathbb{P}(X_n \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}(X_n)$.
Comme X_n est à valeurs positives, on a aussi directement $\mathbb{P}(X_n \geqslant 1) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X_n)}{1} = \mathbb{E}(X_n)$ par inégalité de Markov. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$, par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n \geqslant 1) = 0$.

Comme $\dfrac{\mathbb{E}(X_N)}{N} = \Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big)^N = \exp\Big(N\ln\Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big)\Big)$ et $\ln\Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{N}$ donc $\lim\limits_{N \to +\infty} N\ln\Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big) = -1$, par continuité de $\exp$, on a $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(X_N)}{N} = \dfrac{1}{e} \sim 0,37$.

d. On a $Y = 0$ si et seulement s'il reste des boules rouges (il y en a au moins une dans l'urne) à toutes les étapes. Ainsi, $(Y=0) = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} (X_n \geqslant 1)$ donc on a bien $(Y=0) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} (X_k \geqslant 1)$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la suite d'évènements $\big((X_k \geqslant 1)\big)_{k\geqslant 1}$ est décroissante car si $X_{k+1} \geqslant 1$, a fortiori, on a $X_k \geqslant 1$, on a $(Y=0) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} (X_k \geqslant 1) = (X_n \geqslant 1)$. Par croissance de $\mathbb{P}$, il vient $0 \leqslant \mathbb{P}(Y=0) \leqslant \mathbb{P}(X_n \geqslant 1)$ donc, par encadrement, $\mathbb{P}(Y=0) = 0$ en passant à la limite dans cette double inégalité d'après **c.**.

11.123 **a.** Posons $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix}$, alors $\chi_M = \begin{vmatrix} X-x & -y \\ -z & X-x \end{vmatrix} = (X-x)^2 - yz$. Traitons trois cas :

- Si $yz > 0$, $\chi_M = (X - x - \sqrt{yz})(X - x + \sqrt{yz})$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ d'après le cours.
- Si $yz = 0$, $\chi_M = (X-x)^2$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et $M - xI_2 = \begin{pmatrix} 0 & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$ donc M est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_x(M)) = 2$ car x est valeur propre de M d'ordre de multiplicité 2. D'après la formule du rang, $\dim(E_x(M)) = 2 - \text{rang}\,(M - xI_2)$ donc la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $M - xI_2 = 0$ ce qui est équivalent à $y = z = 0$.
- Si $yz < 0$, $\chi_M = (X - x - i\sqrt{-yz})(X - x + i\sqrt{-yz})$ donc χ_M n'est même pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc la matrice M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Ainsi, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement $yz > 0$ ou $(y = z = 0)$.

b. <u>Projecteur</u> : $M^2 = \begin{pmatrix} x^2+yz & 2xy \\ 2xz & x^2+yz \end{pmatrix}$ donc $M^2 = M \iff (x - x^2 - yz = (2x-1)y = (2x-1)z = 0)$. Or $(2x-1)y = 0 \iff \left(x = \dfrac{1}{2} \text{ ou } y = 0\right)$ et $(2x-1)z = 0 \iff \left(x = \dfrac{1}{2} \text{ ou } z = 0\right)$, $(x - x^2 = 0 \iff (x = 0$ ou $x = 1)$ et $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} - yz = 0\right) \iff \left(yz = \dfrac{1}{4}\right)$. Ainsi, on a l'équivalence suivante, juste pour l'aspect projecteur de M : $M^2 = M \iff \left((x = y = z = 0) \text{ ou } (x = 1, y = z = 0) \text{ ou } \left(x = \dfrac{1}{2}, yz = \dfrac{1}{4}\right)\right)$. Il y a donc une infinité de matrices M de F dont l'endomorphisme canoniquement associé est un projecteur.

<u>Projecteur orthogonal</u> : comme la base canonique est une base orthonormale dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, M représente un endomorphisme auto-adjoint si et seulement si M est symétrique et $M^T = M \iff y = z$. Or $y^2 = \dfrac{1}{4} \iff y = \pm\dfrac{1}{2}$ et on sait d'après le cours que M représente un projecteur orthogonal si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé est un projecteur auto-adjoint. D'après les deux équivalences précédentes, l'endomorphisme canoniquement associé à M est un projecteur orthogonal si et seulement si $\left((x = y = z = 0) \text{ ou } (x = 1, y = z = 0) \text{ ou } \left(x = y = z = \dfrac{1}{2}\right)\right)$ ou $\left(x = \dfrac{1}{2}, y = z = -\dfrac{1}{2}\right)\Big)$. Il n'y a donc que quatre telles matrices, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (endomorphisme nul de rang 0), $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (endomorphisme identité de rang 2, $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (projection orthogonale sur la droite $\text{Vect}((1,1))$ de rang 1) et $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (projection orthogonale sur la droite $\text{Vect}((1,-1))$ de rang 1).

c. Comme $\det(M) = X^2 - YZ$, $(M \in GL_2(\mathbb{R}) \iff (\det(M) \neq 0) \iff (X^2 \neq YZ)$. Or, en étudiant tous les cas, $(X^2 = YZ) = \left(\bigsqcup_{k=1}^{6}(X = k, Y = k, Z = k)\right) \sqcup \Big((X = 2, Y = 1, Z = 4) \sqcup (X = 2, Y = 4, Z = 1)\Big)$. On a $\mathbb{P}(X^2 = YZ) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k, Y = k, Z = k) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1, Z = 4) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 4, Z = 1)$ par incompatibilité de ces évènements. De plus, comme X, Y, Z sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$, on a $\mathbb{P}(X^2 = YZ) = \frac{6}{6^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^3} = \frac{8}{216} = \frac{1}{27}$ de sorte que $\mathbb{P}(M \text{ inversible}) = 1 - \mathbb{P}(X^2 = YZ) = \frac{26}{27} \sim 0,96$.

11.124 **a.** Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ par hypothèse et que $(X > k) = \bigsqcup_{n=k+1}^{+\infty} (X = n)$, par incompatibilité de cette infinité dénombrable d'évènements et σ-additivité, on a $\mathbb{P}(X > k) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$. Or on sait d'après le cours que $e^{\lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$ donc que $1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ et on a donc $\mathbb{P}(X > k) = 1 - \sum_{n=0}^{k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ (1).

Or la formule de Taylor reste intégral appliquée à la fonction $f = \exp$ entre 0 et λ à l'ordre k donne, puisque $\exp$ est de classe C^{k+1} sur $\mathbb{R}$, $e^{\lambda} = f(\lambda) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(\lambda - 0)^n f^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^{\lambda} \frac{(\lambda - t)^k f^{(k+1)}(t)}{k!} dt$. Ainsi, comme $\forall n \in [\![0;k]\!]$, $f^{(n)}(0) = 1$, et $\forall t \in [0;\lambda]$, $f^{(k+1)}(t) = e^t \leqslant e^{\lambda}$, par croissance de l'intégrale, on obtient $e^{\lambda} \leqslant \sum_{n=0}^{k} \frac{\lambda^n}{n!} + e^{\lambda} \int_0^{\lambda} \frac{(\lambda - t)^k}{k!} dt = \sum_{n=0}^{k} \frac{\lambda^n}{n!} + e^{\lambda}\left[\frac{-(\lambda - t)^{k+1}}{(k+1)!}\right]_0^{\lambda} = \sum_{n=0}^{k} \frac{\lambda^n}{n!} + \frac{e^{\lambda}\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$. On multiplie par $e^{-\lambda} > 0$ et $1 - \sum_{n=0}^{k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \leqslant \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$ et, avec (1), cela donne bien $\mathbb{P}(X > k) = 1 - \sum_{n=0}^{k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \leqslant \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$.

b. $N(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(N > n) = \bigsqcup_{k=0}^{+\infty} \left((X_0 = k) \cap \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leqslant k)\right)$ en distinguant selon les valeurs possibles de X_0 puisque $X_0(\Omega) = X(\Omega) = \mathbb{N}$. Par incompatibilité de ces évènements et indépendance de $X_0, \cdots, X_n$, on a donc $\mathbb{P}(N > n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathbb{P}(X_0 = k) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant k)\right)$. Comme $X_0, \cdots, X_n$ suivent la même loi de Poisson, on a $\mathbb{P}(N > n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\Big(\mathbb{P}(X \leqslant k)\Big)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\Big(1 - \mathbb{P}(X > k)\Big)^n$.
Comme N est à valeurs dans $\mathbb{N}$, N est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(N > n)$ converge, ce qui revient, grâce à l'expression précédente, à la sommabilité de la famille $\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\Big(1 - \mathbb{P}(X > k)\Big)^n\right)_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$.
On parle de familles de termes dans $[0;+\infty]$, donc le théorème de Fubini s'applique et on a la relation $\mathbb{E}(N) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N > n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\Big(1 - \mathbb{P}(X > k)\Big)^n\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\Big(1 - \mathbb{P}(X > k)\Big)^n\right)$. Comme $\mathbb{P}(X > k) > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on aurait donc $\mathbb{E}(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \times \frac{1}{1 - (1 - \mathbb{P}(X > k))} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!\,\mathbb{P}(X > k)}$.
Mais d'après la question précédente, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!\,\mathbb{P}(X > k)} \geqslant \frac{e^{-\lambda}\lambda^k(k+1)!}{k!\lambda^{k+1}} = (k+1)\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}$ ce qui est absurde par comparaison car la série $\sum_{k \geqslant 0} (k+1)\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}$ diverge grossièrement. Par conséquent, la variable aléatoire N n'admet pas une espérance finie.

c. Comme $\overline{(N = +\infty)} = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} (N = n)$ et que ces évènements sont incompatibles, par σ-additivité, on parvient à $1 - \mathbb{P}(N = +\infty) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n)$. Or $(N = n) = \bigsqcup_{k=0}^{+\infty} \left((X_0 = k) \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} (X_i \leqslant k) \cap (X_n > k)\right)$ et, toujours par incompatibilité de ces évènements, indépendance de $X_0, \cdots, X_n$, et comme $X_0, \cdots, X_n$ suivent la même

loi que X, $\mathbb{P}(N=n)=\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\mathbb{P}(X_0=k)\Big(\prod_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(X_i\leqslant k)\Big)\mathbb{P}(X_n>k)\Big)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(X\leqslant k)^{n-1}\,\mathbb{P}(X>k)$.
Ainsi, $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(X\leqslant k)^{n-1}\,\mathbb{P}(X>k)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(X>k)\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X\leqslant k)^{n-1}$ avec FUBINI et, comme $\mathbb{P}(X>k)<1$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(X>k)}{1-\mathbb{P}(X\leqslant k)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(X>k)}{\mathbb{P}(X>k)}$ d'où $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N=n)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)=1$ car $X(\Omega)=\mathbb{N}$. $\mathbb{P}(N=+\infty)=0$ donc N est presque sûrement finie.

11.125 **a.** Par définition de $\lceil X\rceil$, on a $X\leqslant Y$ mais on n'a pas $X\leqslant Y-1$ car Y est le plus petit entier k vérifiant $X\leqslant k$ donc $X>Y-1$ et on a la double inégalité, comme pour la partie entière, $X\leqslant Y<X+1$. Comme Y est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, que $Y\leqslant X+1$ alors que $X+1$ admet une espérance finie par hypothèse, par comparaison, Y admet aussi une espérance finie. Comme Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$, d'après le cours, $\mathbb{E}(Y)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y>k)$.
De plus, pour $k\in\mathbb{N}$, comme $X\leqslant Y$, on a l'inclusion $(X>k)\subset(Y>k)$. De plus, comme $Y-1<X$, et que k est un entier, on a $(Y>k)=(Y\geqslant k+1)\subset(X>k)$. Ainsi, par double inclusion, on a $(X>k)=(Y>k)$ ce qui donne $\mathbb{P}(X>k)=\mathbb{P}(Y>k)$. Cependant, $0\leqslant X\leqslant Y$ donc, par croissance de l'espérance, $0\leqslant\mathbb{E}(X)\leqslant\mathbb{E}(Y)$ et on obtient bien $0\leqslant\mathbb{E}(X)\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y>k)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k)$.

b. Soit $k\in\mathbb{N}$ fixé et $n\in\mathbb{N}$, par hypothèse on a $0\leqslant X_{n+1}\leqslant X_n$ donc $(X_{n+1}>k)\subset(X_n>k)$. En posant $A_n=(X_n>k)$, la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et, par théorème de continuité décroissante, si $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n$, on a $\mathbb{P}(A)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n)$. Comme $\forall\omega\in\Omega$, $\lim_{n\to+\infty}X_n(\omega)=0$, on a $A=\emptyset$ car pour un $\omega\in\Omega$ fixé, $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\geqslant n_0$, $0\leqslant X_n\leqslant\varepsilon=k$ donc $\omega\notin A$. Ainsi, on a bien $\forall k\in\mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n>k)=0$.

c. Pour $k\in\mathbb{N}$, soit $u_k:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ telle que $u_k(x)=\mathbb{P}(X_{\lfloor x\rfloor}>k)$. On pose, pour $x\in\mathbb{R}_+$, $u(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k(x)$.

- (H_1) Pour $k\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}_+$, on a $0\leqslant X_{\lfloor x\rfloor}\leqslant X_0$ par hypothèse donc $(X_{\lfloor x\rfloor}>k)\subset(X_0>k)$ et u_k est bornée sur $\mathbb{R}_+$ avec $||u_k||_{\infty,\mathbb{R}_+}\leqslant\mathbb{P}(X_0>k)$. Comme $\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}(X_0>k)$ converge d'après **a.** car X_0 est positive et admet une espérance finie, on a la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0}||u_k||_{\infty,\mathbb{R}_+}$ donc la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0}u_k$ vers u sur $\mathbb{R}_+$.
- (H_2) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, la fonction u_k admet une limite finie en $+\infty$ d'après la question **b.** et on a $\lim_{x\to+\infty}u_k(x)=\lim_{x\to+\infty}\mathbb{P}(X_{\lfloor x\rfloor}>k)=\ell_k=0$.

Par le théorème de double limite, on a donc $\lim_{x\to+\infty}u(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\ell_k=0$ donc, en particulier, $\lim_{n\to+\infty}u(n)=0$ ce qui donne $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X_n>k)=0$. Par encadrement, comme on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant\mathbb{E}(X_n)\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X_n>k)$ d'après la question **a.**, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(X_n)=0$ (c'est le théorème de convergence dominée pour les variables aléatoires).

11.126 **a.** Il est implicitement admis dans l'énoncé qu'une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(p)$ avec $p\in]0;1[$ est telle que toutes les X_n sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. On pose $X_1=+\infty$ s'il n'existe aucun entier k tel que $S_k=1$ et, dans le cas contraire, $X_1=\mathrm{Min}(\{k\in\mathbb{N}^*\mid S_k=1\})$ qui existe bien car la partie $A=\{k\in\mathbb{N}^*\mid S_k=1\}$ est alors non vide, incluse dans $\mathbb{N}$ et minorée par 0 donc son minimum existe.

On a déjà, par construction, $X_1(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ donc $X_1(\Omega)$ est bien un ensemble au plus dénombrable. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $(X_1 = k) = \Big(\bigcap_{i=1}^{k-1}(S_i = 0)\Big) \cap (S_k = 1)$ donc, comme les évènements $(S_i = 0)$ et $(S_i = 1)$ sont des évènements par hypothèse car les S_i sont des variables aléatoires, par intersection finie d'évènements, on a $(X_1 = k) \in \mathcal{A}$. De plus, $(X_1 = +\infty) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{(X_1 = k)}$ donc, par intersection dénombrable de complémentaires d'évènements, $(X_1 = +\infty) \in \mathcal{A}$. Par conséquent, X_1 est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

b. On sait d'après le cours que X_1 suit la loi géométrique de paramètre p en tant que temps d'attente du premier succès dans une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de même loi. Ainsi, d'après le cours toujours, on a $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

c. Si $k \geqslant n$, $(X_n = k) = \left(\displaystyle\bigsqcup_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{n-1} \leqslant k-1} \left(\bigcap_{j=1}^{n-1}(S_{i_j} = 1)\right) \cap \bigcap_{\substack{m \in [\![1;k-1]\!] \\ m \notin \{i_1,\cdots,i_{n-1}\}}} (S_m = 0)\right) \cap (S_k = 1)$ car $X_n(\Omega) \subset [\![n; +\infty]\!]$ par construction. En effet, on doit avoir $n-1$ succès entre les étapes 1 et $k-1$ et un dernier succès à l'étape k. Avec les mêmes arguments que précédemment, comme il y a $\dbinom{k-1}{n-1}$ de choisir ces $(k-1)$-uplets $(i_1, \cdots, i_{n-1})$, on a $\mathbb{P}(X_n = k) = \dbinom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$ (c'est la loi de Polya).

d. Comme $Y_1, \cdots, Y_n$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, sont indépendantes et suivent la même loi que X_1, on a $G_{S_n} = \prod_{k=1}^{n} G_{Y_k} = (G_{X_1})^n$ donc $\forall t \in \left]-\dfrac{1}{1-p}; \dfrac{1}{1-p}\right[$, $G_{S_n}(t) = \left(\dfrac{pt}{1-(1-p)t}\right)^n = p^n t^n \dfrac{1}{(1-(1-p)t)^n}$. Or on sait d'après le cours sur les séries entières que $\forall x \in]-1;1[$, $(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \dbinom{-n}{k} x^k$ avec le calcul $\dbinom{-n}{k} = \dfrac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} = \dfrac{(-1)^k (n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ donc, pour $t \in \left]-\dfrac{1}{1-p}; \dfrac{1}{1-p}\right[$, il vient $G_{S_n}(t) = p^n t^n \dfrac{1}{(1-(1-p)t)^n} = p^n t^n \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}(1-p)^k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} p^n (1-p)^k t^{k+n}$. Avec le changement d'indice $j = n+k$, on a $G_{S_n}(t) = \sum_{j=n}^{+\infty} \dfrac{(j-1)!}{(n-j)!(n-1)!} p^n (1-p)^{j-n} t^j = \sum_{j=n}^{+\infty} \dbinom{j-1}{n-1} p^n (1-p)^{j-n} t^j$.
Comme $G_{S_n}(t) = \sum_{j=n}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = j) t^j$ par définition et que le rayon de convergence est strictement positif, on peut identifier et on a $\forall k \geqslant n$, $\mathbb{P}(S_n = k) = \dbinom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$.
Comme on retrouve la loi du n-ième succès comme en question **c.**, on se doute qu'il y a un lien. On écrit $X_n = X_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(X_{k+1} - X_k)$ et on interprète $X_{k+1} - X_k$ comme le temps d'attente du $(k+1)$-ième succès une fois qu'on a eu le k-ième succès, qui suit donc la même loi géométrique de paramètre p que X_1. En admettant que les variables aléatoires $Y_1 = X_1, Y_2 = X_2 - X_1, \cdots, Y_n = X_n - X_{n-1}$ sont indépendantes, on retrouve le fait que $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k = X_n$ suit la loi de Polya (ou loi binomiale négative ou loi de Pascal).

11.127 Notons pour toute la suite T_k la variable aléatoire qui est le résultat du tirage d'indice k s'il a lieu. Par construction, $X_n(\Omega) \subset [\![1; n]\!]$ donc X_n est bornée et admet donc une espérance finie. On suppose bien sûr aussi que chaque boule de l'urne a autant de chance d'être tirée à chaque étape.

a. Bien sûr, si $n = 1$, on vide l'urne en un seul tirage de manière certaine donc $X_1 \equiv 1$ et $\mathbb{E}(X_1) = 1$.

