# TD 19 : VARIABLES ALÉATOIRES

**PSI 1 2025-2026** **vendredi 06 février 2026**

**19.1** **a.** Par le théorème de transfert, la variable aléatoire $Y = e^{uN}$ admet une espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{un}\,\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n\geqslant 0} e^{un}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ converge. Or $e^{un}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda e^u)^n}{n!}$ donc la série précédente converge comme une série exponentielle. Classiquement, $\mathbb{E}(e^{uN}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{(\lambda e^u)^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^u} = e^{\lambda(e^u-1)}$.

**b.** Pour $y > 0$ et $u > 0$, $e^{u(N-(1+y)\lambda)} = e^{-(1+y)u\lambda}e^{uN}$ donc $Z = e^{u(N-(1+y)\lambda)}$ admet aussi une espérance finie et, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z) = e^{-(1+y)u\lambda}\,\mathbb{E}(e^{uN}) = e^{-(1+y)u\lambda}e^{-\lambda}e^{\lambda e^u} = e^{\lambda(e^u-1-(1+y)u)}$.

Considérons la fonction $f_y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f_y(u) = e^u - 1 - (1+y)u$. Comme $f_y$ est dérivable et que $f_y'(u) = e^u - (1+y)$, $f_y$ est croissante sur $[\ln(1+y);+\infty[$ et décroissante sur $]0;\ln(1+y)]$, ainsi on a $\operatorname{Inf}_{u>0} f_y(u) = \operatorname{Min}_{u>0} f_y(u) = f_y(\ln(1+y)) = y - (1+y)\ln(1+y) = -h(y)$. Ainsi, par stricte croissante de la fonction $\exp$ et comme $\lambda > 0$, on a aussi $\operatorname{Inf}_{u>0}\left(\mathbb{E}(e^{u(N-(1+y)\lambda)})\right) = \operatorname{Min}_{u>0}\left(\mathbb{E}(e^{u(N-(1+y)\lambda)})\right) = e^{-\lambda h(y)}$.

**c.** Soit $y > 0$ et $u > 0$, $(N \geqslant (1+y)\lambda) = (uN \geqslant (1+y)u\lambda) = (u(N-(1+y)\lambda) \geqslant 0) = (e^{u(N-(1+y)\lambda)} \geqslant 1)$ par stricte croissance de $\exp$ donc, d'après l'inégalité de Markov, comme $e^{u(N-(1+y)\lambda)}$ est une variable aléatoire réelle positive, on a $\mathbb{P}(N \geqslant (1+y)\lambda) = \mathbb{P}(e^{u(N-(1+y)\lambda)} \geqslant 1) \leqslant \frac{\mathbb{E}(e^{u(N-(1+y)\lambda)})}{1} = e^{\lambda f_y(u)}$. Comme cette inégalité est vraie quel que soit $u \in \mathbb{R}_+^*$, elle l'est en particulier si on prend $u = \ln(1+y)$ et on a $\mathbb{P}(N \geqslant (1+y)\lambda) \leqslant e^{-\lambda h(y)} = e^{-\lambda((y+1)\ln(1+y)-y)}$ (1) d'après la question précédente.

Comme $N$ est une variable aléatoire positive admettant une espérance, on peut appliquer directement Markov et avoir $\mathbb{P}(N \geqslant (1+y)\lambda) \leqslant \frac{\mathbb{E}(N)}{(1+y)\lambda} = \frac{1}{1+y}$ (2) car $\mathbb{E}(N) = \lambda$.

Laquelle de ces deux majorations est la meilleure, sachant que (1) est meilleure de (2) si et seulement si $e^{-\lambda((y+1)\ln(1+y)-y)} \leqslant \frac{1}{1+y}$ ce qui équivaut, par stricte croissance de l'exponentielle, à la condition $(\lambda(1+y)-1)\ln(1+y) \geqslant \lambda y$. Or cette dernière est clairement vraie, par croissances comparées, si $y$ est assez grand car $y \underset{+\infty}{=} o(y\ln(1+y))$. Elle est fausse, puisque $(\lambda(1+y)-1)\ln(1+y) \underset{0}{\sim} (\lambda-1)y$ et que $(\lambda-1)y \leqslant \lambda y$ car $y > 0$, quand $y$ est assez petit.

Il y a donc certainement (à vérifier par une étude de fonction) une valeur limite $y_0$ (dépendant bien sûr de $\lambda$) telle que (2) est meilleure que (1) si $y \leqslant y_0$ et telle que (1) est meilleure que (2) si $y \geqslant y_0$.

