PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 18

PSI 1 2025-2026 **du lundi 23/02 au vendredi 27/02**

1 Variables aléatoires :

- définition d'une variable aléatoire discrète, notations classiques $(X \leqslant a)$, $(X = x)$, $(X \in A)$;
- loi d'une variable aléatoire discrète, elle ne caractérise pas la variable aléatoire ;
- couple de variables aléatoires, loi conjointe et lois marginales ;
- loi conditionnelle de Y sachant B, indépendance de VA, calcul de $P(X \in A,\ Y \in B)$;
- variables aléatoires indépendantes 2 à 2 ou dans leur ensemble, relations ;
- lois sur un univers fini : uniforme, Bernoulli, binomiale (somme de Bernoulli indépendantes), hypergéométrique (hors programme) ;
- lois sur un univers dénombrable : géométrique (loi du premier succès) ;
- lois sur un univers dénombrable : Poisson, la somme de deux VA indépendantes suivant $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$ suit $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$, avec condition, la "limite" d'une loi binomiale est une loi de Poisson ;

2 Espérance et variance :

- espérance finie pour X réelle si la famille $\big(\mathbb{P}(X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, VA centrée ;
- espérances des variables aléatoires suivant l'une ces cinq lois usuelles ;
- Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et a une espérance finie : $E(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$;
- positivité et croissance de l'espérance, inégalité de Markov ;
- théorème du transfert pour l'espérance de la variable aléatoire $f(X)$;
- espérance d'un produit de deux variables aléatoires réelles indépendantes ;
- moments d'une VA, variance d'une VA si elle existe, variable réduite, écart-type ;
- variances des variables aléatoires suivant l'une des cinq lois usuelles ;
- si X admet un moment d'ordre 2 alors $E(X)^2 \leqslant E(X^2)$, variance de $aX + b$;
- inégalité de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres ;
- si X et Y ont des moments d'ordre 2, covariance $\mathrm{Cov}(X, Y)$, inégalité de Cauchy-Schwarz;
- covariance d'une somme de variables, relation avec l'indépendance deux à deux ;

3 Fonctions génératrices :

- définition de $G_X(t) = E(t^X)$ si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$;
- son rayon de convergence est au moins égal à 1, continuité sur $[-1; 1]$;
- fonction génératrice des 4 lois usuelles et rayons de convergence associés ;
- X admet une espérance finie ssi G_X est dérivable en 1 et $G'_X(1) = E(X)$;
- X admet une variance ssi G_X est dérivable deux fois en 1 et $G''_X(1) = E(X(X-1))$;
- Si X et Y sont indépendantes : $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$;

QUESTIONS DE COURS :

1 définir les lois marginales d'une variable aléatoire discrète définie vers $E \times F$ (déf. 11.16)
2 définir la variance d'une variable aléatoire et la covariance de deux (déf. 11.21 et 11.22)
3 définir la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs entières (déf. 11.23)
4 énoncer le théorème du transfert (th. 11.15)
5 énoncer la proposition sur l'espérance d'un produit de deux variables aléatoires indép. (prop. 11.19)
6 énoncer la relation sur la variance d'une somme de variables aléatoires (prop. 11.25)
7 énoncer la loi faible des grands nombres (th. 11.28)
8 prouver la relation de König-Huygens sur la variance (prop. 11.21)
9 prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz (prop. 11.23)
10 prouver l'inégalité de Markov (prop. 11.26)

Prévision pour la prochaine semaine : révision sur les variables aléatoires et début de la topologie des espaces vectoriels normés