Si $n=2$, $(X_2=1)=(T_1=1)$ et $(X_2=2)=(T_1=2,T_2=1)$ donc $\mathbb{P}(X_2=1)=\mathbb{P}(T_1=1)=\frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X_2=2)=\mathbb{P}(T_1=2)\,\mathbb{P}(T_2=1\mid T_1=2)=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$. Ainsi, par définition, $\mathbb{E}(X_2)=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times 2=\frac{3}{2}$.

b. Pour $n\geqslant 2$ et $i=1$, on a $(X_n=1)=(T_1=1)$ donc $\mathbb{P}(X_n=1)=\dfrac{1}{n}$.

Pour $n\geqslant 2$ et $i\in[\![2;n]\!]$, on a $(X_n=i)=\displaystyle\bigsqcup_{j=2}^{n}(T_1=j,X_n=i)$. Cette réunion étant disjointe, on a donc $\mathbb{P}(X_n=i)=\displaystyle\sum_{j=2}^{n}\mathbb{P}(T_1=i)\,\mathbb{P}(X_n=i\mid T_1=j)$. Or, quand on a tiré la boule j au premier tirage, on enlève les boules numérotées $j,j+1,\cdots,n$ et on se retrouve au point de départ du problème définissant X_{j-1}, une urne contenant les boules numérotées de 1 à $j-1$, avec les mêmes règles, sauf qu'on a déjà effectué un tirage. Ainsi, $\mathbb{P}(X_n=i\mid T_1=j)=\mathbb{P}(X_{j-1}=i-1)$. Par conséquent, si $n\geqslant 2$ et $i\in[\![2;n]\!]$, $\mathbb{P}(X_n=i)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=2}^{n}\mathbb{P}(X_{j-1}=i-1)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(X_k=i-1)$ en posant $k=j-1$.

Alors, $\mathbb{E}(X_n)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i\,\mathbb{P}(X_n=i)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}i\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(X_k=i-1)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=2}^{n}i\,\mathbb{P}(X_k=i-1)$ en inversant la somme double. Mais $\mathbb{P}(X_k=i-1)=0$ dès que $i>k$ donc $\mathbb{E}(X_n)=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=2}^{k+1}i\,\mathbb{P}(X_k=i-1)$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n)=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=2}^{k+1}(i-1+1)\,\mathbb{P}(X_k=i-1)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\big(1+\mathbb{E}(X_k)\big)$ car $\mathbb{E}(X_k)=\displaystyle\sum_{i=2}^{k+1}(i-1)\,\mathbb{P}(X_k=i-1)$ et $\mathbb{P}(\Omega)=1=\displaystyle\sum_{i=2}^{k+1}\mathbb{P}(X_k=i-1)$. On a donc bien la relation attendue, $\mathbb{E}(X_n)=1+\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(X_k)$ si $n\geqslant 2$.

c. <u>Méthode 1</u> : d'après **b.**, on a $\mathbb{E}(X_3)=1+\frac{1}{3}\Big(1+\frac{3}{2}\Big)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$. De même, on obtient $\mathbb{E}(X_4)=1+\frac{1}{4}\Big(1+\frac{3}{2}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}$. Il semble, surtout avec l'aide de la question supplémentaire, que $\mathbb{E}(X_n)=H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$. On a déjà réalisé l'initialisation. Soit $n\geqslant 2$ tel que $\forall k\in[\![1;n-1]\!]$, $E(X_k)=H_k$, d'après **b.**, on a $\mathbb{E}(X_n)=1+\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(X_k)=1+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}$ donc $\mathbb{E}(X_n)=1+\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j}^{n-1}\frac{1}{j}=1+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{n-j}{j}=1+\Big(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\Big)-\frac{n-1}{n}=H_n$. Par principe de récurrence forte, on a bien $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n)=H_n$ donc $\mathbb{E}(X_n)\underset{+\infty}{\sim}\ln(n)$.

<u>Méthode 2</u> : d'après **b.**, pour $n\geqslant 2$, $n\,\mathbb{E}(X_n)=n+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{E}(X_k)$ et $(n+1)\,\mathbb{E}(X_{n+1})=(n+1)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)$ donc $(n+1)\,\mathbb{E}(X_{n+1})=1+n\,\mathbb{E}(X_n)+\mathbb{E}(X_n)=(n+1)\,\mathbb{E}(X_n)+1$ d'où $\mathbb{E}(X_{n+1})-\mathbb{E}(X_n)=\dfrac{1}{n+1}$. Par télescopage, on a donc $\mathbb{E}(X_n)=\mathbb{E}(X_1)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\big(\mathbb{E}(X_{k+1})-\mathbb{E}(X_k)\big)=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}=H_n$.

<u>Question supplémentaire</u> : comme $f:t\mapsto\dfrac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[1;+\infty[$, on a la majoration $\forall k\in[\![1;n]\!]$, $\displaystyle\int_k^{k+1}f(t)dt=\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\leqslant f(k)=\frac{1}{k}$ et $\forall k\in[\![2;n]\!]$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t}\geqslant\frac{1}{k}$. En sommant la première inégalité pour $k\in[\![1;n]\!]$ et par Chasles, on obtient $\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{dt}{t}\leqslant H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Si on fait de même pour la seconde pour $k\in[\![2;n]\!]$, on a $\displaystyle\int_1^{n}\frac{dt}{t}\geqslant H_n-1=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$. Ainsi, $\ln(n+1)\leqslant H_n\leqslant 1+\ln(n)$. Comme $\ln(n+1)\underset{+\infty}{\sim}\ln(n)\underset{+\infty}{\sim}\ln(n)+1$, par encadrement, on a donc $H_n\underset{+\infty}{\sim}\ln(n)$.

11.128 **a.** Pour $i \in \mathbb{N}$, $(X = i) = \bigsqcup_{j=0}^{i}(X = i, Y = j)$ (réunion disjointe) donc, par σ-additivité, on a la relation $\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{i} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}(\alpha + 1 - \alpha)^i = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$ par le binôme de NEWTON donc X suit la loi de POISSON de paramètre λ.

b. De même, pour $j \in \mathbb{N}$, $(Y = j) = \bigsqcup_{i=j}^{+\infty}(X = i, Y = j)$ (réunion disjointe) donc, par σ-additivité, on a aussi $\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=j}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{e^{-\lambda}\alpha^j\lambda^j}{j!} \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{\lambda^{i-j}(1-\alpha)^{i-j}}{(i-j)!} = \frac{e^{-\lambda}\alpha^j\lambda^j}{j!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k(1-\alpha)^k}{k!}$ en posant $k = i - j$. Ainsi, $\mathbb{P}(Y = j) = \frac{e^{-\lambda}\alpha^j\lambda^j}{j!} e^{\lambda(1-\alpha)} = \frac{e^{-\alpha\lambda}(\alpha\lambda)^j}{j!}$ donc Y suit la loi de POISSON de paramètre $\alpha\lambda$.

c. Par hypothèse, $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0$ alors que $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} > 0$ et $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{e^{-\alpha\lambda}(\alpha\lambda)^0}{0!} > 0$ donc $\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 0)$. Ainsi, X et Y ne sont pas indépendantes.

d. On a $Z(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ et, pour $k \in \mathbb{Z}$, comme $(Z = k) = \bigcup_{j=0}^{+\infty}(X = k + j, Y = j)$ (réunion disjointe), par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k + j, Y = j)$. Traitons deux cas :

Si $k < 0$, on a $\mathbb{P}(Z = k) = 0$ car $\forall j \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k + j, Y = j) = 0$.

Si $k \geqslant 0$, il vient $\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+j}\alpha^j(1-\alpha)^k}{j!k!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k(1-\alpha)^k}{k!} \times \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j\alpha^j}{j!}$ et on reconnaît une série exponentielle qui donne $\mathbb{P}(Z = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k(1-\alpha)^k e^{\lambda\alpha}}{k!} = \frac{e^{-\lambda(1-\alpha)}(\lambda(1-\alpha))^k}{k!}$.

Ainsi, Z suit a loi de POISSON de paramètre $\lambda(1 - \alpha)$.

e. Pour $(j, k) \in \mathbb{N}^2$, comme $\mathbb{P}(Z = k) > 0$, on a par définition $\mathbb{P}_{(Z=k)}(Y = j) = \frac{\mathbb{P}(Z = k, Y = j)}{\mathbb{P}(Z = k)}$ donc, puisque $X = Y + Z$, $\mathbb{P}_{(Z=k)}(Y = j) = \frac{\mathbb{P}(X = k + j, Y = j)}{\mathbb{P}(Z = k)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+j}\alpha^j(1-\alpha)^k k!}{j!k!e^{-\lambda(1-\alpha)}(\lambda(1-\alpha))^k} = \frac{e^{-\alpha\lambda}(\alpha\lambda)^j}{j!}$ avec **d.**.

f. Comme $\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}_{(Z=k)}(Y = j) = \mathbb{P}(Y = j) = \frac{e^{-\alpha\lambda}(\alpha\lambda)^j}{j!}$avec la question **b.** et qu'on a même $\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{Z}_-^*$, $\mathbb{P}(Z = k, Y = j) = 0 = \mathbb{P}(Z = k)\mathbb{P}(Y = j)$, Y et Z sont indépendantes.

11.129 **a.** X_A est le temps d'attente du succès (appel concernant le produit A) dans une répétition d'appels indépendants (on le suppose) qui suivent la même loi de BERNOULLI de paramètre $p = \frac{1}{5}$ $\left(\frac{1}{5}\right.$ de probabilité que l'appel concerne le produit A et $1 - p$ qu'il concerne le produit B). D'après le cours, X_A suit la loi géométrique de paramètre p. D'après le cours, on a $\mathbb{E}(X_A) = \frac{1}{p} = 5$ et $\mathbb{V}(X_A) = \frac{1-p}{p^2} = 20$. De même, $X_B \sim \mathcal{G}(1 - p)$ donc $\mathbb{E}(X_B) = \frac{1}{1-p} = \frac{5}{4}$ et $\mathbb{V}(X_B) = \frac{1-(1-p)}{(1-p)^2} = \frac{5}{16}$.

b. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note l'évènement A_k = "le k-ième appel concerne le produit A". Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, en suivant l'indication de l'énoncé, on a $(L = n) = (L = n, \overline{A_{n+1}}) \sqcup (L = n, A_{n+1})$ (soit n appels concernant A puis un concernant B ou l'inverse). Par construction, $(L = n, \overline{A_{n+1}}) = (X_B = n + 1)$ et $(L = n, A_{n+1}) = (X_A = n + 1)$. Comme ces deux évènements sont incompatibles, on obtient la relation $\mathbb{P}(L = n) = \mathbb{P}(X_B = n + 1) + \mathbb{P}(X_A = n + 1) = p^n(1 - p) + (1 - p)^n p$ d'après la question **a.**. On en déduit bien $\mathbb{P}(L=n)=(1-p)\,\mathbb{P}(X_A=n)+p\,\mathbb{P}(X_B=n)=0,8\,\mathbb{P}(X_A=n)+0,2\,\mathbb{P}(X_B=n)$.

c. Comme $n\,\mathbb{P}(L=n)=(1-p)n\,\mathbb{P}(X_A=n)+pn\,\mathbb{P}(X_B=n)$ et que les deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\,\mathbb{P}(X_A=n)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\,\mathbb{P}(X_B=n)$ puisque X_A et X_B admettent des espérances finies d'après le cours, on en déduit par somme que $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\,\mathbb{P}(L=n)$ converge (et absolument car elle est à termes positifs) donc L admet une espérance finie qui vaut $\mathbb{E}(L)=(1-p)\,\mathbb{E}(X_A)+p\,\mathbb{E}(X_B)=\dfrac{1-p}{p}+\dfrac{p}{1-p}=\dfrac{0,8}{0,2}+\dfrac{0,2}{0,8}=\dfrac{21}{5}=4,25$.

11.130 **a.** Il s'agit juste de vérifier que pour $\mathbb{P}(X=i)\geqslant 0$ pour tout entier $i\in\mathbb{N}^*$, ce qui est évident, et que $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i)=1$, ce qui l'est moins.

Méthode 1 : en mode famille sommable, par sommation par paquets, comme on a $\dfrac{i}{2^{i+1}}=\sum\limits_{j=1}^{i}\dfrac{1}{2^{i+1}}$, il vient $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i)=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\sum\limits_{j=1}^{i}\dfrac{1}{2^{i+1}}=\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant i}\dfrac{1}{2^{i+1}}=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}\sum\limits_{i=j}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{i+1}}=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{j+1}}\times\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^j}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=1$.

Méthode 2 : soit $f:]-1;1[\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$. On peut dériver terme à terme dans l'intervalle ouvert de convergence de cette série entière de rayon de convergence 1 pour avoir la relation $\forall x\in]-1;1[,\ f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$ donc $x^2f'(x)=\dfrac{x^2}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n+1}$. En prenant $x=\dfrac{1}{2}$ dans cette relation, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)=\dfrac{1/4}{1/4}=1$.

Quelle que soit la méthode, la définition de la loi de X est cohérente.

b. En reprenant la fonction f de la question précédente et en dérivant une fois de plus, on obtient la relation $\forall x\in]-1;1[,\ f''(x)=\dfrac{2}{(1-x)^3}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}$ donc $x^3f''(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n(n-1)x^{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2x^{n+1}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n+1}$ donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2x^{n+1}=x^3f''(x)+x^2f'(x)=\dfrac{2x^3}{(1-x)^3}+\dfrac{x^2}{(1-x)^2}$. En prenant $x=\dfrac{1}{2}$ à nouveau, on arrive à $\mathbb{E}(X)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\,\mathbb{P}(X=n)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^2}{2^{n+1}}=\dfrac{2(1/8)}{1/8}+\dfrac{1/4}{1/4}=3$.

c. Comme on prélève une boule dans une urne n'ayant des boules numérotées que de 1 à X, la boule tirée à un numéro $Y\in[\![1;X]\!]$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![1;n]\!]$, on a $\mathbb{P}(X=n,Y=k)=\mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}_{(X=n)}(Y=k)$ car $\mathbb{P}(X=n)>0$ et on a $\mathbb{P}_{(X=n)}(Y=k)=\dfrac{1}{n}$ car les n boules de l'urne ont autant de chances d'être prises. Par conséquent, $\mathbb{P}(X=n,Y=k)=\dfrac{\mathbb{P}(X=n)}{n}=\dfrac{1}{2^{n+1}}$. Bien sûr, $\mathbb{P}(X=n,Y=k)=0$ si $n\in\mathbb{N}^*$ et $k>n$.

d. On a clairement $Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et, pour tout entier $k\in\mathbb{N}^*$, on a $(Y=k)=\bigsqcup\limits_{n=k}^{+\infty}(X=n,Y=k)$ (réunion d'évènements incompatibles) donc, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(Y=k)=\sum\limits_{n=k}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n,Y=k)$ ce qui donne $\mathbb{P}(Y=k)=\sum\limits_{n=k}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}=\dfrac{1}{2^{k+1}}\times\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2^k}$. Ainsi, Y suit la loi géométrique de paramètre $p=\dfrac{1}{2}$. On sait d'après le cours que $\mathbb{E}(Y)=\dfrac{1}{p}=2$ et que $\mathbb{V}(Y)=\dfrac{1-p}{p^2}=2$.

11.131 **a.** Par construction et comme les cas extrêmes sont "n fois piles" ou "n fois faces" d'un côté et "alternance pile/face" ou "alternance face/pile" de l'autre, on a $N(\Omega)=[\![1;n]\!]$.

b. • Si $P_k =$ "on fait pile au lancer numéro k", on a $(N=1) = \Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n} P_k\Big) \sqcup \Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{P_k}\Big)$. Par incompatibilité de ces deux évènements et indépendance de $P_1, \cdots, P_n$, on a $\mathbb{P}(N=1) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(P_k) + \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{P_k}) = p^n + (1-p)^n$.

• Avec ces mêmes notations, $(N=2) = \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} \Big(\bigcap\limits_{i=1}^{k} P_i\Big) \cap \Big(\bigcap\limits_{i=k+1}^{n} \overline{P_i}\Big)\right) \sqcup \left(\bigcup\limits_{j=1}^{n-1} \Big(\bigcap\limits_{i=1}^{j} \overline{P_i}\Big) \cap \Big(\bigcap\limits_{i=j+1}^{n} P_i\Big)\right)$ et, avec les mêmes arguments, $\mathbb{P}(N=2) = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n-1} p^k(1-p)^{n-k}\Big) + \Big(\sum\limits_{j=1}^{n-1} (1-p)^j p^{n-j}\Big) = 2\sum\limits_{k=1}^{n-1} p^k(1-p)^{n-k}$ en posant $k = n-j$ dans la seconde somme. Ainsi, $\mathbb{P}(N=2) = 2p(1-p)\sum\limits_{m=0}^{n-2} p^m(1-p)^{n-2-m}$ avec $m = k-1$.

- • Si $p = \dfrac{1}{2}$, on a donc $\mathbb{P}(N=2) = \dfrac{(n-1)}{2^{n-1}}$.
- • Si $p \neq \dfrac{1}{2}$, classiquement, $\mathbb{P}(N=2) = 2p(1-p)\dfrac{p^{n-1} - (1-p)^{n-1}}{p - (1-p)}$.

c. Pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, comme $(I_k = 1) = \big(P_k \cap \overline{P_{k+1}}\big) \sqcup \big(\overline{P_k} \cap P_{k+1}\big)$, on obtient $\mathbb{P}(I_k) = 2p(1-p)$. Puisque I_k ne prend que les valeurs 0 et 1, I_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $2p(1-p)$ avec $\mathbb{E}(I_k) = 2p(1-p)$ et $\mathbb{V}(I_k) = 2p(1-p)(1-2p(1-p))$.

d. On a une série supplémentaire à chaque changement de pile à face ou de face à pile entre les tirages k et $k+1$ (et on a ce cas si et seulement si $I_k = 1$) ce qui donne, en comptant le premier tirage qui amène forcément une première série, $N = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} I_k$.

e. Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(N) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(I_k)$. Ainsi, $\mathbb{E}(N) = 1 + 2p(1-p)(n-1)$.

D'après le cours, on a $\mathbb{V}(N) = \mathbb{V}\Big(1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} I_k\Big) = \mathbb{V}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n-1} I_k\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{V}(I_k) + 2\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} \mathrm{Cov}(I_i, I_j)$. Or $\mathrm{Cov}(I_i, I_j) = \mathbb{E}(I_i I_j) - \mathbb{E}(I_i)\mathbb{E}(I_j)$ et la variable aléatoire $I_i I_j$ ne prend que les valeurs 0 et 1 donc suit une loi de Bernoulli. Traitons deux cas selon la proximité des entiers i et j :

<u>Si $j = i+1$</u> , $(I_i I_j = 1) = (I_i = 1, I_{i+1} = 1) = (P_i \cap \overline{P_{i+1}} \cap P_{i+2}) \sqcup (\overline{P_i} \cap P_{i+1} \cap \overline{P_{i+2}})$ donc, avec les mêmes arguments qu'avant, $\mathbb{P}(I_i I_j = 1) = p(1-p)p + (1-p)p(1-p) = p(1-p)$ donc $\mathbb{E}(I_i I_j) = p(1-p)$ et $\mathrm{Cov}(I_i, I_j) = p(1-p) - 4p^2(1-p)^2 = p(1-p)(1-4p(1-p)) = p(1-p)(1-2p)^2$.

<u>Si $j > i+1$</u> , comme la variable I_i ne dépend que des lancers i et $i+1$ et I_j ne dépend que des lancers $j > i+1$ et $j+1$, par le lemme des coalitions, I_i et I_j sont indépendantes donc $\mathrm{Cov}(I_i, I_j) = 0$.