**19.2** Comme $(X+Y=0) = (X=0, Y=0)$ car $X$ et $Y$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X+Y=0) = \mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0) = \frac{1}{6}$ car $X$ et $Y$ sont indépendantes donc $\mathbb{P}(X=0) > 0$ et $\mathbb{P}(Y=0) > 0$. Ainsi, pour $k \geqslant 5$, $\mathbb{P}(X+Y=k) = 0$ et $(X=0, Y=k) \subset (X+Y=k)$, on en déduit que $\mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=k) = 0$ donc $\mathbb{P}(Y=k) = 0$. De même, $\mathbb{P}(X=k) = 0$ si $k \geqslant 5$. Ainsi, $X$ et $Y$ sont presque sûrement à valeurs dans $[\![0;4]\!]$ et les fonctions génératrices $G_X$ et $G_Y$ sont des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 4. Comme $X$ et $Y$ sont indépendantes, $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = \frac{1}{6} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{3}$. Or $P = \frac{1}{6} + \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{3} = \frac{1}{6}(X^2+1)(2X^2+1)$. Comme $X$ et $Y$ ne sont pas presque sûrement constantes, $G_X$ et $G_Y$ ne sont pas des fonctions constantes. Par unicité de la décomposition de $P$ dans $\mathbb{R}[X]$, $G_X(t) = \frac{t^2+1}{2}$ et $G_Y(t) = \frac{2t^2+1}{3}$ ou l'inverse (attention à la condition $G_X(1) = G_Y(1) = 1$ qui impose à la somme des coefficients de chacun de ces deux polynômes de valoir 1).

Par conséquent, en échangeant éventuellement les rôles joués par $X$ et $Y$, on a $\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=2)=\dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Y=0)=\dfrac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(Y=2)=\dfrac{1}{3}$ (les autres valeurs de $\mathbb{P}(X=i)$ et $\mathbb{P}(Y=j)$ étant nulles).

**19.3** **a.** Tous les tirages sont des pics si et seulement si on tire dans l'ordre les boules numérotées $1,2,\cdots,n$ donc $(S_n=n)=(X_1=1)\cap\cdots\cap(X_n=n)$ ce qui donne, par la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}(S_n=n)=\mathbb{P}(X_1=1)\times\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2=2)\times\cdots\times\mathbb{P}_{(X_1=1)\cap\cdots\cap(X_{n-1}=n-1)}(X_n=n)=\dfrac{1}{n}\times\cdots\times\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{n!}$.
Puisqu'on a toujours un pic au tirage 1, on n'a qu'un seul pic lors de ces tirages si et seulement si $X_1=n$. Ainsi, $(S_n=1)=(X_1=n)$ donc $\mathbb{P}(S_n=1)=\mathbb{P}(X_1=n)=\dfrac{1}{n}$.

Par construction, si on note $\sigma:[\![1;n]\!]\to[\![1;n]\!]$ tel que $\sigma(k)$ est le numéro de la $k$-ième boule tirée, alors $\sigma$ est une permutation de $[\![1;n]\!]$ et elles sont équiprobables. L'évènement $(T_k=1)$ a donc pour probabilité $\mathbb{P}(T_k=1)=\dfrac{\mathrm{card}\left(\{T_k=1\}\right)}{n!}$ car il y a $n!$ permutations de $[\![1;n]\!]$. Pour choisir une permutation $\sigma$ qui admet un pic au tirage $k$, il faut et il suffit que $\sigma(k)$ soit le maximum de $\sigma(1),\cdots,\sigma(k)$. Protocole de choix :

- On choisit les $k$ boules tirées lors des $k$ premiers tirages : $\dbinom{n}{k}$ choix.
- La plus grande de ces $k$ boules est forcément $\sigma(k)$ : 1 seul choix.
- On répartit les $k-1$ autres boules parmi ces $k$ boules dans $\sigma(1),\cdots,\sigma(k-1)$ : $(k-1)!$ choix.
- On répartit les $n-k$ boules restantes dans $\sigma(k+1),\cdots,\sigma(n)$ : $(n-k)!$ choix.

Ainsi, $\mathbb{P}(T_k=1)=\dfrac{\dbinom{n}{k}(k-1)!(n-k)!}{n!}=\dfrac{n!(k-1)!(n-k)!}{k!(n-k)!n!}=\dfrac{1}{k}$ donc $T_k\sim\mathcal{B}\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

**b.** Comme $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}T_k$ par définition, on a $\mathbb{E}(S_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{E}(T_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}=H_n\underset{+\infty}{\sim}\ln(n)$.