Ainsi, $\mathbb{V}(N) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{V}(I_k) + 2\sum\limits_{i=1}^{n-2} \mathrm{Cov}(I_i, I_{i+1}) = 2p(1-p)(1-2p(1-p))(n-1) + 2p(1-p)(1-2p)^2(n-2)$ qu'on peut factoriser en $\mathbb{V}(N) = 2p(1-p)\big[(1-2p(1-p))(n-1) + (1-2p)^2(n-2)\big]$ ou écrire encore sous la forme $\mathbb{V}(N) = 2p(1-p)(2n-3) - 4p^2(1-p)^2(3n-5)$.

$\boxed{\textbf{11.132}}$ **a.** Comme $\Omega = \mathbb{N}$ et qu'on a $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i)$ par σ-additivité car $\mathbb{N}$ est dénombrable, il vient $\alpha\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \dfrac{i}{2^i} = 1$. Or on sait que $\forall x \in]-1;1[$, $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} x^i = \dfrac{1}{1-x}$ qui donne $f'(x) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} ix^{i-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ en dérivant terme à terme à l'intérieur de l'intervalle ouvert de cette série entière de rayon de convergence 1, ce qui donne $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} ix^i = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ en multipliant par x. Ainsi, $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \dfrac{i}{2^i} = \dfrac{1/2}{(1-(1/2))^2} = 2$ d'où $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

b. Comme $\forall i \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=i) = \frac{i}{2^{i+1}}$, on a $i\,\mathbb{P}(X=i) \underset{+\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{i^2}\right)$ par croissances comparées donc X admet une espérance finie par comparaison aux séries de RIEMANN et $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} i\,\mathbb{P}(X=i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i^2}{2^{i+1}}$.
On dérive une fois de plus terme à terme la relation $\forall x \in]-1;1[,\ xf'(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} ix^i = \frac{x}{(1-x)^2}$ et on obtient $\forall x \in]-1;1[,\ \frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{i=1}^{+\infty} i^2x^{i-1}$ donc $\sum_{i=1}^{+\infty} i^2x^{i+1} = \frac{x^2(1+x)}{(1-x)^3}$. En prenant encore $x = \frac{1}{2}$, on a $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} i\,\mathbb{P}(X=i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i^2}{2^{i+1}} = \frac{(1/4)(3/2)}{1/8} = 3$.

c. Comme $i^2\,\mathbb{P}(X=i) \underset{+\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{i^2}\right)$ par croissances comparées, X admet un moment d'ordre 2 et, par la formule de KÖNIG-HUYGENS, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$. Or, par la formule de transfert, on a $\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{i=0}^{+\infty} i(i-1)\,\mathbb{P}(X=i) = \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i^2(i-1)}{2^{i+1}}$. On peut dériver une fois de plus la relation $\forall x \in]-1;1[,\ \sum_{i=1}^{+\infty} i^2x^{i-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$ dans l'intervalle ouvert $]-1;1[$ de convergence pour avoir $\forall x \in]-1;1[,\ \sum_{i=2}^{+\infty} i^2(i-1)x^{i-2} = \frac{2(2+x)}{(1-x)^4}$ donc $\forall x \in]-1;1[,\ \sum_{i=2}^{+\infty} i^2(i-1)x^{i+1} = \frac{2(2+x)x^3}{(1-x)^4}$. On prend toujours $x = \frac{1}{2}$ pour avoir $\mathbb{E}(X(X-1)) = \frac{2(5/2)(1/8)}{1/16} = 10$. Ainsi, $\mathbb{V}(X) = 10 + 3 - 9 = 4$.

11.133 **a.** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, posons $Y_n = \frac{X_n + 1}{2}$. On a donc $Y_n(\Omega) = \{0,1\}$ et $(Y_n = 1) = (X_n = 1)$, $(Y_n = 0) = (X_n = -1)$ donc $\mathbb{P}(Y_n = 0) = \mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{2}$ de sorte que Y_n suit la loi de BERNOULLI de paramètre $\frac{1}{2}$. De plus, par transfert d'indépendance, les variables aléatoires Y_n sont indépendantes car les X_n le sont. Posons $T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, on sait d'après le cours que Y_n suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. Or $T_n = \frac{n}{2} + \frac{S_n}{2}$ donc $S_n = 2T_n - n$. Comme $T_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$, on a $S_n(\Omega) = \{-n, -(n-2), \cdots, n-2, n\}$ et $\forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}(S_n = 2k-n) = \mathbb{P}(T_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$.
Par linéarité de l'espérance, comme $\mathbb{E}(X_k) = 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a $\mathbb{E}(S_n) = 0$. Par indépendance des X_k, on a $\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = n$ car $\mathbb{V}(X_k) = \mathbb{E}(X_k^2) - \mathbb{E}(X_k)^2 = \mathbb{E}(X_k^2)$ et que $X_k^2 = 1$.

b. Par BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV, pour $a > 0$, on a $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant na) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{(na)^2} = \frac{1}{na^2}$. Or $\mathbb{E}(S_n) = 0$ et $(S_n \geqslant na) \subset (|S_n| \geqslant na)$ donc, par croissance de $\mathbb{P}$, on a $\mathbb{P}(S_n \geqslant na) \leqslant \mathbb{P}(|S_n| \geqslant na) \leqslant \frac{1}{na^2}$.

c. Pour $a > 0$ et $s > 0$, par stricte croissance de la fonction $t \mapsto e^{st}$, on a $(X \geqslant a) = (e^{sX} \geqslant e^{sa})$. Or la variable aléatoire e^{sX} est positive donc, même si e^{sX} admet une espérance infinie auquel cas l'inégalité est triviale, on a $\mathbb{P}(X \geqslant a) = \mathbb{P}(e^{sX} \geqslant e^{sa}) \leqslant \frac{\mathbb{E}(e^{sX})}{e^{sa}}$ d'après l'inégalité de MARKOV.

d. Pour $s > 0$, on a $e^{sS_n} = \prod_{k=1}^{n} e^{sX_k}$ or, par transfert d'indépendance, les variables aléatoires $e^{sX_1}, \cdots, e^{sX_n}$ sont indépendantes donc, d'après le cours, $\mathbb{E}(e^{sS_n}) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e^{sX_k})$. Mais, par théorème de transfert, $\mathbb{E}(e^{sX_k}) = \frac{1}{2}e^{s\times 1} + \frac{1}{2}e^{s\times(-1)} = \mathrm{ch}\,(s)$ donc, en prenant $X = S_n$ dans la question précédente, on obtient la majoration $\mathbb{P}(S_n \geqslant na) \leqslant \frac{1}{e^{sa}} \prod_{k=1}^{n} \text{ch}(s) = \left(\frac{\text{ch}(s)}{e^{sa}}\right)^n$.

e. Méthode 1 : Pour tout réel s, d'après le cours, $\text{ch}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^{2n}}{(2n)!}$ et $e^{\frac{s^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^{2n}}{2^n n!}$. Si $a_n = \frac{2^n n!}{(2n)!}$, on a $a_{n+1} = \frac{2(n+1)a_n}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{a_n}{2n+1} \leqslant a_n$ donc $(a_n)_{n\geqslant 0}$ décroît et $a_0 = 1$. Ainsi, on obtient l'inégalité $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{(2n)!} \leqslant \frac{1}{2^n n!}$. D'où $\forall s \in \mathbb{R},\ \text{ch}(s) \leqslant e^{\frac{s^2}{2}}$.

Méthode 2 : la fonction $f : s \mapsto \frac{s^2}{2} - \ln(\text{ch}(s))$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ car $\text{ch}(s) > 0$, deux fois dérivable par opérations et $f'(s) = s - \text{th}(s)$ et $f''(s) = \text{th}^2(s) \geqslant 0$ pour $s \in \mathbb{R}$ donc, comme $f'(0) = 0$, f' est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$ ce qui montre que f est minimale en 0 et, comme $f(0) = 0$, que f est finalement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\forall s \in \mathbb{R},\ \ln(\text{ch}(s)) \leqslant \frac{s^2}{2}$ et on conclut par croissance de l'exponentielle que $\forall s \in \mathbb{R},\ \text{ch}(s) \leqslant e^{s^2/2}$.

f. Avec **d.** et **e.**, on a $\mathbb{P}(S_n \geqslant na) \leqslant \left(\frac{\text{ch}(s)}{e^{sa}}\right)^n \leqslant e^{n(s^2/2)-sna}$. Posons $g : s \mapsto \frac{s^2}{2} - sa$, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(s) = s - a$ donc g est décroissante sur $]0; a]$ et croissante sur $[a; +\infty[$ donc elle est minimale en $s = a$ où $g(a) = -\frac{a^2}{2}$. En prenant $s = a$ dans la majoration précédente, on obtient bien la majoration $\mathbb{P}(S_n \geqslant na) \leqslant e^{\frac{-na^2}{2}}$ pour $a > 0$.

g. Pour $x > 0$, on sait que $g(x) = \frac{1}{x^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$. Ainsi, comme la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc qu'elle y est de classe C^∞, la fonction g, qui en est sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$, se prolonge bien en une fonction continue (et même C^∞) sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+2)!} \geqslant 0$ donc g est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

11.134 **a.** Pour $x \neq 0$, en posant $u_n = \binom{2n}{n}\frac{x^{2n}}{4^n}$ pour le critère de d'Alembert, on obtient après simplifications, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(2n+2)!(n!)^2 4^n x^{2n+2}}{(2n)!((n+1)!)^2 4^{n+1}} = \frac{(2n+2)(2n+1)x^2}{4(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)x^2}{4(n+1)}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell = x^2$.

- si $|x| < 1$, on a $\ell < 1$ donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument par le critère de d'Alembert. Ainsi, $R \geqslant 1$.
- si $|x| > 1$, on a $\ell > 1$ donc $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge grossièrement par le critère de d'Alembert. Ainsi, $R \leqslant 1$.

Par conséquent, le rayon R de convergence de la série entière lacunaire $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n}\frac{x^{2n}}{4^n}$ vaut $R = 1$. On sait d'après le cours ou on retrouve facilement que $\forall y \in]-1;1[$, $\frac{1}{\sqrt{1+y}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} y^n$. Ainsi, pour $x \in]-1;1[$, en prenant $y = -x^2 \in]-1;1[$, on obtient $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n}\frac{x^{2n}}{4^n}$.

b. Par construction, $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$ suit la loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ car $Y_k = 0 \Longleftrightarrow X_k = -1$ et $Y_k = 1 \Longleftrightarrow X_k = 1$. Par indépendance de $X_1, \cdots, X_n$ donc de $Y_1, \cdots, Y_n$, d'après le cours, $T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

c. Or $\forall k \in [\![1;n]\!],\ X_k = 2Y_k - 1$ donc $S_n = 2\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) - n = 2T_n - n$. Comme $T_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$, on obtient $S_n(\Omega) = \{-n, -(n-2), \cdots, (n-2), n\}$ et $\mathbb{P}(S_n = 2k - n) = \mathbb{P}(T_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$. Par les propriétés de l'espérance et la variance, on a $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = 0$ et

$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = n$ car $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes car on a clairement $\mathbb{E}(X_k) = 0$ et $\mathbb{V}(X_k) = 1$. On pouvait passer par T_n, en effet, $\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}(2T_n - n) = 4\,\mathbb{V}(T_n)$ donc $\mathbb{E}(S_n) = 2\,\mathbb{E}(T_n) - n = 2(n/2) - n = 0$ et $\mathbb{V}(S_n) = 4(n/4) = n$ car $T_n \sim \mathcal{B}\Big(n, \frac{1}{2}\Big)$ donc $\mathbb{E}(T_n) = n\Big(\frac{1}{2}\Big)$ et $\mathbb{V}(T_n) = n\Big(\frac{1}{2}\Big) \times \Big(1 - \frac{1}{2}\Big)$.

d. Soit $x \in]-1;1[$, on a $|p_n x^n| \leqslant |x|^n$ car $p_n \in [0;1]$ donc, comme la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} |x|^n$ converge car $|x| < 1$, par comparaison, $\sum_{n\geqslant 0} p_n x^n$ converge absolument.

e. Pour $n \geqslant 1$, on peut partitionner $(S_{2n} = 0)$ en $(S_{2n} = 0) = \bigsqcup_{k=1}^{n} ((S_{2n} = 0) \cap (T = 2k))$ en distinguant selon la première fois (notée T) où l'on va avoir $(S_{2k} = 0)$ ($S_{2k+1} \neq 0$ car S_n a la même parité que n). Par σ-additivité, $p_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_{2n} = 0, T = 2k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{(T=2k)}(S_{2n} = 0)\,\mathbb{P}(T = 2k)$. Pour tout $k \in [\![1;n-1]\!]$, on a $\mathbb{P}_{(T=2k)}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(S_{2(n-k)} = 0)$ (on repart de 0 après $2k$ "mouvements" et on veut être à 0 au bout de $2n$ étapes). Par contre, comme $(T = 2n) \subset (S_{2n} = 0)$, on a $\mathbb{P}_{(T=2n)}(S_{2n} = 0) = 1$. Ainsi $p_n = q_n + \sum_{k=1}^{n-1} q_k p_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} q_k p_{n-k}$ car on a posé $p_0 = 1$ par convention.

La série génératrice $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(T = n)x^n$ de T, qui est bien une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, a un rayon de convergence au moins égal à 1 d'après le cours. Si $x \in]-1;1[$, on peut effectuer le produit de Cauchy, comme $\mathbb{P}(T = 2n+1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_T(x)p(x^2) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^{2n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^{2n}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} q_k p_{n-k}\Big)x^{2n}$.

Or $p_n = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} q_k$ si $n \in \mathbb{N}^*$ car $q_0 = 0$ mais $\sum_{k=0}^{0} p_{n-k} q_k = p_0 q_0 = 0$ alors que $p_0 = 1$. Ainsi, pour tout $x \in]-1;1[$, $G_T(x)p(x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^{2n} = p(x^2) - 1$. Mais $p(x^2) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^{2n} \geqslant 1$ car $p_n \geqslant 0$ donc $p(x^2) > 0$ et on a donc la relation attendue, à savoir $G_T(x) = \dfrac{p(x^2) - 1}{p(x^2)}$.

D'après **c.**, comme $p_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(T_{2n} = n) = \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$, il vient $\forall x \in]-1;1[$, $p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n$.

On en déduit donc que $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ donc $p(x^2) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $G_T(x) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 1 - \sqrt{1-x^2}$. Or on sait aussi que, pour $y \in]-1;1[$, on a le développement en série entière $\sqrt{1+y} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n(n!)^2(2n-1)} y^n$.

Ainsi, pour $x \in]-1;1[$, $G_T(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n(n!)^2(2n-1)} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)} x^{2n}$. On identifie car les rayons sont strictement positifs et $\forall n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(T = 2n) = \dfrac{1}{2^{2n}(2n-1)}\dbinom{2n}{n}$.

$G_T : x \mapsto 1 - \sqrt{1-x^2}$ n'est pas dérivable en 1 car $\sqrt{}$ ne l'est pas en 0. D'après le cours, T n'admet pas une espérance finie. Pourtant, $\mathbb{P}(T = +\infty) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1 - G_T(1) = 1 - 1 = 0$: T est presque sûrement finie mais admet une espérance infinie. Bizarre.

11.135 **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$, pour avoir $X_n = 0$, il est d'abord nécessaire que le nombre de pas n soit pair. Ainsi, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 0$ si n est impair. Par contre, si $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $X_{2p} = 0$ si et seulement si p

pas parmi $2p$ s'effectuent vers la gauche (réussite) et les p autres s'effectuant vers la droite (échec). Ce schéma binomial se traduit d'après le cours, en supposant bien sûr que tous les pas de cette marche sont indépendants, par la relation $\mathbb{P}(X_{2p}=0)=\binom{2p}{p}\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(\frac{1}{2}\right)^p=\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$. Par l'équivalent de STIRLING, on a $\mathbb{P}(X_{2p}=0)\underset{+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{4\pi p}(2p)^{2p}e^{2p}}{2^{2p}e^{2p}(2\pi p)p^{2p}}=\frac{1}{\sqrt{\pi p}}$. Par comparaison aux séries de RIEMANN, $\sum\limits_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(X_n=0)$ diverge.

b. B_i ne prend que les valeurs 0 et 1 (si $X_i=0$), cette variable aléatoire suit donc la loi de BERNOULLI de paramètre $\mathbb{P}(X_i=0)$. Ainsi, $\mathbb{E}(B_i)=\mathbb{P}(X_i=0)$. Soit $p\in\mathbb{N}$, la variable aléatoire $\sum\limits_{i=1}^{p}B_i$ prend des valeurs dans $\mathbb{N}$ donc, d'après le cours, $\mathbb{E}\Big(\sum\limits_{i=1}^{p}B_i\Big)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}\Big(\sum\limits_{i=1}^{p}B_i\geqslant k\Big)$. Ainsi, par linéarité de l'espérance et avec ce qui précède, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}\Big(\sum\limits_{i=1}^{p}B_i\geqslant k\Big)=\sum\limits_{i=1}^{p}\mathbb{E}(B_i)=\sum\limits_{i=1}^{p}\mathbb{P}(X_i=0)$.

c. Si $k\in\mathbb{N}^*$, par définition de E_k et des B_i, on a $E_k=\bigcup\limits_{p=1}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{i=1}^{p}B_i\geqslant k\Big)$ puisque $\sum\limits_{i=1}^{p}B_i$ est le nombre de retours à l'origine pendant les p premiers pas de la marche. Comme la suite $\left(\Big(\sum\limits_{i=1}^{p}B_i\geqslant k\Big)\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, on obtient, par continuité croissante, la relation $\mathbb{P}(E_k)=\lim\limits_{p\to+\infty}\mathbb{P}\Big(\sum\limits_{i=1}^{p}B_i\geqslant k\Big)$. Plus simplement, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(E_k)\geqslant\mathbb{P}\Big(\sum\limits_{i=1}^{p}B_i\geqslant k\Big)$. Ainsi, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(E_k)\geqslant\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}\Big(\sum\limits_{i=1}^{p}B_i\geqslant k\Big)=\sum\limits_{i=1}^{p}\mathbb{P}(X_i=0)$ en sommant. Comme cette minoration est vraie pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ et que $\sum\limits_{i\geqslant 1}\mathbb{P}(X_i=0)$ diverge d'après **a.**, on en déduit que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(E_k)=+\infty$ et $\sum\limits_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(E_k)$ diverge.

d. On a $E_2=\bigsqcup\limits_{1\leqslant i<j}\left(\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{i-1}(X_n\neq 0)\Big)\cap(X_i=0)\cap\Big(\bigcap\limits_{m=i+1}^{j-1}(X_m\neq 0)\Big)\cap(X_j=0)\right)$ donc, par σ-additivité et probabilité conditionnelle, $\Big(\bigcap\limits_{m=i+1}^{j-1}(X_m\neq 0)\Big)\cap(X_j=0)$ ne dépend que de la position de la marche après le i-ième pas, on a $\mathbb{P}(E_2)=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\sum\limits_{j=i+1}^{+\infty}\mathbb{P}\Big(\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{i-1}(X_n\neq 0)\Big)\cap(X_i=0)\Big)\mathbb{P}_{(X_i=0)}\Big(\Big(\bigcap\limits_{m=i+1}^{j-1}(X_m\neq 0)\Big)\cap(X_j=0)\Big)$ d'où $\mathbb{P}(E_2)=\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}\Big(\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{i-1}(X_n\neq 0)\Big)\cap(X_i=0)\Big)\left(\sum\limits_{j=i+1}^{+\infty}\mathbb{P}_{(X_i=0)}\Big(\Big(\bigcap\limits_{m=i+1}^{j-1}(X_m\neq 0)\Big)\cap(X_j=0)\Big)\right)$.

Or $(X_i=0)\cap\Big(\bigcap\limits_{m=i+1}^{j-1}(X_m\neq 0)\Big)\cap(X_j=0)\Big)=(X_i=0)\cap\Big(\bigcap\limits_{m=i+1}^{j-1}(\sum\limits_{k=i+1}^{j-1}p_k\neq 0)\Big)\cap(\sum\limits_{k=i+1}^{j}p_k=0)\Big)$ en notant $p_k=\pm 1$ le k-ième pas de sorte que $X_i=\sum\limits_{k=1}^{i}p_k$. Par le lemme des coalitions, $(X_i=0)=\Big(\sum\limits_{k=1}^{i}p_k=0\Big)$ est indépendant de $\Big(\bigcap\limits_{m=i+1}^{j-1}(\sum\limits_{k=i+1}^{j-1}p_k\neq 0)\Big)\cap(\sum\limits_{k=i+1}^{j}p_k=0)\Big)$ car $p_1,\cdots,p_j$ indépendants. Et en on a donc $\mathbb{P}_{(X_i=0)}\left(\Big(\bigcap\limits_{m=i+1}^{j-1}(X_m\neq 0)\Big)\cap(X_j=0)\Big)\right)=\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{m=i+1}^{j-1}(\sum\limits_{k=i+1}^{m}p_k\neq 0)\Big)\cap(\sum\limits_{k=i+1}^{j}p_k=0)\Big)$. Or on a $\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{m=i+1}^{j-1}(\sum\limits_{k=i+1}^{m}p_k\neq 0)\Big)\cap(\sum\limits_{k=i+1}^{j}p_k=0)\Big)=\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{m=i+1}^{j-1}(\sum\limits_{k=i+1}^{m}p_{k-i}\neq 0)\Big)\cap(\sum\limits_{k=i+1}^{j}p_{k-i}=0)\Big)$ car

$(p_1,\cdots,p_{j-i})$ suit la même loi que $(p_{i+1},\cdots,p_j)$. Tout ceci prouve, en posant $p=m-i$ et $\ell=k-i$, la relation $\mathbb{P}_{(X_i=0)}\Big(\Big(\bigcap\limits_{m=i+1}^{j-1}(X_m\neq 0)\Big)\cap(X_j=0)\Big)\Big)=\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{p=1}^{j-i-1}(\sum\limits_{\ell=1}^{p}p_\ell\neq 0)\Big)\cap(\sum\limits_{\ell=1}^{j-i}p_\ell=0)\Big)$. Ainsi, on arrive à $\mathbb{P}(E_2)=\Big(\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}\Big(\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{i-1}(X_n\neq 0)\Big)\cap(X_i=0)\Big)\Big)\Big(\sum\limits_{j=i+1}^{+\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{p=1}^{j-i-1}(\sum\limits_{\ell=1}^{p}p_\ell\neq 0)\Big)\cap(\sum\limits_{\ell=1}^{j-i}p_\ell=0)\Big)\Big)$.

Comme $\sum\limits_{\ell=1}^{p}p_\ell=X_p$, qu'on a aussi $\sum\limits_{\ell=1}^{j-i}p_\ell=X_{j-i}$, et avec le changement d'indices $k=j-i$, on arrive enfin à $\mathbb{P}(E_2)=\Big(\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}\Big(\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{i-1}(X_n\neq 0)\Big)\cap(X_i=0)\Big)\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcap\limits_{p=1}^{k-1}(X_p\neq 0)\Big)\cap(X_k=0)\Big)\Big)=\mathbb{P}(E_1)^2$.

De la même manière, $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(E_{k+1})=\mathbb{P}(E_k)\,\mathbb{P}(E_1)$ donc, par récurrence, $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(E_k)=(\mathbb{P}(E_1))^k$. Puisque la série géométrique $\sum\limits_{k\geqslant 1}(\mathbb{P}(E_1))^k$ diverge d'après **c.**, on a forcément $\mathbb{P}(E_1)=1$.

e. D'après **d.**, on a donc $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(E_k)=1$. Notons $O=$ "on revient une infinité de fois à l'origine", de sorte que $O=\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}E_k$. Comme la suite $(E_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, par théorème de continuité décroissante, on a $\mathbb{P}(O)=\lim\limits_{k\to+\infty}\mathbb{P}(E_k)=1$. Il est donc presque sûr que le marcheur revienne une infinité de fois à l'origine.

$\boxed{\textbf{11.136}}$ **a.** Comme X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $\Omega=\bigsqcup\limits_{i,j\geqslant 0}(X=i,Y=j)$ donc, par σ-additivité, on obtient $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=j)\Big)=1$ donc $a\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\dfrac{q^i}{1-q}=\dfrac{a}{(1-q)^2}=1$ (séries géométriques) donc $a=p^2$.

b. Pour $i\in\mathbb{N}$, $(X=i)=\bigsqcup\limits_{j=0}^{+\infty}(X=i,Y=j)$ donc, toujours par σ-additivité, $\mathbb{P}(X=i)=p^2q^i\sum\limits_{j=0}^{+\infty}q^j=p(1-p)^i$. Comme $X+1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et que $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X+1=k)=\mathbb{P}(X=k-1)=p(1-p)^{k-1}$, la variable aléatoire $X+1$ suit la loi géométrique de paramètre p. Par symétrie, $Y+1$ suit aussi la même loi géométrique de paramètre p. D'après le cours, $\mathbb{E}(X+1)=\dfrac{1}{p}$ donc $\mathbb{E}(X)=\dfrac{1-p}{p}=\dfrac{q}{p}$ par linéarité de l'espérance et on sait aussi que $\mathbb{V}(X+1)=\dfrac{1-p}{p^2}=\mathbb{V}(X)$.

c. Soit $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ définie par $f(a,b)=ab$ de sorte que $XY=f(X,Y)$. Par théorème de transfert, la variable aléatoire XY admet une espérance finie si et seulement si $(ij\,\mathbb{P}(X=i,Y=j))_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Or $\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}ij\,\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}ijp^2q^{i+j}=\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}ijp^2q^{i+j}=p^2\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}(iq^i)(jq^j)=p^2\Big(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}kq^k\Big)^2$ (famille produit). Or on sait que $\forall x\in]-1;1[,\ \dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$ qu'on dérive terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence pour avoir $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}$ donc $\dfrac{x}{(1-x)^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}nx^n$.

Par conséquent, $\mathbb{E}(XY)=p^2\Big(\dfrac{q}{(1-q)^2}\Big)^2=\dfrac{q^2}{p^2}$ et $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)=\dfrac{q^2}{p^2}-\Big(\dfrac{q}{p}\Big)^2=0$.

Mais c'est bien sûr, comme $\forall(i,j)\in\mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X=i,Y=j)=p^2q^{i+j}=(pq^i)(pq^j)=\mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j)$, par définition, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et, d'après le cours, $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

d. Soit $n\in\mathbb{N}$, les valeurs prises par U sachant que $X+Y=2n+1$ sont tous les entiers de $n+1$ à $2n+1$. Pour $k\in[\![n+1;2n+1]\!]$, on a $(U=\mathrm{Max}(X,Y)=k)\cap(X+Y=2n+1)=(X=k,Y=2n+1-k)\sqcup(X=2n+1-k,Y=k)$ car $2n+1-k<k$ donc $\mathbb{P}(U=k,X+Y=2n+1)=\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=2n+1-k)+\mathbb{P}(X=2n+1-k)\,\mathbb{P}(Y=k)$

par indépendance de X et Y donc $\mathbb{P}(U=k,X+Y=2n+1)=2(pq^k)(pq^{2n+1-k})=2p^2q^{2n+1}$. De plus, $(X+Y=2n+1)=\bigsqcup_{k=0}^{2n+1}(X=k,Y=2n+1-k)$ donc, par σ-additivité et indépendance de X et Y, $\mathbb{P}(X+Y=2n+1)=\sum_{k=0}^{2n+1}\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=2n+1-k)=\sum_{k=0}^{2n+1}(pq^k)(pq^{2n+1-k})=(2n+2)p^2q^{2n+1}$. Ainsi, pour $k\in[\![n+1;2n+1]\!]$, $\mathbb{P}(U=k|X+Y=2n+1)=\dfrac{\mathbb{P}(U=k,X+Y=2n+1)}{\mathbb{P}(X+Y=2n+1)}=\dfrac{2p^2q^{2n+1}}{(2n+2)p^2q^{2n+1}}=\dfrac{1}{n+1}$. Par conséquent, la loi de U sachant $X+Y=2n+1$ est uniforme sur l'intervalle $[\![n+1;2n+1]\!]$.

11.137 **a.** Notons $P_k=$ "on fait pile au lancer numéro k" (le premier lancer est de numéro 1). On pose $X=+\infty$ si on ne fait pas deux fois pile au cours du processus. On a $X(\Omega)=\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ et, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $(X=k)=\bigsqcup_{i=1}^{k+1}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{i-1}\overline{P_j}\right)\cap P_i\cap\left(\bigcap_{j=i+1}^{k+1}\overline{P_j}\right)\cap P_{k+2}\right)$ (en notant $i\in[\![1;k+1]\!]$ et $k+2$ les numéros des deux lancers donnant pile). Comme ces évènements sont incompatibles et que $P_1,\cdots,P_{k+2}$ sont supposés indépendants, on a $\mathbb{P}(X=k)=\sum_{i=1}^{k+1}\left(\prod_{j=1}^{i-1}(1-p)\right)p\left(\prod_{j=i+1}^{k+1}(1-p)\right)p=(k+1)p^2(1-p)^k$.

$\overline{(X=+\infty)}=\bigsqcup_{k=0}^{+\infty}(X=k)$ donc, par σ-additivité, on a $1-\mathbb{P}(X=+\infty)=p^2\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(1-p)^k$. Or on sait que $\forall x\in]-1;1[$, $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{+\infty}x^k$ qu'on dérive à l'intérieur de l'intervalle ouvert de convergence pour avoir $\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)x^k=\dfrac{1}{(1-x)^2}$. Comme $1-p\in]0;1[$, $1-\mathbb{P}(X=+\infty)=\dfrac{p^2}{(1-(1-p))^2}=1$ donc $\mathbb{P}(X=+\infty)=0$.

b. Par définition, X admet une espérance finie si et seulement si $\sum_{k\geqslant 0}k\,\mathbb{P}(X=k)$ est absolument convergente. Or $k\,\mathbb{P}(X=k)=k(k+1)p^2(1-p)^k\underset{+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ par croissances comparées donc $\sum_{k\geqslant 0}k\,\mathbb{P}(X=k)$ converge par comparaison aux séries de Riemann, ce qui prouve que X admet une espérance finie.

On dérive une fois de plus terme à terme la relation $\forall x\in]-1;1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)x^k=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ dans l'intervalle ouvert de convergence et $\forall x\in]-1;1[$, $\sum_{k=1}^{+\infty}k(k+1)x^{k-1}=\dfrac{2}{(1-x)^3}$ donc $\sum_{k=0}^{+\infty}k(k+1)x^k=\dfrac{2x}{(1-x)^3}$. Ainsi, $\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}k\,\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}k(k+1)p^2(1-p)^k=p^2\sum_{k=0}^{+\infty}k(k+1)(1-p)^k=\dfrac{2p^2(1-p)}{(1-(1-p))^3}$ car $1-p\in]0;1[$ et on a l'espérance attendue, $\mathbb{E}(X)=\dfrac{2(1-p)}{p}$.

c. On suppose que la boule piochée dans l'urne l'est de manière uniforme. On a $Y(\Omega)=\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ en convenant que $Y=+\infty$ si $X=+\infty$. Comme on a vu que $(X=+\infty)$ est négligeable, $(Y=+\infty)=(X=+\infty)$ l'est aussi. Pour $k\in\mathbb{N}$, comme $\big((X=n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'évènements, par la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)\,\mathbb{P}(Y=k|X=n)$. Or $\mathbb{P}(Y=k|X=n)=0$ si $k>n$ et $\mathbb{P}(Y=k|X=n)=\dfrac{1}{n+1}$ si $k\leqslant n$ donc $\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\dfrac{(n+1)p^2(1-p)^n}{n+1}=p^2\sum_{n=k}^{+\infty}(1-p)^n=\dfrac{p^2(1-p)^k}{1-(1-p)}$ (série géométrique) donc $\mathbb{P}(Y=k)=p(1-p)^k$.

d. Comme $(Y+1)(\Omega)=\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$ et que $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y+1=k)=\mathbb{P}(Y=k-1)=p(1-p)^{k-1}$, la variable aléatoire $Y+1$ suit (presque sûrement) la loi géométrique de paramètre p. On sait d'après le cours que $\mathbb{E}(Y+1) = \mathbb{E}(Y)+1 = \dfrac{1}{p}$ et que $\mathbb{V}(Y+1) = \mathbb{V}(Y) = \dfrac{1-p}{p^2}$. Ainsi, $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1-p}{p}$ et $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

11.138 Comme $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{X_k(\omega)}{k}$ est une série à termes positifs pour $\omega \in \Omega$, elle converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Ainsi, en discrétisant les majorants $M \in \mathbb{N}^*$, on a l'expression $A = \bigcup\limits_{M=1}^{+\infty} A_M$ où $A_M = \left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{X_k(\omega)}{k} \leqslant M\right\} = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$ avec $B_n = (S_n \leqslant M)$.

Soit $M \in \mathbb{N}^*$, comme la suite $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion car $B_{n+1} \subset B_n$ puisque si $S_{n+1}(\omega) \leqslant M$, alors $S_n(\omega) \leqslant S_{n+1}(\omega) \leqslant M$. Par le théorème de continuité décroissante, on a donc $\mathbb{P}(A_M) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\mathbb{E}(X_k)}{k} = pH_n$ en posant $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ la somme partielle de la série harmonique. Par indépendance de $X_1, \cdots, X_n$, $\mathbb{V}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\mathbb{V}(X_k)}{k^2} = p(1-p)T_n$ en posant $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ la somme partielle de la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ qui converge et dont la somme est $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Comme S_n admet un moment d'ordre 2, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$, on a la majoration $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(|S_n - pH_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{p(1-p)T_n}{\varepsilon^2} = \dfrac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2} \leqslant \dfrac{p(1-p)\pi^2}{6\varepsilon^2}$.

Soit $M \in \mathbb{N}^*$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ pH_n > M$. Pour tout $n \geqslant n_0$, comme $M < pH_n$, on a $(S_n \leqslant M) \subset (|S_n - pH_n)| \geqslant pH_n - M)$ donc, en posant $\varepsilon = pH_n - M > 0$ dans la majoration précédente, on obtient $0 \leqslant \mathbb{P}(S_n \leqslant M) \leqslant \dfrac{p(1-p)\pi^2}{6\varepsilon^2} = \dfrac{p(1-p)\pi^2}{6(pH_n - M)^2}$. Par encadrement, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n \leqslant M) = 0$ donc $\mathbb{P}(A_M) = 0$.

<u>Méthode 1</u> : par sous-additivité, comme $A = \bigcup\limits_{M=1}^{+\infty} A_M$, on a $\mathbb{P}(A) \leqslant \sum\limits_{M=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_M) = 0$ donc $\mathbb{P}(A) = 0$.

<u>Méthode 2</u> : Pour $M \in \mathbb{N}^*$, si la suite $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par M, elle est a fortiori majorée par $M+1$ donc $A_M \subset A_{M+1}$. Ainsi, la suite d'évènements $(A_M)_{M\in\mathbb{N}^*}$ est croissante pour l'inclusion donc, par continuité croissante, on a $\mathbb{P}(A) = \lim\limits_{M\to+\infty} \mathbb{P}(A_M) = 0$.

11.139 On note qu'ici $\lambda_n \geqslant 0$ contrairement à ce qu'on a vu en cours où on a imposé que le paramètre d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson soit strictement positif. Il est donc possible, si $\lambda_n = 0$, que X_n soit presque sûrement nulle car alors on a $\mathbb{P}(X_n = 0) = \dfrac{e^{-0}0^0}{0!} = 1$ et $\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{e^{-0}0^k}{k!} = 0$.

On a $(S = 0) = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} (X_n = 0)$ car les X_n sont à valeurs positives. Comme $(S = 0) = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} (X_k = 0)\right)$ et que la suite $\left(I_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} (X_k = 0)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion, par théorème de continuité décroissante, on a $\mathbb{P}(S = 0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(I_n)$. Par indépendance des X_k, $\mathbb{P}(I_n) = \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = 0) = \prod\limits_{k=1}^{n} e^{-\lambda_k} = e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k}$.

On a donc deux cas :

- Si $\sum\limits_{n\geqslant 1} \lambda_n$ converge, on a $\mathbb{P}(S=0) = \exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\Big) > 0$.
- Si $\sum\limits_{n\geqslant 1} \lambda_n$ diverge, on a $\mathbb{P}(S=0) = 0$.

Dans le cas général, pour $p \in \mathbb{N}$, en posant les sommes partielles $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, on constate que la suite $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante pour tout $\omega \in \Omega$ et que $(S \leqslant p) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(S_n \leqslant p)$. Or $\big((S_n \leqslant p)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion donc, par le théorème de continuité décroissante, $\mathbb{P}(S \leqslant p) = \lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(S_n \leqslant p)$.

On a vu dans le cours que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, alors $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Initialisation : X_1 suit la loi de Poisson de paramètre λ_1 par hypothèse et, avec ce qui précède, X_1+X_2 suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$.

Hérédité : soit $n \geqslant 2$ tel que la variable aléatoire S_n suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k$. Comme S_n et X_{n+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions, $S_n + X_{n+1} = S_{n+1}$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\lambda_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1}\lambda_k$.

Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit la loi de Poisson de paramètre $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $(S_n \leqslant p) = \bigsqcup\limits_{i=0}^{p}(S_n = i)$ donc $\mathbb{P}(S_n \leqslant p) = \sum\limits_{i=0}^{p}\mathbb{P}(S_n = i) = \sum\limits_{i=0}^{p}\dfrac{\exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\Big)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\Big)^i}{i!}$ (1).

Traitons deux cas :

- Si $\sum\limits_{k\geqslant 1}\lambda_k$ converge, en notant $S = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\lambda_k \in \mathbb{R}_+$, par continuité de $t\mapsto e^t$ et de $t\mapsto t^i$ pour $i\in[\![0;p]\!]$ en S, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans (1), on obtient $\mathbb{P}(S\leqslant p) = \sum\limits_{i=0}^{p}\dfrac{e^{-S}S^i}{i!}$.
- Si $\sum\limits_{k\geqslant 1}\lambda_k$ diverge, comme $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}t^i = 1$ si $i=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t}t^i = 0$ si $i\geqslant 1$, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans (1), on obtient $\mathbb{P}(S\leqslant p) = 1$.

Pour avoir la loi de S, on écrit $(S=0) = (S\leqslant 0)$ et, pour $p\in\mathbb{N}^*$, $(S\leqslant p) = (S=p)\sqcup(S\leqslant p-1)$ de sorte que, en traitant à nouveau deux cas :

- Si $\sum\limits_{k\geqslant 1}\lambda_k$ converge, $\mathbb{P}(S=0) = e^{-S}$ et $\mathbb{P}(S=p) = \sum\limits_{i=0}^{p}\dfrac{e^{-S}S^i}{i!} - \sum\limits_{i=0}^{p-1}\dfrac{e^{-S}S^i}{i!} = \dfrac{e^{-S}S^p}{p!}$ si $p\in\mathbb{N}^*$.
- Si $\sum\limits_{k\geqslant 1}\lambda_k$ diverge, $\mathbb{P}(S=0) = 1$ et $\mathbb{P}(S=p) = 1-1 = 0$ si $p\in\mathbb{N}^*$.