**c.** Pour choisir une permutation $\sigma$ telle que $T_i=1$ et $T_j=1$ (avec $i<j$), on a le protocole :

- On choisit les $j$ boules tirées lors des $j$ premiers tirages : $\dbinom{n}{j}$ choix.
- La plus grande de ces $j$ boules est forcément $\sigma(j)$ : 1 seul choix.
- On choisit parmi les $j-1$ restantes les $i$ qui seront $\sigma(1),\cdots,\sigma(i)$ : $\dbinom{j-1}{i}$ choix.
- La plus grande de ces $i$ boules est forcément $\sigma(i)$ : 1 seul choix.
- On répartit les $i-1$ restantes dans $\sigma(1),\cdots,\sigma(i-1)$ : $(i-1)!$ choix.
- On répartit les $j-i+1$ restantes (les $j$ privées des $i+1$) dans $\sigma(i+1),\cdots,\sigma(j-1)$ : $(j-i+1)!$ choix.
- On répartit les $n-j$ boules restantes dans $\sigma(j+1),\cdots,\sigma(n)$ : $(n-j)!$ choix.

Ainsi, $\mathbb{P}(T_i=1,T_j=1)=\dfrac{\dbinom{n}{j}\dbinom{j-1}{i}(i-1)!(j-i+1)!(n-j)!}{n!}=\dfrac{n!(j-1)!(i-1)!(j-i+1)!(n-j)!}{j!(n-j)!(j-1-i)i!}=\dfrac{1}{ij}$.
D'après la question **a.**, si $(i,j)\in[\![1;n]\!]$ et $i\neq j$, $\mathbb{P}(T_i=1,T_j=1)=\dfrac{1}{ij}=\dfrac{1}{i}\times\dfrac{1}{j}=\mathbb{P}(T_i=1)\,\mathbb{P}(T_j=1)$. Ainsi, les évènements $A=(T_i=1)$ et $B=(T_j=1)$ sont indépendants. On sait d'après le cours qu'alors $A$ et $\overline{B}$ le sont aussi, $\overline{A}$ et $B$ le sont encore, et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont toujours. Ainsi, $\mathbb{P}(T_i=1,T_j=0)=\mathbb{P}(T_i=1)\,\mathbb{P}(T_j=0)$, $\mathbb{P}(T_i=0,T_j=1)=\mathbb{P}(T_i=0)\,\mathbb{P}(T_j=1)$ et $\mathbb{P}(T_i=0,T_j=0)=\mathbb{P}(T_i=0)\,\mathbb{P}(T_j=0)$. Comme $T_i$ et $T_j$ ne prennent que les valeurs 0 et 1, les variables aléatoires $T_i$ et $T_j$ sont indépendantes.

**d.** D'après le cours, comme $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}T_k$, on a $\mathbb{V}(S_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{V}(T_k)+2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{Cov}(T_i,T_j)$. Comme $T_i$ et $T_j$

sont indépendantes si $i < j$, on a $\text{Cov}(T_i, Y_j) = 0$ et $V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(T_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = H_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Il est classique qu'alors on a $\mathbb{V}(S_n) \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma - \frac{\pi^2}{6} + o(1)$.

**19.4** **a.** On dit qu'une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$ suit la loi de RADEMACHER. Comme $-1 \leqslant X_k \leqslant 1$ pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on a $S_n \in [\![-n; n]\!]$. De plus, $X_k$ étant impair, $S_n$ a la parité de $n$. Ainsi, $S_n(\Omega) \subset \{-n, -(n-2), \cdots, (n-2), n\}$.

Pour aller plus loin, si $B_k = \frac{1 + X_k}{2}$ pour $k \in [\![1; n]\!]$, on a $B_k(\Omega) = \{0, 1\}$ et, comme $(B_k = 0) = (X_k = -1)$ et $(B_k = 1) = (X_k = 1)$, on a $\mathbb{P}(B_k = 0) = \mathbb{P}(B_k = 1) = \frac{1}{2}$ donc $B_k$ suit la loi de BERNOULLI de paramètre $\frac{1}{2}$. Comme $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, $B_1, \cdots, B_n$ le sont aussi d'après le cours, et on sait qu'alors $T_n = \sum_{k=1}^{n} B_k$ suit la loi binomiale de paramètres $n, \frac{1}{2}$. Comme $S_n = 2T_n - n$, on connaît donc la loi de $S_n$, donnée par les relations $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $\mathbb{P}(S_n = 2k - n) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = \mathbb{P}(S_n = n - 2k)$.

**b.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(|S_{n+1}| = 1) = (S_{n+1} = 1) \sqcup (S_{n+1} = -1)$ donc, par incompatibilité de ces évènements, on a $\mathbb{P}(|S_{n+1}| = 1) = \mathbb{P}(S_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(S_{n+1} = -1)$. Par incompatibilité et indépendance de $S_n$ et $X_{n+1}$ par le lemme des coalitions, comme $(S_{n+1} = 1) = (S_n = 0, X_{n+1} = 1) \sqcup (S_n = 2, X_{n+1} = -1)$, on a la relation $\mathbb{P}(S_{n+1} = 1) = \frac{\mathbb{P}(S_n = 0)}{2} + \frac{\mathbb{P}(S_n = 2)}{2}$. Comme on peut décomposer l'évènement $(S_{n+1} = -1)$ en $(S_{n+1} = -1) = (S_n = 0, X_{n+1} = -1) \sqcup (S_n = -2, X_{n+1} = 1)$, on en déduit de la même manière que $\mathbb{P}(S_{n+1} = -1) = \frac{\mathbb{P}(S_n = 0)}{2} + \frac{\mathbb{P}(S_n = -2)}{2}$. Or $(S_n = 0) = (|S_n| = 0)$ et $(|S_n| = 2) = (S_n = 2) \sqcup (S_n = -2)$, ce qui donne $\mathbb{P}(|S_{n+1}| = 1) = \mathbb{P}(|S_n| = 0) + \frac{\mathbb{P}(|S_n| = 2)}{2}$.

**c.** Comme avant, $(|S_{n+1}| = k) = (|S_n| = k + 1, X_{n+1} = -\varepsilon_{n+1}) \sqcup (|S_n| = k - 1, X_{n+1} = \varepsilon_{n+1})$ en notant $\varepsilon_{n+1}$ le signe de $S_{n+1}$ donc, avec les mêmes arguments d'incompatibilité et d'indépendance de $S_n$ et $X_{n+1}$, on a la relation $\mathbb{P}|S_{n+1}| = k) = \frac{\mathbb{P}(|S_n| = k - 1)}{2} + \frac{\mathbb{P}(|S_n| = k - 1)}{2}$.

**d.** Comme $|S_n|$ est à valeurs dans $[\![0; n]\!]$, $\mathbb{E}(|S_n|) = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(|S_n| = k)$. Ainsi, $\mathbb{E}(|S_{n+1}|) = \sum_{k=1}^{n+1} k\,\mathbb{P}(|S_{n+1}| = k)$ qu'on écrit $\mathbb{E}(|S_{n+1}|) = \mathbb{P}(|S_{n+1}| = 1) + \sum_{k=2}^{n+1} k\,\mathbb{P}(|S_{n+1}| = k)$. Or, d'après la question précédente, on a $k\,\mathbb{P}(|S_{n+1}| = k) = \frac{(k - 1 + 1)\,\mathbb{P}(|S_n| = k - 1)}{2} + \frac{(k + 1 - 1)\,\mathbb{P}(|S_n| = k + 1)}{2}$ si $k \geqslant 2$ donc on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|S_{n+1}|) \quad &= \quad \mathbb{P}(|S_n| = 0) + \frac{\mathbb{P}(|S_n| = 2)}{2} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(k-1)\,\mathbb{P}(|S_n| = k - 1)}{2} \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(\mathbb{P}(|S_n| = k - 1)}{2} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(k+1)\,\mathbb{P}(|S_n| = k + 1)}{2} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\mathbb{P}(|S_n| = k + 1)}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{E}(|S_{n+1}|) = \mathbb{P}(|S_n| = 0) + \frac{\mathbb{P}(|S_n| = 2)}{2} + \frac{E(|S_n|)}{2} + \frac{\mathbb{P}(|S_n| = 1)}{2} + \frac{\mathbb{E}(|S_n|)}{2} - \frac{\mathbb{P}(|S_n| = 1)}{2} - \frac{\mathbb{P}(|S_n| = 2)}{2}$ car $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{(\mathbb{P}(|S_n| = k - 1)}{2} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\mathbb{P}(|S_n| = k + 1)}{2} = \frac{\mathbb{P}(|S_n| = 1)}{2} - \frac{\mathbb{P}(|S_n| = n + 1)}{2} - \frac{\mathbb{P}(|S_n| = n + 2)}{2}$ et que $\frac{\mathbb{P}(|S_n| = n + 1)}{2} = \frac{\mathbb{P}(|S_n| = n + 2)}{2} = 0$. On en déduit bien que $\mathbb{E}(|S_{n+1}|) = \mathbb{E}(|S_n|) + \mathbb{P}(|S_n| = 0)$.

**e.** Par imparité de $S_{2n+1}$, on ne peut pas avoir $S_{2n+1} = 0$ donc $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0)$. Par contre, $S_{2n} = 0$ si et seulement si il y a autant de $1$ que de $-1$ dans les $2n$ étapes de cette marche aléatoire. Par indépendance des pas, on en déduit d'après le cours que $\mathbb{P}(S_{2n}=0)=\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

**f.** D'après la question **e.**, la suite $(\mathbb{E}(|S_n|)_{n\geqslant 1}$ est croissante et, par dualité suite-série, elle converge si et seulement si $\sum\limits_{n\geqslant 1}\big(\mathbb{E}(|S_{n+1}|)-\mathbb{E}(|S_n|)\big)$ converge. Or $\mathbb{E}(|S_{2n+2}|)-\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)=\mathbb{P}(|S_{2n+1}|=0)$ et $\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)-\mathbb{E}(|S_{2n}|)=\mathbb{P}(|S_{2n}|=0)=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\underset{+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{2n}}{2^{2n}(2\pi n)n^{2n}e^{2n}}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Sachant que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ diverge par Riemann, on en déduit par comparaison que $\sum\limits_{n\geqslant 1}\big(\mathbb{E}(|S_{n+1}|)-\mathbb{E}(|S_n|)\big)$ diverge donc que $(\mathbb{E}(|S_n|)_{n\geqslant 1}$ diverge, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{E}(|S_n|)=+\infty$.