Dans les deux cas, S suit la loi de Poisson de paramètre $S = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\lambda_k$.

11.140 **a.** Pour que l'on ait $S_k = 0$, il est nécessaire et suffisant qu'il y ait k indices $i\in[\![1;2k]\!]$ tels que $X_i = 1$ (considérés comme des réussites) et que les k autres indices $i\in[\![1;2k]\!]$ vérifient $X_i = -1$ (échecs). Ce schéma binomial se traduit par le fait que $p(k) = \mathbb{P}(S_k = 0) = \dbinom{2k}{k}p^k(1-p)^k$.

Avec l'équivalent de Stirling, $p(k) = \dfrac{(2k)!}{(k!)^2}p^k(1-p)^k \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{4\pi k}(2k)^{2k}e^{2k}}{e^{2k}(2\pi k)k^{2k}}p^k(1-p)^k = \dfrac{(4p(1-p))^k}{\sqrt{\pi k}}$.

b. Notons R le nombre de retours à l'origine, c'est-à-dire $R = \text{card}\Big(\Big\{k\in\mathbb{N}^* \mid S_k = 0\Big\}\Big) \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$.

On revient une infinité de fois à l'origine si et seulement si, pour chaque entier $i \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $j > i$ pour lequel $S_j = 0$. Ceci se traduit par $(R = +\infty) = \bigcap_{i=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{j=i+1}^{+\infty}(S_j = 0)\right)$. Comme la suite d'évènements $\left(A_i = \bigcup_{j=i+1}^{+\infty}(S_j = 0)\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion, par le théorème de continuité décroissante, on a $\mathbb{P}(R = +\infty) = \lim_{i\to+\infty}\mathbb{P}(A_i)$. Or, par sous-additivité, on a $\mathbb{P}(A_i) \leqslant \sum_{j=i+1}^{+\infty}\mathbb{P}(S_j = 0)$. Comme $p \neq \frac{1}{2}$ dans cette question, $4p(1-p) < 1$ car $\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 > 0$ donc, avec la question précédente, $p(j) = \mathbb{P}(S_j = 0) \underset{+\infty}{=} o((4p(1-p))^j)$ et la série géométrique $\sum_{j\geqslant 1}(4p(1-p))^j$ converge donc, par comparaison, la série $\sum_{j\geqslant 1}\mathbb{P}(S_j = 0)$ converge. En notant $R_i = \sum_{j=i+1}^{+\infty}\mathbb{P}(S_j = 0)$ son reste d'ordre i, on a donc $0 \leqslant \mathbb{P}(A_i) \leqslant R_i$ donc, par encadrement, $\lim_{i\to+\infty}\mathbb{P}(A_i) = 0$ et $\mathbb{P}(R = +\infty) = 0$.

11.141 Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k = "on tire une boule blanche au tirage k". Il n'y a pas indépendance des tirages puisque si on tire une boule blanche, on arrête le jeu.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $(Y = n) = \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{n-1}} \cap B_n$ et, d'après la formule des probabilités composées, on a $\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(\overline{B_1}) \times \mathbb{P}(\overline{B_2}|\overline{B_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(B_n|\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{n-1}})$ ce qui donne, avec les règles des tirages, $\mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \cdots \times \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{n}{(n+1)!}$.

Comme $\overline{(Y = 0)} = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty}(Y = n)$ d'après l'énoncé, par σ-additivité, on a $1 - \mathbb{P}(Y = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ donc $\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!} = 1 - (e-1) + (e-1-1) = 0$ et l'évènement $(Y = 0)$ = "jamais de boule blanche" est négligeable.

D'après le cours, Y admet une espérance finie si et seulement si la série $(n\,\mathbb{P}(Y = n))_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, ce qui revient à la convergence (tout est positif) de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2}{(n+1)!}$. Or $\frac{n^2}{(n+1)!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(n-1)!}$ et la série exponentielle $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(n-1)!}$ converge. Ainsi, Y admet une espérance finie et $\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}$ donc $\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n+1)-(n+1)+1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!} e - (e-1) + (e-1-1) = e - 1 \sim 1,72$.

11.142 **a.** On connaît le développement en série entière géométrique de rayon $R = 1$: $\forall x \in]-1;1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{+\infty} x^m$.

b. Soit un entier $d \in \mathbb{N}^*$, on peut dériver terme à terme $d-1$ fois le développement de la question précédente. Une récurrence simple montre que $\forall d \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in]-1;1[$, $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(d)} = \frac{d!}{(1-x)^{d+1}}$. Ainsi, avec $r = d - 1$, on a $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(r-1)} = \frac{(r-1)!}{(1-x)^r} = \sum_{m=r-1}^{+\infty}\frac{m!}{(m-r+1)!}x^{m-(r-1)} = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} x^m\right)^{(r-1)}$.

c. Pour $x \in]-1;1[$ et $r \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{m=r-1}^{+\infty}\frac{m!}{(r-1)!(m-r+1)!}x^{m-(r-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+r-1)!}{(r-1)!n!}x^r$ en posant $n = m - r + 1$ donc $\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+r-1}{n}x^n$. En prenant $x = p \in]-1;1[$ dans cette relation, on obtient donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{n+r-1}{n}p^n = \dfrac{1}{q^r}$, c'est-à-dire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ car $\binom{n+r-1}{n} = \binom{n+r-1}{r-1}$ alors que $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n > 0$. Par conséquent, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une distribution de probabilité.

d. La série génératrice de X est de rayon $R \geqslant 1$ d'après le cours et $\forall t \in]-R;R[$, $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n$ donc $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n t^n = q^r \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{n+r-1}{r-1}(pt)^n$. On a donc $R = \dfrac{1}{p}$ puisque le rayon de $\sum\limits_{n\geqslant 0}\binom{n+r-1}{r-1}t^n$ vaut 1 d'après la question **b.**. Ainsi, $\forall t \in \left]-\dfrac{1}{p};\dfrac{1}{p}\right[$, $G_X(t) = \dfrac{q^r}{(1-pt)^r}$.

e. Comme $R > 1$, G_X est dérivable deux fois en 1 donc, d'après le cours, X admet un moment d'ordre 2 donc une espérance et une variance finies et que $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$ et $\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) = G''_X(1)$. Or $\forall t \in \left]-\dfrac{1}{p};\dfrac{1}{p}\right[$, $G'_X(t) = \dfrac{rpq^r}{(1-pt)^{r+1}}$ et $G''_X(t) = \dfrac{r(r+1)p^2q^r}{(1-pt)^{r+2}}$, d'où $\mathbb{E}(X) = \dfrac{rpq^r}{(1-p)^{r+1}} = \dfrac{rp}{q}$ et $\mathbb{V}(X) + \dfrac{r^2p^2}{q^2} - \dfrac{rp}{q} = \dfrac{r(r+1)p^2}{q^2}$ donc $\mathbb{V}(X) = \dfrac{r(r+1)p^2 - r^2p^2 + rp(1-p)}{q^2} = \dfrac{rp}{q^2}$.

11.143 **a.** On note T_k le numéro de la boule tirée au tirage k. On admet l'existence d'un espace probabilisé qui supporte cette suite $(T_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes (remarque du cours). D'abord $X_n(\Omega) = (\mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \cup \{+\infty\}$ car on rajoute la possibilité de ne jamais avoir une autre boule que la première tirée, qu'on note $X_n = +\infty$. De plus, $(X_n = +\infty) = \bigcap\limits_{k=2}^{+\infty} \overline{(X_n = k)}$ par convention et $(X_n = k) = \bigcup\limits_{i=1}^{n}\Big((T_1 = i) \cap \cdots \cap (T_{k-1} = i) \cap (T_k \neq i)\Big) \in \mathcal{A}$ pour $k \geqslant 2$ donc X_n est une variable aléatoire car les T_i le sont. Par incompatibilité de ces n évènements, indépendance mutuelle des T_k qui suivent toutes la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$, on a $\mathbb{P}(X_n = k) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}\left(\dfrac{n-1}{n}\right) = \dfrac{n-1}{n^{k-1}}$ pour $k \geqslant 2$.

On vérifie la cohérence de ces résultats car $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\dfrac{n-1}{n^{k-1}} = \dfrac{n-1}{n}\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)^j = \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{1}{1-(1/n)} = 1$. Ceci justifie que l'évènement $(X_n = +\infty)$ (toujours la même boule) est négligeable comme attendu.

b. $k\,\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{k(n-1)}{n^{k-1}}$ et $\sum\limits_{k\geqslant 2}\dfrac{k(n-1)}{n^{k-1}}$ converge car le rayon de la série entière $\sum\limits_{k\geqslant 1} kx^{k-1}$ est égal à 1 et que $\left|\dfrac{1}{n}\right| < 1$. De plus, comme $\forall x \in]-1;1[$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$, on obtient en dérivant $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ donc $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2} - 1$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n) = (n-1) \times \left(\dfrac{n^2}{(n-1)^2} - 1\right) = \dfrac{2n-1}{n-1}$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = 2$ ce qu'on subodorait car plus n augmente, plus l'évènement $(X_n = 2)$ devient presque sûr. Comme $(X_n - 1)(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et que $\forall k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X_n - 1 = k) = \mathbb{P}(X_n = k+1) = \dfrac{n-1}{n^k}$ qui s'écrit aussi $\mathbb{P}(X_n - 1 = k) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = \left(1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right)^{k-1}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ avec $p = 1-\dfrac{1}{n} \in]0;1[$, la variable aléatoire $X_n - 1$ suit la loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{n-1}{n}$ ce qui simplifie les calculs car alors $\mathbb{E}(X_n - 1) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{n}{n-1}$ donc, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \dfrac{n}{n-1} = \dfrac{2n-1}{n-1}$.

c. Comme $X_2 = Y_2$, pour $k \geqslant 2$, on a $(Y_2 = k) = (X_2 = k)$ donc $\mathbb{P}(Y_2 = k) = \dfrac{1}{2^{k-1}}$ d'après **a.**. On reconnaît cette loi, $Y_2 - 1$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$ car $\mathbb{P}(Y_2 - 1 = k) = \mathbb{P}(Y_2 = k+1) = \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$.

d. Pour $k \geqslant 3$, en notant i le numéro de la première boule tirée, r le premier rang pour lequel on tire une boule de numéro $j \neq i$, comme $6-i-j$ est le numéro tiré autre que i et j (car $i+j+(6-i-j) = 1+2+3 = 6$), on a $(Y_3 = k) = \bigsqcup_{i=1}^{3} \bigsqcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} \bigsqcup_{r=2}^{k-1} \left(\left(\bigcap_{a=1}^{r-1} (T_a = i) \right) \cap (T_r = j) \cap \left(\bigcap_{b=r+1}^{k-1} ((T_k = i) \cup (T_k = j)) \right) \right) \cap (T_k = 6-i-j)$.
Ainsi, par incompatibilité de tous ces évènements, indépendance mutuelle des tirages et symétrie entre les numéros, $\mathbb{P}(Y_3 = k) = 3 \times 2 \times \sum_{r=2}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{r-1} \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-r-1} \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{6}{3^k} \sum_{r=2}^{k-1} 2^{k-r-1} = \frac{6(2^{k-2}-1)}{3^k}$.
À nouveau, comme $Y_3(\Omega) = \{3,4,5,\cdots,+\infty\}$, on vérifie que $\sum_{k=3}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_3 = k) = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{6(2^{k-2}-1)}{3^k} = 1$. En effet, on a $\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{6(2^{k-2}-1)}{3^k} = (6/4)\frac{(2/3)^3}{1-(2/3)} - 6\frac{(1/3)^3}{1-(1/3)} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$. Ceci justifie que l'évènement $(Y_3 = +\infty)$ (maximum deux numéros tirés éternellement) est négligeable comme attendu.

11.144 **a.** Par définition, comme X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, sous réserve de convergence, on a $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$. Or, pour $t \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\mathbb{P}(X = n)t^n\right)_{n\geqslant 0} = \left(\frac{e^{-\lambda}(\lambda t)^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ est bornée par croissances comparées. Ainsi, le rayon de convergence de la série génératrice $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(X = n)t^n$ vaut $R = +\infty$ et on a $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$.

b. Soit $a > 0$ et $t \geqslant 1$, comme $(X \geqslant a) = \bigsqcup_{k\geqslant a} (X = k)$, par σ-additivité, et car $t \geqslant 1$ donc $\forall k \geqslant a,\ t^a \leqslant t^k$, on a $\mathbb{P}(X \geqslant a) = \sum_{k\geqslant a} \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{t^a} \sum_{k\geqslant a} t^a\, \mathbb{P}(X = k) \leqslant \frac{1}{t^a} \sum_{k\geqslant a} t^k\, \mathbb{P}(X = k)$. Ainsi, $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{G_X(t)}{t^a}$ car $G_X(t) = \left(\sum_{k<a} \mathbb{P}(X = k)t^k\right) + \left(\sum_{k\geqslant a} \mathbb{P}(X = k)t^k\right)$ et que $\sum_{k<a} \mathbb{P}(X = k)t^k \geqslant 0$.

c. D'après les questions précédentes, en prenant $a = 2\lambda > 0$, $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \frac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}} = e^{\lambda(t-1)-2\lambda\ln(t)}$ pour tout $t \geqslant 1$. Soit $f : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \lambda(t-1) - 2\lambda\ln(t)$, alors f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et $f'(t) = \lambda - \frac{2\lambda}{t} = \frac{\lambda(t-2)}{t}$ donc f est décroissante sur $[1;2]$ et croissante sur $[2;+\infty[$ et elle atteint son minimum en $t = 2$. En prenant $t = 2$ dans la question **b.**, on a donc $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant e^{f(2)} = e^{\lambda-2\lambda\ln(2)} = \left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda}$.

11.145 **a.** Soit B_k = "on tire une boule blanche ou tirage k", $N_k = \overline{B_k}$ = "on tire une boule blanche ou tirage k".
<u>Cas $r = 1$</u> : il y a $N-1$ boules blanches et une seule boule noire dans l'urne. On a $X_N(\Omega) = [\![1;N]\!]$ dans ce cas et, pour $k \in [\![1;N]\!]$, on a $(X_N = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right) \cap N_k$ donc, avec la formule des probabilités composées en tenant compte de la composition de l'urne à chaque étape, $\mathbb{P}(X_N = k) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2|B_1) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(N_k \middle| \bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right)$ donc $\mathbb{P}(X_N = k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{N-i}{N-i+1}\right) \times \frac{1}{N-k+1} = \frac{1}{N}$ après télescopage. Ainsi, X_N suit la loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$ et on a $\mathbb{E}(X_N) = \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(X_N = k) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2N} = \frac{N+1}{2}$.
<u>Cas $r = N$</u> : il n'y a que des boules noires dans l'urne : $X_N = N$ est certain, $X_N(\Omega) = \{N\}$ et $\mathbb{E}(X_N) = N$.

b. On peut modéliser cette expérience par des N-uplets comme $BNNBBNN\cdots BN$, celui-ci signifiant que la première boule tirée est Blanche, les deux suivantes Noires, etc..... sachant qu'il doit impérativement y avoir

$N-r$ fois B et r fois N dans cette suite de lettres : en d'autres termes l' "évènement" $BNNBBNN\cdots BN$ est égal à $B_1\cap N_2\cap N_3\cap B_4\cap B_5\cap N_6\cap N_7\cap\cdots\cap B_{N-1}\cap N_N$. On note Ω l'ensemble des tous ces N-uplets, il y en a $\binom{N}{r}$ car il faut choisir les r tirages qui vont donner une boule noire parmi les N tirages. On prend aussi la tribu pleine $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$ et pour $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme (par symétrie) sur Ω. On a $X_N(\Omega)=[\![r;N]\!]$ car il faut au moins r tirages pour prendre toutes les boules noires et au plus N.

Soit $k\in[\![r;N]\!]$, alors $\mathbb{P}(X_N=k)=\dfrac{\text{card}\,((X_N=k))}{\text{card}\,(\Omega)}$ (loi uniforme sur Ω, ce qui est justifié dans l'autre méthode). Or on a $\text{card}\,(\Omega)=\binom{N}{r}$ et $\text{card}\,((X=k))=\binom{r-1}{k-1}$ car il faut forcément tirer une boule noire au tirage k, des blanches à tous les tirages suivants et il faut choisir parmi les $r-1$ premiers tirages les $k-1$ tirages qui donnent une boule noire. Ainsi $\mathbb{P}(X_N=k)=\dfrac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}=\dfrac{(k-1)!(N-r)!r!}{(r-1)!(k-r)!N!}=\dfrac{r(k-1)!(N-r)!}{(k-r)!N!}$.

<u>Autre méthode</u> : pour $k\in[\![r;N]\!]=X_N(\Omega)$, on pouvait aussi décrire, avec la définition de X_N, l'évènement $(X_N=k)$ par $(X_N=k)=\displaystyle\bigsqcup_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{r-1}\leqslant k-1}\Bigg(\Big(\bigcap_{j=1}^{r-1}N_{i_j}\Big)\cap\Big(\bigcap_{\substack{p\in[\![1;k-1]\!]\\ p\notin\{i_1,\cdots,i_{r-1}\}}}B_p\Big)\Bigg)\cap N_k\cap\Big(\bigcap_{m=k+1}^{N}B_m\Big)$, ce qui fait une réunion de $\binom{k-1}{r-1}$ évènements incompatibles car il faut choisir les $r-1$ entiers $i_1,\cdots,i_{r-1}$ parmi les $k-1$ entiers de $[\![1;k-1]\!]$. Le premier (dans l'ordre lexicographique par exemple) de ces évènements est $U=\Big(\displaystyle\bigcap_{j=1}^{r-1}N_j\Big)\cap\Big(\bigcap_{p=r}^{k-1}B_p\Big)\cap N_k\cap\Big(\bigcap_{m=k+1}^{N}B_m\Big)$ et le dernier $V=\Big(\Big(\displaystyle\bigcap_{p=1}^{k-r}B_p\Big)\cap\bigcap_{j=k-r+1}^{k-1}N_j\Big)\cap N_k\cap\Big(\bigcap_{m=k+1}^{N}B_m\Big)$.

Pour le premier de ces deux évènements, avec la formule des probabilités composées, on obtient la relation $\mathbb{P}(U)=\Big(\displaystyle\prod_{j=1}^{r-1}\frac{r-j+1}{N-j+1}\Big)\times\Big(\prod_{p=r}^{k-1}\frac{N-p}{N-p+1}\Big)\times\frac{1}{N-k+1}\times\Big(\prod_{m=k+1}^{N}\frac{N-m+1}{N-m+1}\Big)=\frac{r!(N-r)!}{N!}$. Pour le second, $\mathbb{P}(V)=\Big(\displaystyle\prod_{p=1}^{k-r}\frac{N-r-p+1}{N-p+1}\Big)\times\Big(\prod_{j=k-r+1}^{k-1}\frac{k-j+1}{N-j+1}\Big)\times\frac{1}{N-k+1}\times\Big(\prod_{m=k+1}^{N}\frac{N-m+1}{N-m+1}\Big)=\frac{r!(N-r)!}{N!}$. On se rend compte que pour chacun des évènements dont $(X_N=k)$ est la réunion incompatible, on va avoir les mêmes dénominateurs allant en décroissant de N à 1 et les mêmes numérateurs mais pas dans le même ordre. Comme tous ces évènements ont pour probabilité $\dfrac{r!(N-r)!}{N!}$ et qu'ils sont au nombre de $\binom{k-1}{r-1}$, il vient $\mathbb{P}(X_N=k)=\binom{k-1}{r-1}\times\dfrac{r!(N-r)!}{N!}=\dfrac{r(k-1)!(N-r)!}{(k-r)!N!}$.

c. Par définition, $\mathbb{E}(X_N)=\displaystyle\sum_{k=r}^{N}k\,\mathbb{P}(X_N=k)=\frac{1}{\binom{N}{r}}\sum_{k=r}^{N}k\binom{k-1}{r-1}=\frac{1}{\binom{N}{r}}\sum_{k=r}^{N}r\binom{k}{r}$ avec la formule du capitaine, ce qui se simplifie avec la formule des colonnes en $\mathbb{E}(X_N)=\dfrac{r\binom{N+1}{r+1}}{\binom{N}{r}}=\dfrac{r(N+1)}{r+1}<N$ comme il se doit. La formule est aussi valable pour les cas limites $r=1$ et $r=N$ de la question **a.**.

11.146 **a.** Comme S est symétrique réelle, ses valeurs propres sont réelles par le théorème spectral. Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, $\chi_S(\lambda)=(\lambda-X)^2-Y^2=(\lambda-X+Y)(\lambda-X-Y)$ donc $\text{Sp}(S)=\{X-Y,X+Y\}$ donc, puisque $Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$ par définition donc $Y > 0$, il vient $\lambda = X - Y$ et $\mu = X + Y$.

b. S est inversible si et seulement si $\det(S) = X^2 - Y^2 = (X-Y)(X+Y) \neq 0$ donc, puisque $X + Y > 0$, S est inversible si et seulement si $X \neq Y$. Ainsi, $(S \notin GL_2(\mathbb{N}^*)) = (X = Y) = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty}(X = k, Y = k)$ et, puisque ces évènements sont incompatibles et que X et Y sont indépendants et de même loi, par σ-additivité et car $|1-p| < 1$, on a $\mathbb{P}(S \notin GL_2(\mathbb{N}^*)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2(k-1)} = p^2 \sum_{j=0}^{+\infty}((1-p)^2)^j = \dfrac{p^2}{1-(1-p)^2}$ simplifié en $\mathbb{P}(S \notin GL_2(\mathbb{N}^*)) = \dfrac{p}{2-p}$. Ainsi, $\mathbb{P}(S \in GL_2(\mathbb{N}^*)) = 1 - \mathbb{P}(S \notin GL_2(\mathbb{N}^*)) = 1 - \dfrac{p}{2-p} = \dfrac{2(1-p)}{2-p}$.

c. On sait d'après le cours que S, étant déjà symétrique réelle, est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives donc $(S \in S_2^{++}(\mathbb{R})) = (\lambda > 0) = (X > Y) = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty}(X > k, Y = k)$ car on a toujours $\mu > 0$. À nouveau, par incompatibilité de ces évènements et indépendance de X et Y, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(S \in S_2^{++}(\mathbb{R})) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k)\,\mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}(1-p)^k$ qui se calcule comme à la question précédente, $\mathbb{P}(S \in S_2^{++}(\mathbb{R})) = p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}\left((1-p)^2\right)^{k-1} = \dfrac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \dfrac{1-p}{2-p}$.

Il est logique de trouver $\mathbb{P}(S \in S_2^{++}(\mathbb{R})) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(S \in GL_2(\mathbb{N}^*))$ car $(\lambda < 0)$ et $(\lambda > 0)$ sont deux évènements de même probabilité par symétrie entre X et Y.

11.3 Officiel de la Taupe

11.147 Par la formule des probabilités totales, on a $\forall k \in [\![0; n-1]\!]$:

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 0) = \mathbb{P}_{X_k=0}(X_{k+1} = 0)\,\mathbb{P}(X_k = 0) + \mathbb{P}_{X_k=1}(X_{k+1} = 0)\,\mathbb{P}(X_k = 1) = p\,\mathbb{P}(X_k = 0) + (1-p)\,\mathbb{P}(X_k = 1).$$
$$\mathbb{P}(X_{k+1} = 1) = \mathbb{P}_{X_k=0}(X_{k+1} = 1)\,\mathbb{P}(X_k = 0) + \mathbb{P}_{X_k=1}(X_{k+1} = 1)\,\mathbb{P}(X_k = 1) = (1-p)\,\mathbb{P}(X_k = 0) + p\,\mathbb{P}(X_k = 1).$$

Ainsi, pour tout entier $k \in [\![0; n-1]\!]$, on a $A_{k+1} = SA_k$ avec $S = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$.

b. Si $p = 1$, $A_0 = \cdots = A_n$. Si $p = 0$, $A_0 = A_2 = \cdots$ et $A_1 = A_3 = \cdots$: cas sans intérêt !

Par une récurrence simple, on a $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $A_k = S^k A_0$ or $\chi_S = X^2 - 2pX + 2p - 1 = (X-1)(X-2p+1)$.

S est diagonalisable (car symétrique réelle) et on a $S = PD{}^tP$ avec $P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$.

Alors $A_n = PD^n{}^tPA_0 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(2p-1)^n & 1-(2p-1)^n \\ 1-(2p-1)^n & 1+(2p-1)^n \end{pmatrix} A_0$, comme on peut supposer que $p \in]0;1[$, on a $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + (2p-1)^n\right)\mathbb{P}(X_0 = 1) + \frac{1}{2}\left(1 - (2p-1)^n\right)\mathbb{P}(X_0 = 0)$ donc on a $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$.

11.148 En notant $R_{i,k}$ la variable aléatoire valant 1 si on fait k au tirage i et 0 sinon, alors $N_k = \sum_{i=1}^{n} R_{i,k}$ donc N_k est la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p(k)$. Ainsi N_k suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p(k))$ et on a $\mathbb{P}(N_k = i) = \dbinom{n}{i} p(k)^i (1-p(k))^{n-i}$ et $\mathbb{E}(N_k) = np(k)$.

Puisque les V.A. $R_{i,k}$ sont indépendantes et suivant toutes la même loi, si $m = \mathbb{E}(R_{i,k}) = p(k)$ (moyenne) et $\sigma = \sigma(R_{i,k}) = \sqrt{p(k)(1-p(k))}$ (écart-type), on sait d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{N_k}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(\frac{N_k}{n})}{\varepsilon^2} = \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$. Puisque $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{N_k}{n} - p(k)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{p(k)(1-p(k))}{n\varepsilon^2}$, on en déduit la loi faible des grands nombres : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\dfrac{N_k}{n}-p(k)\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.

Soit $S_n = \bigcap\limits_{k=1}^{6}(N_k = np(k))$, il faut que sur les n tirages, $x_k = np(k)$ parmi ces tirages donnent la face k :

- on choisit les numéros des tirages qui vont donner la face 1 : $\dbinom{n}{x_1}$ choix.
- on impose pour chacun de ces tirages la face 1 : probabilité $p(1)^{x_1}$.
- on choisit les numéros des tirages qui vont donner la face 2 : $\dbinom{n-x_1}{x_2}$ choix.
- on impose pour chacun de ces tirages la face 2 : probabilité $p(2)^{x_2}$ choix..... etc...

On obtient au final par indépendance des choix et des tirages : $\mathbb{P}(S_n) = \prod\limits_{k=1}^{6}\dbinom{n-x_1-\cdots-x_{k-1}}{x_k}p(k)^{x_k}$.

Après simplification, on arrive à $\mathbb{P}(S_n) = \dfrac{n!}{\prod\limits_{k=1}^{6}(x_k)!} \times \left(\prod\limits_{k=1}^{6} p(k)^{p(k)}\right)^n$. Si le dé n'est pas pipé, $\forall k \in [\![1;6]\!]$, $p(k) = \dfrac{1}{6}$, donc si $n \equiv 0[6]$, $\mathbb{P}(S_n) = \dfrac{n!}{6^n\prod\limits_{k=1}^{6}(n/6)!}$. Avec STIRLING et après calculs : $\mathbb{P}(S_n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{27\sqrt{2}}{(\pi n)^{\frac{5}{2}}}$.

11.149 On suppose que dans chaque paquet il y a une seule vignette : ce n'est pas précisé par l'énoncé ! On numérote les vignettes de 1 à n et pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note T_k le premier moment où le paquet acheté donne la vignette k. On note T l'instant où la collection sera complète. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on a $(T \leqslant m) = \bigcap\limits_{k=1}^{n}(T_k \leqslant m)$.
Mais les variables aléatoires T_k ne sont pas mutuellement indépendantes. On note t_k le nombres d'achats supplémentaires à effectuer sachant que l'on a exactement $k-1$ vignettes différentes et qu'on en veut une de plus ; par exemple $t_1 = 1$. Quand on veut calculer t_k on a $k-1$ vignettes différentes, la probabilité de ne pas en avoir de nouvelle quand on achète un paquet est donc de $\dfrac{k-1}{n}$ et la probabilité d'avoir la k-ième est de $\dfrac{n-k+1}{n}$. Ainsi t_k suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{n-k+1}{n}$. Or par construction on a $T = \sum\limits_{k=1}^{n} t_k$ donc $\mathbb{E}(T) = \sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{E}(t_k) = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n-k+1}{n} = nH_n$ avec $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.
Par une comparaison série/intégrale classique, on sait que $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ donc $\mathbb{E}(T) \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$; $\mathbb{E}(T)$ est aussi l'argent moyen à dépenser pour avoir toute la collection de vignettes.

11.150 Le rayon d'une série génératrice est supérieur à 1 donc $\forall r \in]0;1[$, $G_X(r) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)r^n$. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{N}) = 1$ donc $1 - G_X(r) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)(1-r^n)$.

Comme toutes ces quantités sont positives, on a clairement $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 - G_X(r) \geqslant \mathbb{P}(X=n)(1-r^n)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \geqslant n) \leqslant \dfrac{1-G_X(r)}{1-r^n}$ car $1 - r^n > 0$. Si $n = 0$, cette inégalité n'a pas de sens.

De plus, s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{P}(X \geqslant n) = \dfrac{1-G_X(r)}{1-r^n}$, on a $1 - G_X(r) = \mathbb{P}(X=n)(1-r^n)$, alors $\forall k \neq n$, $\mathbb{P}(X=k)(1-r^k) = 0 \iff (\mathbb{P}(X=k) = 0$ ou $k = 0)$ car $1 - r^k > 0$ pour $k \geqslant 1$. Il y a donc égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si la variable aléatoire X prend presque sûrement les deux valeurs 0 et n ce qui se traduit par $\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=n) = 1$.

On vérifie le résultat a posteriori : soit $n \geqslant 1$ et $p \in [0;1]$ tels que $\mathbb{P}(X=0)=p$ et $\mathbb{P}(X=n)=1-p$, alors $G_X(r)=p+(1-p)r^n$ donc $\dfrac{1-G_X(r)}{1-r^n}=\dfrac{1-p-(1-p)r^n}{1-r^n}=1-p=\mathbb{P}(X=n)$.

11.151 Par définition : $f(t)=\mathbb{E}(t^X)=\sum\limits_{i=0}^{n}\mathbb{P}(X=i)t^i$. Ainsi $f^{(k)}(t)=\Big(\sum\limits_{i=k}^{n}\mathbb{P}(X=i)t^i\Big)^{(k)}$ (avec abus de notation) donc $f^{(k)}(t)=\sum\limits_{i=k}^{n}\mathbb{P}(X=i)\dfrac{i!}{(i-k)!}t^{i-k}$. Toujours par la formule de transfert, en notant $Q_k=\prod\limits_{p=0}^{k-1}(X-p)$, on a $u_k(X)=\mathbb{E}\big(Q_k(X)\big)=\sum\limits_{i=0}^{n}\mathbb{P}(X=i)Q_k(i)=\sum\limits_{i=k}^{n}\mathbb{P}(X=i)\dfrac{i!}{(i-k)!}$ donc $f^{(k)}(1)=u_k(X)$.

Soit $j \in [\![0;n]\!]$, il vient $A_j=\dfrac{1}{j!}\sum\limits_{k=j}^{n}(-1)^{j-k}\dfrac{u_k(X)}{(k-j)!}=\sum\limits_{k=j}^{n}\dfrac{(-1)^{j-k}}{j!(k-j)!}\Big(\sum\limits_{i=k}^{n}\mathbb{P}(X=i)\dfrac{i!}{(i-k)!}\Big)$ et on inverse cette somme triangulaire : $A_j=\sum\limits_{j\leqslant k\leqslant i\leqslant n}\dfrac{(-1)^{j-k}i!}{(i-k)!j!(k-j)!}\mathbb{P}(X=i)=\sum\limits_{i=j}^{n}\dfrac{i!}{j!(i-j)!}\Big(\sum\limits_{k=j}^{i}\dfrac{(-1)^{j-k}(i-j)!}{(i-k)!(k-j)!}\Big)\mathbb{P}(X=i)$.

On conclut : $A_j=\sum\limits_{i=j}^{n}\dbinom{i}{j}\Big(\sum\limits_{k=j}^{i}(-1)^{j-k}\dbinom{i-j}{k-j}\Big)\mathbb{P}(X=i)=\sum\limits_{i=j}^{n}\dbinom{i}{j}(1-1)^{i-j}\,\mathbb{P}(X=i)=\mathbb{P}(X=j)$ car $(1-1)^{i-j}=0$ si $i>j$ et $(1-1)^0=1$. Ainsi : $\forall j \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}(X=j)=\dfrac{1}{j!}\sum\limits_{k=j}^{n}(-1)^{j-k}\dfrac{u_k(X)}{(k-j)!}$.

11.152 Par hypothèse $\mathbb{P}(T=0)=0$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(T=k)=\mathbb{P}(Y=k-1)=\dfrac{e^{-2}2^{k-1}}{(k-1)!}$.

$p_k=\dfrac{e^{-2}4^k(1+\alpha k)}{(2k)!}\underset{+\infty}{=}o\Big(\dfrac{1}{k^2}\Big)$ quelle que soit la valeur de α donc $\sum\limits_{k\geqslant 0}p_k$ converge.

De plus, comme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}p_k=e^{-2}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{2^{2k}}{(2k)!}+\alpha e^{-2}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{2^{2k-1}}{(2k-1)!}=e^{-2}\mathrm{ch}\,(2)+\alpha e^{-2}\mathrm{sh}\,(2)$ donc (p_k) définit une probabilité si et seulement si $1+\alpha\geqslant 0$ (pour que les p_k soient positifs) et $e^{-2}\mathrm{ch}\,(2)+\alpha e^{-2}\mathrm{sh}\,(2)=1$.
La condition nécessaire et suffisante pour que (p_k) définisse une probabilité est donc $\alpha=1$.

Par définition, on a alors $\mathbb{E}(X)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}k\,\mathbb{P}(X=k)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}kp_k=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{e^{-2}4^k k(1+k)}{(2k)!}$ (la convergence est claire).

On sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$ donc $\forall x>0,\ f(x)=x\mathrm{ch}\,(\sqrt{x})=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{x^{k+1}}{(2k)!}$. Le rayon de convergence de cette série étant $R=+\infty$, on peut dériver deux fois sans problème sur $\mathbb{R}_+^*$: $f''(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{(k+1)kx^{k-1}}{(2k)!}$.
Or $f''(x)=\dfrac{3}{4\sqrt{x}}\mathrm{sh}\,(\sqrt{x})+\dfrac{1}{4}\mathrm{ch}\,(\sqrt{x})$. Donc $\mathbb{E}(X)=4e^{-2}f''(4)=\dfrac{e^{-2}}{2}\big(3\mathrm{sh}\,(2)+2\mathrm{ch}\,(2)\big)=\dfrac{5}{4}-\dfrac{e^{-4}}{4}$.

11.153 Par hypothèse $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=n)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$. Par le théorème du transfert, $f(X)=\dfrac{1}{1+X}$ admet une espérance finie si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 0}f(n)\,\mathbb{P}(X=n)=\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{(n+1)\times n!}$ converge absolument. Or $\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{(n+1)\times n!}\underset{+\infty}{=}o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge d'après Riemann donc $\dfrac{1}{1+X}$ admet une espérance finie et $\mathbb{E}\Big(\dfrac{1}{1+X}\Big)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{(n+1)!}=\dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda}\Big(e^{\lambda}-1\Big)=\dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$.

11.154 Pour $(i,j) \in, \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\mathbb{P}_{X=i}(Y=j)\,\mathbb{P}(X=i)=\dbinom{i}{j}p^j(1-p)^{i-j}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$ par hypothèse.

$\forall j \in \mathbb{N},\ (Y=j)=\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty}(X=i,Y=j)$ qui donne par σ-additivité : $\mathbb{P}(Y=j)=\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=j)$ donc $\mathbb{P}(Y=j)=\sum\limits_{i=j}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=j)$ car $\mathbb{P}(X=i,Y=j)=0$ si $j>i$. Alors $\mathbb{P}(Y=j)=\sum\limits_{i=j}^{+\infty}\dbinom{i}{j}p^j(1-p)^{i-j}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$

d'où $\mathbb{P}(Y=j)=\dfrac{p^je^{-\lambda}\lambda^j}{j!}\sum\limits_{i=j}^{+\infty}\dfrac{(1-p)^{i-j}\lambda^{i-j}}{(i-j)!}$ ce qui prouve que $\mathbb{P}(Y=j)=\dfrac{p^je^{-\lambda}\lambda^j}{j!}e^{(1-p)\lambda}=\dfrac{e^{-(\lambda p)j}(\lambda p)^j}{j!}$.
On en déduit que Y suit une loi de POISSON de paramètre λp.

On a $Z(\Omega)=\mathbb{N}$ car $Y\leqslant X$ par construction. De plus, pour $n\in\mathbb{N}$, $(Z=n)=\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}(X=n+k,Y=k)$ (réunion disjointe) donc, par σ-additivité, on trouve $\mathbb{P}(Z=n)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n+k,Y=k)$ qui permet d'écrire $\mathbb{P}(Z=n)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dbinom{n+k}{k}p^k(1-p)^{n+k-k}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{n+k}}{(n+k)!}=\dfrac{(1-p)^ne^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{p^k\lambda^k}{k!}$ et on reconnaît une série exponentielle : $\mathbb{P}(Z=n)=\dfrac{(1-p)^ne^{-\lambda}\lambda^ne^{\lambda p}}{n!}=\dfrac{e^{-(1-p)\lambda}}{((1-p)\lambda)^n}n!$ donc Z suit la loi de POISSON $\mathcal{P}(\lambda(1-p))$.

Comme $\mathbb{P}(X=1,Y=0)=0\neq\mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=0)$, X et Y ne sont pas indépendantes.
Par contre, les variables Z et Y le sont car $\mathbb{P}(Z=i,Y=j)=\mathbb{P}(X=i+j,Y=j)=\dbinom{i+j}{j}p^j(1-p)^i\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{i+j}}{(i+j)!}$ (voir ci-dessus) qui se simplifie en $\mathbb{P}(Z=i,Y=j)=p^j(1-p)^i\dfrac{e^{-\lambda p}e^{-\lambda(1-p)}\lambda^i\lambda^j}{i!j!}$ et on a par ailleurs le calcul $\mathbb{P}(Z=i)\,\mathbb{P}(Y=j)=\dfrac{e^{-(1-p)\lambda}((1-p)\lambda)^i}{i!}\times\dfrac{e^{-(\lambda p)j}(\lambda p)^j}{j!}=\mathbb{P}(Z=i,Y=j)$.

11.155 Par définition $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}\Big(\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\big(Y-\mathbb{E}(Y)\big)\Big)$ ce qui donne ici $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}((X-p)(Y-q))$ or le couple (X,Y) ne peut prendre que 4 valeurs, la covariance $\mathrm{Cov}(X,Y)$ vaut donc

$pq\,\mathbb{P}(X=0,Y=0)-(1-p)q\,\mathbb{P}(X=1,Y=0)-p(1-q)\,\mathbb{P}(X=0,Y=1)+(1-p)(1-q)\,\mathbb{P}(X=1,Y=1)$.