**g.** J'ai rajouté cette question, pas sûr qu'elle fasse partie de l'oral ! D'après une remarque du cours, si $a_n>0\underset{+\infty}{\sim}b_n>0$ et si $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_n$ diverge, alors $\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\underset{+\infty}{\sim}\sum\limits_{k=0}^{n}b_k$ (c'est hors programme). On l'applique ici avec $\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)-\mathbb{E}(|S_{2n}|)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, ce qui, comme $\sum\limits_{k=1}^{n}(\mathbb{E}(|S_{2k+1}|)-\mathbb{E}(|S_{2k}|)=\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)-\mathbb{E}(|S_2|)$ donne $\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)\underset{+\infty}{\sim}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\pi k}}$. Par comparaison série-intégrale, on montre classiquement que $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\underset{+\infty}{\sim}2\sqrt{n}$ avec la décroissante et la continuité de la fonction $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $[1;+\infty[$ dont une primitive est $t\mapsto 2\sqrt{t}$. Ainsi, $\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)\underset{+\infty}{\sim}2\sqrt{\frac{n}{\pi}}\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{2(2n+1)}{\pi}}$. Comme $\mathbb{E}(|S_{2n}|)=\mathbb{E}(|S_{2n+1}|)$, on a $\mathbb{E}(|S_{2n}|)\underset{+\infty}{\sim}2\sqrt{\frac{n}{\pi}}\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{2(2n)}{\pi}}$ donc la suite $\left(\frac{\mathbb{E}(|S_n|)}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ et on a $\mathbb{E}(|S_n|)\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$.

s

**19.5** **a.** Pour $k\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$, par définition du maximum, on a $(M_n\leqslant k-1)=\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i\leqslant k-1)$ donc, par indépendance des $X_i$, on a $\mathbb{P}(M_n\leqslant k-1)=\prod\limits_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i\leqslant k-1)$ or $X_1,\cdots,X_n$ suivent la même loi que $X_1$ donc $\forall i\in[\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(X_i\leqslant k-1)=\mathbb{P}(X_1\leqslant k-1)$ et on a bien $\mathbb{P}(M_n\leqslant k-1)=\mathbb{P}(X_1\leqslant k-1)^n$.

**b.** D'abord, on a $\mathbb{P}(X_1\leqslant k-1)=1-\mathbb{P}(X_1>k-1)$. Mais comme $X_1$ est à valeurs entières, on a $(X_1>k-1)=(X_1\geqslant k)$. Comme $x\mapsto x^\alpha$ est strictement croissante, $(X_1\geqslant k)=(X_1^\alpha\geqslant k^\alpha)$ donc, comme $X_1^\alpha$ est une variable aléatoire positive admettant une espérance finie par hypothèse et $k^\alpha>0$, par l'inégalité de Markov, $\mathbb{P}(X_1\geqslant k)=\mathbb{P}(X_1^\alpha\geqslant k^\alpha)\leqslant\frac{\mathbb{E}(X_1^\alpha)}{k^\alpha}=\frac{m_\alpha}{k^\alpha}$. Ainsi, $\mathbb{P}(X_1\leqslant k-1)\geqslant 1-\frac{m_\alpha}{k^\alpha}$ pour $k\in\mathbb{N}^*$.

Comme $M_n$ est aussi à valeurs entières, on a $(M_n>k-1)=(M_n\geqslant k)$ pour $k\in\mathbb{N}^*$ donc on obtient $\mathbb{P}(M_n\geqslant k)=\mathbb{P}(M_n>k-1)=1-\mathbb{P}(M_n\leqslant k-1)=1-\mathbb{P}(X_1\leqslant k-1)^n\leqslant 1-\left(1-\frac{m_\alpha}{k^\alpha}\right)$. Quand $k$ tend vers $+\infty$, on effectue un développement limité et $1-\left(1-\frac{m_\alpha}{k^\alpha}\right)\underset{+\infty}{=}1-\left(1-\frac{nm_\alpha}{k^\alpha}+o\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)\right)\underset{+\infty}{=}\frac{nm_\alpha}{k^\alpha}+o\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)$ donc $1-\left(1-\frac{m_\alpha}{k^\alpha}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{nm_\alpha}{k^\alpha}$. Puisque la série de Riemann $\sum\limits_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^\alpha}$ converge car $\alpha>1$ et que $n$ et $m_\alpha$ sont des constantes, par comparaison, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(M_n\geqslant k)$ converge donc, d'après le cours, $M_n$ admet une espérance finie qui vaut $\mathbb{E}(M_n)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(M_n\geqslant k)$.

**c.** Ici $X_1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Prenons $\alpha=2$, alors $X_1$ admet un moment d'ordre 2 (une variance finie) d'après le cours donc, d'après la question **b.** avec $\alpha = 2 > 1$, $M_n$ admet une espérance finie et $\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(M_n \geqslant k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \mathbb{P}(M_n \leqslant k-1)) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - \mathbb{P}(X_1 \leqslant k-1)^n)$ avec la question **a.**.

Ici, $\mathbb{P}(X_1 \leqslant k-1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > k-1) = 1 - 2^{1-k}$. En effet, classiquement, $(X_1 > k-1) = \bigsqcup_{n=k}^{+\infty} (X_1 = n)$ donc, par $\sigma$-additivité, $\mathbb{P}(X_1 > k-1) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{(1/2)^k}{1 - (1 - (1/2))} = 2^{1-k}$.

On a bien la relation attendue, $\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - (1 - 2^{1-k})^n\right)$.

**d.** Par le binôme de Newton, on a $\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{j+1} 2^{-(k-1)j} \right)$. Or les $n$ séries géométriques de raison $\frac{1}{2^j}$ pour $j \in [\![1;n]\!]$ convergent donc, par somme d'un nombre fini de séries convergentes, on peut écrire $\mathbb{E}(M_n) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{j+1} \left( \sum_{k=1}^{+\infty} (2^{-j})^{k-1} \right) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{j+1} \frac{1}{1 - 2^{-j}} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^{j+1} 2^j}{2^j - 1}$.

**19.6** **a.** Comme la variable aléatoire $e^{itX}$ est bornée sur $\Omega$, elle admet une espérance finie et on a, par théorème de transfert, $\mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{k=1}^{n} e^{itx_k} \mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k e^{itx_k}$. Par inégalité triangulaire sur les complexes, $|\mathbb{E}(e^{itX})| = \left| \sum_{k=1}^{n} p_k e^{itx_k} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |p_k e^{itx_k}| = \sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1} \mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{P}\left( \bigsqcup_{k=1}^{n} (X = x_k) \right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Comme $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\Phi(t)|^2 = \Phi(t)\overline{\Phi(t)}$ il vient avec **a.** la relation $|\Phi(t)|^2 = \left( \sum_{j=1}^{n} p_j e^{itx_j} \right) \left( \sum_{k=1}^{n} p_k e^{-itx_k} \right)$, d'où $|\Phi(t)|^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k^2 + \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant n} p_j p_k e^{it(x_j - x_k)}$. Si on passe en mode développement limité en $0$, on obtient $|\Phi(t)|^2 \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} p_k^2 + \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant n} p_j p_k \left( 1 + it(x_j - x_k) - \frac{t^2 (x_j - x_k)^2}{2} + o(t^2) \right)$. Or, en échangeant les rôles joués par $j$ et $k$, on a $\sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant n} p_j p_k (x_j - x_k) = \sum_{1 \leqslant k \neq j \leqslant n} p_k p_j (x_k - x_j) = - \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant n} p_j p_k (x_j - x_k) = 0$. Or, $1 = \left( \sum_{k=1}^{n} p_k \right)^2$ donc, en développant, $1 = \sum_{k=1}^{n} p_k^2 + \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant n} p_j p_k$. En reportant dans le développement limité, $|\Phi(t)|^2 \underset{0}{=} 1 - \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant n} p_j p_k + \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant n} p_j p_k \left( 1 - \frac{t^2 (x_j - x_k)^2}{2} + o(t^2) \right) \underset{0}{=} 1 - \frac{1}{2} \left( \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant n} p_j p_k (x_j - x_k)^2 \right) t^2 + o(t^2)$.

De plus, $\mathbb{V}(X^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - \left( \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \right)^2$ par formule de transfert donc, en développant, $\mathbb{V}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 (p_k - p_k^2) - \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant n} x_j x_k p_j p_k = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k^2 \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} p_j \right) - \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant n} x_j x_k p_j p_k$ qu'on peut aussi écrire $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{2} \left( \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant n} p_j p_k x_k^2 + \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant n} p_k p_j x_j^2 - 2 \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant n} x_j x_k p_j p_k \right)$ par symétrie entre $j$ et $k$ et on obtient bien la relation $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{2} \left( \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant n} p_j p_k (x_k^2 + x_j^2 - 2x_j x_k) \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant n} p_j p_k (x_j - x_k)^2 \right)$ qui justifie bien le développement attendu : $|\Phi(t)|^2 \underset{0}{=} 1 - \mathbb{V}(X) t^2 + o(t^2)$.