Mais on a aussi la formule $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(XY)-pq$. Or la variable aléatoire XY ne prend que les valeurs 0 ou 1 donc $\mathrm{Cov}(XY)=1.\mathbb{P}(X=1,Y=1)-pq$. Comme par hypothèse $\mathbb{P}(X=1)=p$ et $\mathbb{P}(Y=1)=q$, on a bien la première des quatre relations voulues : $\mathbb{P}(X=1,Y=1)=\mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=1)$.

• Comme X ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, on a $(X=0,Y=1)\cup(X=1,Y=1)=(Y=1)$ (réunion disjointe) ce qui implique en matière de probabilité : $\mathbb{P}(X=0,Y=1)+\mathbb{P}(X=1,Y=1)=\mathbb{P}(Y=1)$. Ainsi $\mathbb{P}(X=0,Y=1)=q-pq=(1-p)q=\mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=1)$.

• Comme Y aussi ne prend que les valeurs 0 et 1, $(X=1,Y=0)\cup(X=1,Y=1)=(X=1)$ d'où $\mathbb{P}(X=1,Y=0)+\mathbb{P}(X=1,Y=1)=\mathbb{P}(X=1)\iff\mathbb{P}(X=1,Y=0)=p-pq=p(1-q)=\mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=0)$.

• Enfin $(X=0,Y=0)\cup(X=1,Y=0)=(Y=0)\Longrightarrow P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)=\mathbb{P}(Y=0)$ et on a la dernière : $\mathbb{P}(X=0,Y=0)=1-q-p(1-q)=(1-p)(1-q)=\mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0)$.

On a donc $\forall(i,j)\in[\![0;1]\!]^2=(X,Y)(\Omega)$, $\mathbb{P}(X=i,Y=j)=\mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j)$ ce qui est la définition de l'indépendance des variables aléatoires X et Y.

11.156 Ici $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}$. $X+1$ et $Y+1$ suivent des lois géométriques de paramètre p. Si $p=1$, X et Y sont presque sûrement égale à 0 et ça n'a que très peu d'intérêt : on supposera par la suite que $p\in]0;1[$.

• Soit $k\in\mathbb{N}$, comme $(U=V=k)=(X=k)\cap(Y=k)$, $\mathbb{P}(U=V=k)=\mathbb{P}(X=Y=k)=\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=k)$ par indépendance de X et Y donc $\mathbb{P}(U=V=k)=p^2(1-p)^{2k}$.

• Si $(i,j)\in\mathbb{N}^2$ avec $i<j$, on a $\mathbb{P}(U=j,V=i)=\mathbb{P}(X=i,Y=j)+\mathbb{P}(X=j,Y=i)=2\,\mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j)$ car $(U=j,V=i)=(X=i,Y=j)\cup(X=j,Y=i)$ (réunion disjointe) et par indépendance de X et Y.

Ainsi, si $i<j$, nous avons $\mathbb{P}(U=j,V=i)=2p^2(1-p)^{i+j}$.
On peut réunir tous les cas : $\forall(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(U=j,V=i)=(\delta_{i\leqslant j}+\delta_{i<j})p^2(1-p)^{i+j}$.

• Pour $i \in \mathbb{N}$, $(V = i) = \displaystyle\bigcup_{j=i}^{+\infty}(U = j, V = i)$ (réunion disjointe) donc, par σ-additivité, on obtient la relation $\mathbb{P}(V = i) = \displaystyle\sum_{j=i}^{+\infty} \mathbb{P}(U = j, V = i) = p^2(1-p)^{2i} + 2\sum_{j=i+1}^{+\infty} p^2(1-p)^{i+j}$ qui devient après factorisation $\mathbb{P}(V = i) = p^2(1-p)^{2i} + 2p^2(1-p)^{2i+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^k = p^2(1-p)^{2i} + \frac{2p^2(1-p)^{2i+1}}{1-(1-p)}$ et enfin après simplification $\mathbb{P}(V = i) = p^2(1-p)^{2i} + 2p(1-p)^{2i+1} = p(1-p)^{2i}[p + 2(1-p)] = p(2-p)(1-p)^{2i}$.
$V + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $p(2-p)$ car $(1-p)^2 = 1 - p(2-p)$.

• Pour $j \in \mathbb{N}$, $(U = j) = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{j}(U = j, V = i)$ (réunion disjointe) donc, par σ-additivité, on obtient la relation $\mathbb{P}(U = j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \mathbb{P}(U = j, V = i) = p^2(1-p)^{2j} + 2\sum_{i=0}^{j-1} p^2(1-p)^{i+j} = p^2(1-p)^{2j} + 2p^2(1-p)^j\sum_{i=0}^{j-1}(1-p)^i$, après factorisation $\mathbb{P}(U = j) = p^2(1-p)^{2j} + 2p^2(1-p)^j\dfrac{1-(1-p)^j}{1-(1-p)} = p^2(1-p)^{2j} + 2p(1-p)^j(1-(1-p)^j)$ et après simplification $\mathbb{P}(U = j) = p(1-p)^j[p(1-p)^j + 2(1-(1-p)^j)] = p(1-p)^j[2-(2-p)(1-p)^j]$.
Comme $\mathbb{P}(U = 0, V = 1) = 0 \neq \mathbb{P}(U = 0)\,\mathbb{P}(V = 1)$ car $V \leqslant U$, U et V ne sont pas indépendantes.
$S = U + V = X + Y$ donc, comme X et Y admettent des espérances finies $\mathbb{E}(X+1) = \mathbb{E}(Y+1) = \dfrac{1}{p}$ (loi géométrique), $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \dfrac{1-p}{p}$. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \dfrac{2(1-p)}{p}$.

De plus, pour $k \in \mathbb{N}$, on a $(S = k) = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{k}(X = i, Y = k-i)$ (réunion disjointe) donc, par σ-additivité et indépendance de X et Y : $\mathbb{P}(S = k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Y = k-i) = \sum_{i=0}^{k} p(1-p)^i p(1-p)^{k-i} = (k+1)p^2(1-p)^k$.

11.157 Si $\phi : [c;d] \to \mathbb{R}$ est continue, de classe C^2 sur $]c;d[$, et vérifie $\phi(c) = \phi(d) = 0$ et $\phi'' > 0$ (par exemple), alors ϕ' est strictement croissante sur $]c;d[$, or ϕ' s'annule sur $]c;d[$ d'après le théorème de Rolle car $\phi(c) = \phi(d)$ donc il existe $e \in]c;d[$ tel que ϕ' soit négative sur $]c;e[$ et positive sur $]e;d[$: ϕ est croissante sur $]c;e[$ et décroissante sur $]e;d[$ donc elle reste positive sur $[c;d]$ car elle est continue sur $[c;d]$ et vaut 0 en c et en d.
On pose $\phi : y \mapsto e^{sy} - \dfrac{c-y}{c-d}e^{sd} - \dfrac{y-d}{c-d}e^{sc}$, cette fonction est de classe C^2 sur $[c;d]$, elle vaut 0 en c et en d et sa dérivée seconde vaut $\phi''(y) = s^2e^{sy} \geqslant 0$. Le résultat précédent nous montre que ϕ est négative sur $[c;d]$, ainsi : $\forall y \in [c;d]$, $e^{sy} \leqslant \dfrac{c-y}{c-d}e^{sd} + \dfrac{y-d}{c-d}e^{sc}$.
$\mathbb{E}(e^{sY}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{sy_k}\,\mathbb{P}(Y = y_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{c-y_k}{c-d}e^{sd} + \frac{y_k-d}{c-d}e^{sc}\right)\mathbb{P}(Y = y_k)$ d'après l'inégalité précédente et car $\mathbb{P}(Y = y_k) \geqslant 0$ si on prend $Y(\Omega) = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [c;d]$ (fini ou dénombrable). On obtient donc, puisque $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = y_k) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} y_k\,\mathbb{P}(Y = y_k) = \mathbb{E}(Y) = 0$, l'inégalité $\mathbb{E}(e^{sY}) \leqslant \dfrac{c}{c-d}e^{sd} + \dfrac{-d}{c-d}e^{sc}$ donc $\ln\left(\mathbb{E}(e^{sY})\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{c}{c-d}e^{sd} + \dfrac{-d}{c-d}e^{sc}\right)$ car $\ln$ est croissante.
Ainsi $\ln\left(\mathbb{E}(e^{sY})\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{c}{-d}e^{sd} + \dfrac{y-d}{c-d}e^{sc}\right) \leqslant \dfrac{s^2(d-c)^2}{8}$, d'où $\mathbb{E}(e^{sY}) \leqslant e^{\frac{s^2(d-c)^2}{8}}$ car $\exp$ est croissante.
Puisque $\exp$ est strictement croissante et $s > 0$, $(S - \mathbb{E}(S) \geqslant t) = (e^{s(X-\mathbb{E}(X))} \geqslant e^{st})$ donc, comme $e^{s(X-\mathbb{E}(X))}$ est positive, par l'inégalité de Markov : $\mathbb{P}(S - \mathbb{E}(S) \geqslant t) = \mathbb{P}(e^{s(X-\mathbb{E}(X))} \geqslant e^{st}) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(e^{s(S-\mathbb{E}(S))})}{e^{st}}$. Or on a aussi $e^{s(S-\mathbb{E}(S))} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} e^{s(X_k-\mathbb{E}(X_k))}$ et les $e^{s(X_k-\mathbb{E}(X_k))}$ sont mutuellement indépendantes par hypothèse,

ainsi $\mathbb{E}(e^{s(S-\mathbb{E}(S))}) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e^{s(X_k-\mathbb{E}(X_k))})$ ce qui donne bien $\mathbb{P}(S - \mathbb{E}(S) \geqslant t) \leqslant e^{-st} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e^{s(X_k-\mathbb{E}(X_k))})$.
En prenant $Y = X_k - \mathbb{E}(X_k)$ d'espérance nulle et qui prend ses valeurs dans le segment $[c; d]$ où $c = a - \mathbb{E}(X_k)$ et $d = b - \mathbb{E}(X_k)$, on a par l'inégalité précédente $\mathbb{E}(e^{s(X_k-\mathbb{E}(X_k))}) \leqslant e^{\frac{s^2(d-c)^2}{8}} = e^{\frac{s^2(b-a)^2}{8}}$. Grâce à ce qui précède, $\mathbb{P}(S - \mathbb{E}(S) \geqslant t) \leqslant e^{-st} \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e^{s(X_k-\mathbb{E}(X_k))}) \leqslant e^{-st}\left(e^{\frac{s^2(b-a)^2}{8}}\right)^n = e^{-st+n\frac{s^2(b-a)^2}{8}}$.

Le graphe de l'application $\theta : s \mapsto -st + n\dfrac{s^2(b-a)^2}{8}$ est une parabole qui atteint son minimum en s_0 tel que $\theta'(s_0) = 0 \iff s_0 = \dfrac{4t}{n(b-a)^2}$. Ainsi $\mathbb{P}(S - \mathbb{E}(S) \geqslant t) \leqslant e^{\theta(s_0)} = e^{-s_0t+n\frac{s_0^2(b-a)^2}{8}} = e^{\frac{-2t^2}{n(b-a)^2}}$.

11.158 **a.** On constate que $X + Y = Z$. Ainsi, $(k, l) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}(X = k, Y = l) = \mathbb{P}(X = k, Z = k + l)$.

Si $r_{k+l} = 0$, $(Z = k+l)$ est négligeable, $(X = k, Z = k+l)$ aussi : $\mathbb{P}(X = k, Y = l) = r_{k+l}\dbinom{k+l}{k}p^k(1-p)^l = 0$.
Si $r_{k+l} > 0$, $\mathbb{P}(X = k, Z = k + l) = \mathbb{P}_{(Z=k+l)}(X = k)\,\mathbb{P}(Z = k + l)$. Or la loi conditionnelle de X sachant $Z = k + l$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(k + l, p)$ donc $\mathbb{P}_{Z=k+l}(X = k) = \dbinom{k+l}{k}p^k(1-p)^{l+k-k}$.

On conclut, et ceci dans tous les cas : $\mathbb{P}(X = k, Y = l) = r_{k+l}\dbinom{k+l}{k}p^k(1-p)^l$.

On sait que $(X = k) = \bigcup_{l=0}^{+\infty}(X = k, Y = l)$. Ces évènements étant incompatibles deux à deux, on trouve par σ-additivité : $\mathbb{P}(X = k) = \sum_{l=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = l) = p_k = \sum_{l=0}^{+\infty} r_{k+l}\dbinom{k+l}{k}p^k(1-p)^l$.
Par symétrie : $\mathbb{P}(Y = l) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = l) = q_l = \sum_{k=0}^{+\infty} r_{k+l}\dbinom{k+l}{k}p^k(1-p)^l$.

Si Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors $\mathbb{P}(X = k) = \sum_{l=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k+l}}{(k+l)!}\dbinom{k+l}{k}p^k(1-p)^l$ d'où $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{p^k e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\sum_{l=0}^{+\infty}\dfrac{(\lambda(1-p))^l}{l!} = \dfrac{(p\lambda)^k e^{-\lambda}}{k!}e^{\lambda(1-p)} = \dfrac{(p\lambda)^k e^{-\lambda p}}{k!}$ et X suit la loi de Poisson de paramètre λp. De même $\mathbb{P}(Y = l) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k+l}}{(k+l)!}\dbinom{k+l}{k}p^k(1-p)^l = \dfrac{((1-p)\lambda)^l e^{-\lambda(1-p)}}{l!}$ et Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$. Ainsi les variables aléatoires X et Y sont indépendantes car elles vérifient $\mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = l) = \dfrac{(p\lambda)^k e^{-\lambda p}}{k!}\dfrac{((1-p)\lambda)^l e^{-\lambda(1-p)}}{l!} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{k+l}}{(k+l)!}\dbinom{k+l}{k}p^k(1-p)^l = \mathbb{P}(X = k, Y = l)$.
On écrit $(Z = n) = \bigcup_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}^2\\ k+l=n}} (X = k, Y = l)$. C'est la réunion dénombrable d'évènements incompatibles deux à deux donc $r_n = \mathbb{P}(Z = n) = \sum_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}^2\\ k+l=n}} (X = k, Y = l) = \sum_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}^2\\ k+l=n}} \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = l) = \sum_{\substack{(k,l)\in\mathbb{N}^2\\ k+l=n}} p_k q_l$.

Comme Z est non presque sûrement nulle, il existe $s \geqslant 1$ tel que $r_s > 0$. Ainsi $p_0 = \sum_{l=0}^{+\infty} r_l\dbinom{l}{0}p^0(1-p)^l > 0$ et $p_1 = \sum_{l=0}^{+\infty} r_{l+1}\dbinom{l+1}{1}p(1-p)^l > 0$. De même $q_0 > 0$ et $q_1 > 0$.

D'après ce qui précède, on a les relations $\mathbb{P}(X = k+1, Y = l) = r_{k+l+1}\dbinom{k+l+1}{k+1}p^{k+1}(1-p)^l = p_{k+1}q_l$ et $\mathbb{P}(X = k, Y = l+1) = r_{k+l+1}\dbinom{k+l+1}{k}p^k(1-p)^{l+1} = p_k q_{l+1}$.
- Si $r_{k+l+1} = 0$, on a $p_k q_{l+1} = p_{k+1}q_l = 0$ donc $p_k q_{l+1}(l+1)p = p_{k+1}q_l(k+1)p = 0$.

• Si $r_{k+l+1} > 0$, on fait le rapport de ces deux relations pour avoir $\dfrac{r_{k+l+1}\dbinom{k+l+1}{k+1}p^{k+1}(1-p)^l}{r_{k+l+1}\dbinom{k+l+1}{k}p^k(1-p)^{l+1}} = \dfrac{p_{k+1}q_l}{p_kq_{l+1}}$

donc $\dfrac{p_{k+1}q_l}{p_kq_{l+1}} = \dfrac{(k+l+1)!k!(l+1)!p^{k+1}(1-p)^l}{(k+1)!l!(k+l+1)!p^k(1-p)^{l+1}} = \dfrac{(l+1)p}{(k+1)(1-p)}$.

Dans les deux cas, $p_kq_{l+1}(l+1)p = p_{k+1}q_l(k+1)(1-p)$.

On prend $k = 0$ dans l'équation de la question précédente et il vient $p_0q_{l+1}(l+1)p = p_1q_l(1-p)$ d'où $q_{l+1} = b\dfrac{q_l}{l+1}$ en notant $b = \dfrac{p_1(1-p)}{p_0p}$. Par une récurrence facile, on montre que $\forall l \in \mathbb{N},\ q_l = \dfrac{b^l}{l!}q_0$.

De même, on trouve que $\forall k \in \mathbb{N},\ p_k = \dfrac{a^k}{k!}p_0$ où $a = \dfrac{q_1p}{q_0(1-p)}$.

Comme $\sum\limits_{l=0}^{+\infty} q_l = 1$ et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$, on en déduit que $q_0 = e^{-b}$ et que $p_0 = e^{-a}$. Alors, par définition, Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(b)$ et X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(a)$.

En conclusion de cet exercice, si Z est une variable aléatoire non presque sûrement nulle à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $X = \sum\limits_{i=1}^{Z} U_i$ et $Y = \sum\limits_{i=1}^{Z}(1-U_i)$, alors : Z suit une loi de Poisson si et seulement si X et Y sont indépendantes.

11.159 rang $(U^tU) \leqslant \mathrm{Min}(\text{rang}\,(U), \text{rang}\,({}^tU)) \leqslant 1$ car U est une matrice colonne et on a aussi $M = 0 \Longleftrightarrow U = 0$ car $\mathrm{Tr}\ (M) = \mathrm{Tr}\ (U^tU) = ||U||^2$. Ainsi rang $(M) \in \{0,1\}$ et rang $(M) = 0 \Longleftrightarrow U = 0$.

Comme $(U = 0) = \bigcup\limits_{k=1}^{n}(X_k = 0)$ et que les variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, on a :

$\mathbb{P}(\text{rang}\,(M) = 0) = \mathbb{P}(U = 0) = \prod\limits_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k = 0) = (1-p)^n$. De plus $\mathbb{P}(\text{rang}\,(M) = 1) = 1-(1-p)^n$.

Ainsi, rang (M) suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(q)$ de paramètre $q = 1-(1-p)^n$.

Comme $\mathrm{Tr}\ (M) = X_1^2 + \cdots + X_n^2 = X_1 + \cdots + X_n$, $\mathrm{Tr}\ (M)$ est la somme de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On sait d'après le cours que $\mathrm{Tr}\ (M)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de sorte que $\forall k \in [\![0;n]\!],\ \mathbb{P}(\mathrm{Tr}\ (M) = k) = \dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Classiquement, $M^2 = U^tUU^tU = U({}^tUU){}^tU = ||U||^2M$ et $||U||^2 = \mathrm{Tr}\ ({}^tUU) = \mathrm{Tr}\ (U^tU) = \mathrm{Tr}\ (M)$ donc $M^2 = \mathrm{Tr}\ (M)M$. On en déduit que $(M^2 = M) = (\mathrm{Tr}\ (M) = 1) \cup (M = 0)$ (évènements incompatibles) donc $\mathbb{P}(M^2 = M) = \mathbb{P}(\mathrm{Tr}\ (M) = 1) + \mathbb{P}(M = 0)$ mais $\mathbb{P}(\mathrm{Tr}\ (M) = 1) = \dbinom{n}{1}p(1-p)^{n-1}$ ainsi la probabilité que M soit une matrice de projection est $\mathbb{P}(M^2 = M) = np(1-p)^{n-1} + (1-p)^n$.