**b.** L'hypothèse $X(\Omega) \subset a + \mathbb{Z}b$ se traduit par $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\exists m_k \in \mathbb{Z}$, $x_k = a + m_k b$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{k=1}^{n} p_k e^{it(a + m_k b)} = e^{ita} \sum_{k=1}^{n} p_k (e^{itb})^{m_k}$ donc $|\Phi(t)| = \left| \sum_{k=1}^{n} p_k (e^{itb})^{m_k} \right|$. Il suffit de prendre $t_0 \neq 0$ tel que $e^{it_0 b} = 1$, par exemple $t_0 = \frac{2\pi}{b} \neq 0$, pour que $|\Phi(t_0)| = \left| \sum_{k=1}^{n} p_k \right| = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

**c.** Réciproquement, supposons qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\Phi(t_0)| = 1$. Alors, $\Phi(t_0) \in \mathbb{U}$ donc il existe

$\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(t_0) = e^{i\alpha}$. Ainsi, $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k e^{it_0 x_k} = e^{i\alpha} = e^{i\alpha} \sum\limits_{k=1}^{n} p_k$ donc, en multipliant par $e^{-i\alpha}$, on a la relation $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k e^{it_0 x_k - i\alpha} = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k e^{i(t_0 x_k - \alpha)}$.

Ainsi, par inégalité triangulaire, $1 = \Big| \sum\limits_{k=1}^{n} p_k e^{i(t_0 x_k - \alpha)} \Big| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} p_k |e^{i(t_0 x_k - \alpha)}| = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$. Or, on sait que le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire traduit le fait que les complexes $(p_k e^{i(t_0 x_k - \alpha)})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont positivement alignés, ou encore, comme $p_k > 0$ qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $p_k e^{i(t_0 x_k - \alpha)} = p_k e^{i\theta}$. Par conséquent, comme $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $e^{i(t_0 x_k - \alpha - \theta)} = 1$, il existe $m_k \in \mathbb{Z}$ tel que $t_0 x_k - \alpha - \theta = 2\pi m_k$ donc $x_k = a + m_k b$ en posant $b = \dfrac{2\pi}{t_0} \in \mathbb{R}^*$ et $a = \dfrac{\alpha + \theta}{t_0} \in \mathbb{R}$. On a donc bien $X(\Omega) \subset a + \mathbb{Z}b$.

**19.7** **a.** Pour $x \neq 0$, en posant $u_n = \dbinom{2n}{n} \dfrac{x^{2n}}{4^n}$ pour le critère de D'ALEMBERT, on obtient après simplifications, $\Big|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\Big| = \dfrac{(2n+2)!(n!)^2 4^n x^{2n+2}}{(2n)!((n+1)!)^2 4^{n+1}} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)x^2}{4(n+1)^2} = \dfrac{2(2n+1)x^2}{4(n+1)}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\Big| = \ell = x^2$.

- si $|x| < 1$, on a $\ell < 1$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument par le critère de D'ALEMBERT. Ainsi, $R \geqslant 1$.
- si $|x| > 1$, on a $\ell > 1$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge grossièrement par le critère de D'ALEMBERT. Ainsi, $R \leqslant 1$.

Par conséquent, le rayon $R$ de convergence de la série entière lacunaire $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dbinom{2n}{n} \dfrac{x^{2n}}{4^n}$ vaut $R = 1$. On sait d'après le cours ou on retrouve facilement que $\forall y \in ]-1;1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+y}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2} y^n$. Ainsi, pour $x \in ]-1;1[$, en prenant $y = -x^2 \in ]-1;1[$, on obtient $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} x^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dbinom{2n}{n} \dfrac{x^{2n}}{4^n}$.

**b.** Par construction, $Y_k = \dfrac{X_k + 1}{2}$ suit la loi $\mathcal{B}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)$ car $Y_k = 0 \iff X_k = -1$ et $Y_k = 1 \iff X_k = 1$. Par indépendance de $X_1, \cdots, X_n$ donc de $Y_1, \cdots, Y_n$, d'après le cours, $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\Big(n, \dfrac{1}{2}\Big)$.