Par le calcul matriciel, $S = {}^tVMV = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} X_iX_j = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k + 2\sum\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant n} X_iX_j$. Par linéarité de l'espérance et comme X_i et X_j sont indépendants si $i \neq j$, on a $\mathbb{E}(S) = np + (n^2-n)p^2$.

On aurait aussi pu constater que $S = {}^tU^tUV = {}^tXX = X^2$ en posant $X = {}^tUV = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, alors X étant la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ donc $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = np(1-p) + (np)^2 = np + (n^2-n)p^2$.

De plus $\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}(S^2) - \mathbb{E}(S)^2 = \mathbb{E}(X^4) - (np + (n^2 - np^2)^2$. Or, par le théorème de transfert, il vient $\mathbb{E}(X^4) = \sum\limits_{k=0}^{n} k^4\dbinom{n}{k}$ et on écrit $k^4 = k(k-1)(k-2)(k-3) + 6k(k-1)(k-2) + 7k(k-1) + k$ pour avoir $\sum\limits_{k=0}^{n} k^4\dbinom{n}{k} = 24\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{k}{4}\dbinom{n}{k} + 36\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{k}{3}\dbinom{n}{k} + 14\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{k}{2}\dbinom{n}{k} + \sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{k}{1}\dbinom{n}{k}$ et on utilise la relation $\dbinom{n}{k}\dbinom{k}{p} = \dfrac{n!}{(n-k)!(k-p)!p!} = \dfrac{n!(n-p)!}{(n-p)!p!(n-k)!(k-p)!} = \dbinom{n}{p}\dbinom{n-p}{k-p}$ pour simplifier ceci en

$\sum_{k=0}^{n} k^4\binom{n}{k} = 24\sum_{k=4}^{n}\binom{n}{4}\binom{n-4}{k-4} + 36\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{3}\binom{n-3}{k-3} + 14\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}$.

Ainsi : $\sum_{k=0}^{n} k^4\binom{n}{k} = 24\binom{n}{4}2^{n-4} + 36\binom{n}{3}2^{n-3} + 14\binom{n}{2}2^{n-2} + \binom{n}{1}2^{n-1}$ et on en déduit $\mathbb{V}(S)$.

11.160 Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, par construction $Z(\Omega) = T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors $(Z > k) = (X > k) \cap (Y > k)$ or $(X > k)$ et $(Y > k)$ sont des évènements puisque X et Y sont des variables aléatoires donc, par intersection, $(Z > k)$ est un évènement pour tout k. De même, $(T \leqslant k) = (X \leqslant k) \cap (Y \leqslant k)$ donc $(T \leqslant k)$ est un évènement.

Ainsi, $(Z = k) = (Z > k-1) \setminus (Z > k)$ est un évènement (stabilité par intersection et complémentaire). De même, $(T = k) = (T \leqslant k) \setminus (T \leqslant k-1)$ est un évènement. Au final, Z et T sont des variables aléatoires.

D'abord, $1 \leqslant Z \leqslant X$ et $1 \leqslant T \leqslant X + Y$ donc, par comparaison, Z et T admettent des espérances finies.

Or $(X \leqslant k) = \bigcup_{i=1}^{k}(X = i)$ (réunion disjointe) donc $\mathbb{P}(X \leqslant k) = \sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{k} p(1-p)^{i-1} = p\dfrac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)}$ d'où $\mathbb{P}(X \leqslant k) = 1-(1-p)^k$. De même, on a $\mathbb{P}(Y \leqslant k) = 1-(1-q)^k$ donc $\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$ et $\mathbb{P}(Y > k) = (1-q)^k$. Par indépendance de X et Y, on a $\mathbb{P}(Z > k) = \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(Y > k) = (1-p)^k(1-q)^k$ et $\mathbb{P}(T \leqslant k) = \mathbb{P}(X \leqslant k)\mathbb{P}(Y \leqslant k) = 1-(1-p)^k-(1-q)^k+(1-p)^k(1-q)^k$.

On sait que Z admet une espérance finie si et seulement si $\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}(Z > k)$ converge et que dans ce cas on a : $\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Z > k)$. Il vient $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{1-(1-p)(1-q)} = \dfrac{1}{p+q-pq}$ car $0 < 1-p < 1$ et $0 < 1-q < 1$ donc les séries géométriques convergent. Comme $\mathbb{P}(T > k) = 1-\mathbb{P}(T \leqslant k) = (1-p)^k+(1-q)^k-((1-p)(1-q))^k$, on a aussi $\mathbb{E}(T) = \dfrac{1}{1-(1-p)} + \dfrac{1}{1-(1-q)} - \dfrac{1}{1-(1-p)(1-q)} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p+q-pq}$.

Puisque $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z > k-1) - \mathbb{P}(Z > k) = (1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1} - (1-p)^k(1-q)^k$, il vient en factorisant $\mathbb{P}(Z = k) = (1-(1-p)(1-q))(1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}$ donc on constate que Z suit la loi géométrique de paramètre $r = 1-(1-p)(1-q) = p+q-pq$ donc $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{p+q-pq}$.

On en déduit aussi que si $x \in \left]-\dfrac{1}{p+q-pq};\dfrac{1}{p+q-pq}\right[$, $G_Z(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Z = k)x^k = \dfrac{(p+q-pq)x}{1-(1-p)(1-q)x}$.

De même, si $x \in]1;1[$ au moins, on a $G_T(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(T = k)x^k = 1-(x-1)\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(T > k)x^k$ qui se calcule : $G_T(x) = 1-(x-1)\Big(\dfrac{1}{1-(1-p)x} + \dfrac{1}{1-(1-q)x} - \dfrac{1}{1-(1-p)(1-q)x}\Big)$. Les espérances de Z et T existent si et seulement si G_Z et G_T sont dérivables en 1 et dans ce cas : $\mathbb{E}(Z) = G'_Z(1)$ et $\mathbb{E}(T) = G'_T(1)$. On vérifie $G'_Z(x) = \dfrac{(p+q-pq)(1-(1-p)(1-q)x)+(1-p)(1-q)(p+q-pq)x}{(1-(1-p)(1-q)x)^2}$ donc $G'_Z(1) = \dfrac{p+q-pq}{(p+q-pq)^2}$ OK !

11.161 On vérifie la cohérence de la définition : comme $\dfrac{1}{2^0} = 1$, l'énoncé impose visiblement $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et on a bien $\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1/2}{1-(1/2)} = 1$. Si on note V l'évènement "le joueur gagne", alors on a par définition $V = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(N = 2n)$ (réunion disjointe) donc $\mathbb{P}(V) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{2n}} = \dfrac{1/4}{1-(1/4)} = \dfrac{1}{3}$.

Par définition $G = (-1)^N N$ donc, par le théorème de transfert : $\mathbb{E}(G) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n} = \dfrac{-(1/2)}{1+(1/2)} = -\dfrac{1}{3}$.

11.162 Posons $m_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i$ et $M_n = \dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ de sorte que $\mathbb{E}(M_n) = m_n$ par linéarité. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\forall\alpha > 0$, $\mathbb{P}\Big(|M_n-\mathbb{E}(M_n)| > \alpha\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(M_n)}{\alpha^2}$. Les X_k étant indépendantes, $\mathbb{V}(M_n) = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}p_k(1-p_k) \leqslant \dfrac{1}{n}$. Ainsi, $\forall\alpha > 0$, $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\Big(|M_n-\mathbb{E}(M_n)| > \alpha\Big) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ |m_n - p| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. $(|M_n - p| > \varepsilon) \subset \Big(|M_n - m_n| > \frac{\varepsilon}{2}\Big)$ car si $|M_n - p| > \varepsilon$, on a $\varepsilon < |M_n - p| = |M_n - p + p - m_n| \leqslant |M_n - p| + |m_n - p| \leqslant |M_n - p| + \frac{\varepsilon}{2}$ donc $|M_n - m_n| > \frac{\varepsilon}{2}$.
Ainsi $\mathbb{P}(|M_n - p| > \varepsilon) \leqslant P\Big(|M_n - m_n| > \frac{\varepsilon}{2}\Big) \to 0$ d'après ce qui précède : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|M_n - p| > \varepsilon) = 0$.

11.163 Par le théorème du transfert, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2+1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n^2+1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$. Or $n^2+1 = n(n-1)+n+1$ donc $\mathbb{E}(Y) = e^{-\lambda}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n(n-1)+n+1)\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\Big(\lambda^2\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} + \lambda\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\Big)$ (car $n(n-1)$ est nul pour $n=0$ et $n=1$ par exemple) qui se réduit à $\mathbb{E}(Y) = e^{-\lambda}(\lambda^2+\lambda+1)e^{\lambda} = \lambda^2+\lambda+1$. Ou alors $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(1) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 + 1 = \lambda + \lambda^2 + 1$ d'après le cours et par linéarité de l'espérance.
Comme $(2X < Y) = (X^2+1-2X > 0) = ((X-1)^2 > 0) = (X \neq 1)$, on a $\mathbb{P}(2X < Y) = 1 - \mathbb{P}(X=1) = 1 - \lambda e^{-\lambda}$.
De même, $(X \text{ pair}) = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}(X = 2n)$ (réunion disjointe) donc $\mathbb{P}(X \text{ pair}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2n}}{(2n)!} = e^{-\lambda}\mathrm{ch}\,(\lambda)$ qu'on transforme en $\mathbb{P}(X \text{ pair}) = \frac{1}{2} + \frac{e^{-2\lambda}}{2} < \frac{1}{2}$: il y a donc plus de chance que X soit pair qu'impair.

11.164 Par construction, N suit une loi géométrique. Lors d'un lancer de deux dés (de façon indépendante), la probabilité d'obtenir un 6 est de $\frac{11}{36}$ puisque sur les 36 configurations $(i,j) \in [\![1;6]\!]^2$ possibles, seules $(1,6),\cdots,(5,6),(6,6),(6,5),\cdots,(6,1)$ amènent au moins un 6. Ainsi, N suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{11}{36}$ de sorte que $\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}(N=k) = (1-p)^{k-1}p = \left(\frac{25}{36}\right)^{k-1}\frac{11}{36}$.

11.165 On sait que $N(\Omega) = \mathbb{N}$ par définition de la loi de Poisson donc $K(\Omega) = \mathbb{N}$ aussi. D'après l'énoncé, la loi de K sachant $(N=n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ car on a indépendance mutuelle entre les œufs et que l'éclosion de chacun d'entre eux suit un schéma de Bernoulli de paramètre p : $\mathbb{P}(K=k|N=n) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.
Il suffit alors d'écrire que, pour $k \in \mathbb{N}$, on a $(K=k) = \bigcup\limits_{n=k}^{+\infty}(K=k, N=n)$ (incompatibles), ce qui justifie que $\mathbb{P}(K=k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty}\mathbb{P}(K=k|N=n)\,\mathbb{P}(N=n) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$. Bien sûr, on pouvait aussi invoquer la formule des probabilités totales sachant que $((N=n))_{n\in\mathbb{N}}$ et un système complet d'évènements donc $\mathbb{P}(K=k) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(K=k|N=n)\,\mathbb{P}(N=n)$ et que $\mathbb{P}(K=k|N=n) = 0$ si $k \in [\![0;n-1]\!]$, ce qui donne bien le même résultat. Ainsi, $\mathbb{P}(K=k) = \frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!}\sum\limits_{n=k}^{+\infty}(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda}p^k\lambda^k}{k!}e^{(1-p)\lambda}$ en reconnaissant une série exponentielle aux indices décalés. Par conséquent $\mathbb{P}(X=k) = \frac{e^{-p\lambda}(\lambda p)^k}{k!}$ donc K suit la loi de Poisson de paramètre λp.

11.166 Notons $X_k = 0$ si le dé A est inférieur au dé B au tirage k et $X_k = 1$ sinon. Alors $X = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et les X_k sont mutuellement indépendants par indépendance des lancers. Comme les X_k suivent des lois de Bernoulli de paramètre $p = \frac{15}{36}$ (avec une probabilité $\frac{1}{6}$ les deux dès donnent la même face, et on partage le reste en deux), X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Ainsi $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$ d'après le cours.
Pour une variable aléatoire X admettant une variance finie et $\varepsilon > 0$: $\mathbb{P}\Big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$ (inégalité de Bienaymé-Tchebychev). Par conséquent, comme $\mathbb{E}(X) > 0$, en notant $\varepsilon = 0,1\,\mathbb{E}(X)$, on peut transformer $p_n = \mathbb{P}\left(0,9 < \frac{X}{\mathbb{E}(X)} < 1,1\right) = \mathbb{P}(-0,1 \times \mathbb{E}(X) < X - \mathbb{E}(X) < 0,1 \times \mathbb{E}(X)) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < \varepsilon)$ donc, avec

BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV : $p_n = 1 - \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \dfrac{100\,\mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X)^2} = 1 - \dfrac{100np(1-p)}{n^2p^2} = 1 - \dfrac{140}{n}$. Ainsi $p_n \geqslant 0,99$ dès que $\dfrac{140}{n} \leqslant \dfrac{1}{100} \iff n \geqslant 14000$.

11.167 On note V_i l'indicatrice de l'évènement B_i : "le i-ème chasseur est visé". Alors par définition $V = \sum\limits_{i=1}^{c} V_i$ donc, par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(V) = \sum\limits_{i=1}^{c} \mathbb{E}(V_i)$. Or $\overline{B_i} = \bigcap\limits_{j=1}^{l} I_{i,j}$ où $I_{i,j}$ est l'évènement : "le lapin j ne vise pas le chasseur i" (I pour ignoré). Comme les choix des lapins sont supposés indépendants, les $I_{i,j}$ sont mutuellement indépendants donc $1 - \mathbb{P}(B_i) = \prod\limits_{j=1}^{l} \mathbb{P}(I_{i,j})$ mais $\mathbb{P}(I_{i,j}) = \dfrac{c-1}{c}$ (tous les chasseurs sauf 1 de manière équiprobable en supposant qu'un lapin ne vise qu'un seul chasseur) donc $1 - \mathbb{P}(B_i) = \dfrac{(c-1)^l}{c^l}$. Ainsi V_i suit la loi de BERNOULLI de paramètre $q = \dfrac{c^l - (c-1)^l}{c^l}$ donc $\mathbb{E}(V_i) = q$ et d'où $\mathbb{E}(V) = c.\dfrac{c^l - (c-1)^l}{c^l}$.

On recommence : $\overline{C_i} = \bigcap\limits_{j=1}^{l} L_{i,j}$ où $L_{i,j}$ est l'évènement : "le lapin j ne touche pas le chasseur i". Comme les choix des lapins sont indépendants, les $L_{i,j}$ le sont aussi donc $1 - \mathbb{P}(C_i) = \prod\limits_{j=1}^{l} \mathbb{P}(L_{i,j})$. Or $L_{i,j} = R_{i,j} \cup I_{i,j}$ (incompatibles) où $R_{i,j}$: "le lapin j vise le chasseur j mais le rate" (R pour raté) et $I_{i,j}$: "le lapin j ne vise même pas le chasseur j" (I pour ignoré). Ainsi, $\mathbb{P}(L_{i,j}) = \mathbb{P}(R_{i,j}) + \mathbb{P}(I_{i,j})$ or $\mathbb{P}(I_{i,j}) = \dfrac{c-1}{c}$ (comme avant) et $\mathbb{P}(R_{i,j}) = \mathbb{P}(\overline{I_{i,j}} \cap \overline{L_{i,j}}) = \mathbb{P}_{\overline{I_{i,j}}}(\overline{L_{i,j}}) \times \mathbb{P}(\overline{I_{i,j}}) = \dfrac{1-p}{c}$.

Ainsi $\mathbb{P}(L_{i,j}) = \dfrac{1-p}{c} + \dfrac{c-1}{c} = \dfrac{c-p}{c}$. Donc $\mathbb{P}(C_i) = \dfrac{c^l - (c-p)^l}{c^l}$.

11.168 On peut choisir $\Omega = \mathcal{P}([\![1;n]\!])$ comme univers sur lequel l'énoncé nous dit de prendre la probabilité uniforme. Détermine la loi de S est très compliqué. On peut néanmoins calculer $\mathbb{E}(S)$ en faisant intervenir les variables aléatoires X_i, pour $i \in [\![1;n]\!]$, définie par $X_i(\omega) = 1$ si $i \in \omega$ et $X_i(\omega) = 0$ sinon. Par définition, $S = \sum\limits_{i=1}^{n} iX_i$. $(X_i = 1) = (\omega \in \Omega \mid i \in \omega\}$ donc $\text{card}\,(X_i = 1) = \mathcal{P}([\![1;n]\!] \setminus \{i\}) = 2^{n-1}$ (i est dans la partie (pas de choix) et on choisit si les autres y sont ou pas) donc $\mathbb{P}(X_i = 1) = \dfrac{2^{n-1}}{2^n} = \dfrac{1}{2}$ (normal non ?). Ainsi, comme les X_i sont des variables aléatoires suivant des lois de BERNOULLI de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$, S est une variable aléatoire et, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S) = \sum\limits_{i=1}^{n} i.p = \dfrac{n(n+1)}{4}$.

11.169 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par indépendance de X et Y, on obtient $\mathbb{P}(S = n) = \mathbb{P}(X+Y = n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = n-k)$ donc $\mathbb{P}(S = n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = n-k) = \sum\limits_{k=0}^{n} p(1-p)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1} = (n+1)p^2(1-p)^{n-2}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_{S=n}(X = k) = \dfrac{\mathbb{P}(X = k, S = n)}{\mathbb{P}(S = n)} = \dfrac{\mathbb{P}(X = k, Y = n-k)}{\mathbb{P}(S = n)}$ donc $\mathbb{P}_{S=n}(X = k) = 0$ si $k > n$ et $\mathbb{P}_{S=n}(X = k) = \dfrac{p(1-p)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1}}{(n+1)p^2(1-p)^{n-2}} = \dfrac{1}{n+1}$: la loi de X sachant $S = n$ est la loi uniforme sur $[\![0;n]\!]$.

Prenons d'abord $n = 0$, alors $\mathbb{P}_{Z>0}(Z > 1) = 1 - p$. Mais comme Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a $(Z > 0) = \Omega$ donc $\mathbb{P}_{Z>0}(Z > 1) = \mathbb{P}(Z > 1) = 1 - p = 1 - \mathbb{P}(Z = 1)$ donc $\mathbb{P}(Z = 1) = p$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(Z > n) = (1-p)^n$. La propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Si $n \geqslant 2$ et $\mathbb{P}(Z > n) = (1-p)^n$, $\mathbb{P}_{Z>n}(Z > n+1) = 1-p = \dfrac{\mathbb{P}(Z > n+1)}{\mathbb{P}(Z > n)}$ car $(Z > n+1, Z > n) = (Z > n+1)$.
Ainsi, par hypothèse de récurrence : $\mathbb{P}(Z > n+1) = (1-p)^{n+1}$.
On a donc par principe de récurrence : $\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(Z > n) = (1-p)^n$ (vrai même pour $n = 0$) donc $\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(Z > n) - \mathbb{P}(Z > n-1) = (1-p)^n - (1-p)^{n-1} = p(1-p)^{n-1}$: $Z \sim \mathcal{G}(p)$.
Comme une loi géométrique modélise le numéro du premier succès (pile) dans une répétition infinie de tirages de pile ou face (où la probabilité de faire pile est p), le fait que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$ signifie qu'en moyenne on va attendre $\dfrac{1}{p}$ coups pour faire un pile dans cette configuration.