**c.** Or $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $X_k = 2Y_k - 1$ donc $S_n = 2\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k\Big) - n = 2T_n - n$. Comme $T_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$, on obtient $S_n(\Omega) = \{-n, -(n-2), \cdots, (n-2), n\}$ et $\mathbb{P}(S_n = 2k - n) = \mathbb{P}(T_n = k) = \dbinom{n}{k} \Big(\dfrac{1}{2}\Big)^k \Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{n-k} = \dfrac{1}{2^n} \dbinom{n}{k}$ pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$. Par les propriétés de l'espérance et la variance, on a $\mathbb{E}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = 0$ et $\mathbb{V}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = n$ car $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes car on a clairement $\mathbb{E}(X_k) = 0$ et $\mathbb{V}(X_k) = 1$. On pouvait passer par $T_n$, en effet, $\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}(2T_n - n) = 4\,\mathbb{V}(T_n)$ donc $\mathbb{E}(S_n) = 2\,\mathbb{E}(T_n) - n = 2(n/2) - n = 0$ et $\mathbb{V}(S_n) = 4(n/4) = n$ car $T_n \sim \mathcal{B}\Big(n, \dfrac{1}{2}\Big)$ donc $\mathbb{E}(T_n) = n\Big(\dfrac{1}{2}\Big)$ et $\mathbb{V}(T_n) = n\Big(\dfrac{1}{2}\Big) \times \Big(1 - \dfrac{1}{2}\Big)$.

**d.** Soit $x \in ]-1;1[$, on a $|p_n x^n| \leqslant |x|^n$ car $p_n \in [0;1]$ donc, comme la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0} |x|^n$ converge car $|x| < 1$, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n x^n$ converge absolument.

**e.** Pour $n \geqslant 1$, on peut partitionner $(S_{2n} = 0)$ en $(S_{2n} = 0) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} ((S_{2n} = 0) \cap (T = 2k))$ en distinguant selon la première fois (notée $T$) où l'on va avoir $(S_{2k} = 0)$ ($S_{2k+1} \neq 0$ car $S_n$ a la même parité que $n$). Par $\sigma$-additivité, $p_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_{2n} = 0, T = 2k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{(T=2k)}(S_{2n} = 0)\,\mathbb{P}(T = 2k)$. Pour tout

$k \in [\![1;n-1]\!]$, on a $\mathbb{P}_{(T=2k)}(S_{2n}=0) = \mathbb{P}(S_{2(n-k)}=0)$ (on repart de 0 après $2k$ "mouvements" et on veut être à 0 au bout de $2n$ étapes). Par contre, comme $(T=2n) \subset (S_{2n}=0)$, on a $\mathbb{P}_{(T=2n)}(S_{2n}=0)=1$. Ainsi $p_n = q_n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} q_k p_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} q_k p_{n-k}$ car on a posé $p_0 = 1$ par convention.

La série génératrice $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(T=n)x^n$ de $T$, qui est bien une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, a un rayon de convergence au moins égal à 1 d'après le cours. Si $x \in ]-1;1[$, on peut effectuer le produit de Cauchy, comme $\mathbb{P}(T=2n+1)=0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_T(x)p(x^2) = \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q_n x^{2n}\Big)\Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n x^{2n}\Big) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} q_k p_{n-k}\Big)x^{2n}$.

Or $p_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p_{n-k}q_k$ si $n \in \mathbb{N}^*$ car $q_0 = 0$ mais $\sum\limits_{k=0}^{0} p_{n-k}q_k = p_0q_0 = 0$ alors que $p_0 = 1$. Ainsi, pour tout $x \in ]-1;1[$, $G_T(x)p(x^2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n x^{2n} = p(x^2)-1$. Mais $p(x^2) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n x^{2n} \geqslant 1$ car $p_n \geqslant 0$ donc $p(x^2) > 0$ et on a donc la relation attendue, à savoir $G_T(x) = \dfrac{p(x^2)-1}{p(x^2)}$.

D'après **c.**, comme $p_n = \mathbb{P}(S_{2n}=0) = \mathbb{P}(T_{2n}=n) = \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$, il vient $\forall x \in ]-1;1[$, $p(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n$.

On en déduit donc que $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ donc $p(x^2) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $G_T(x) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 1-\sqrt{1-x^2}$. Or on sait aussi que, pour $y \in ]-1;1[$, on a le développement en série entière $\sqrt{1+y} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n(n!)^2(2n-1)}y^n$.

Ainsi, pour $x \in ]-1;1[$, $G_T(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)!}{4^n(n!)^2(2n-1)}(-1)^n x^{2n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n-1)}x^{2n}$. On identifie car les rayons sont strictement positifs et $\forall n \geqslant 1$, $\mathbb{P}(T=2n) = \dfrac{1}{2^{2n}(2n-1)}\dbinom{2n}{n}$.

$G_T : x \mapsto 1-\sqrt{1-x^2}$ n'est pas dérivable en 1 car $\sqrt{\ }$ ne l'est pas en 0. D'après le cours, $T$ n'admet pas une espérance finie. Pourtant, $\mathbb{P}(T=+\infty) = 1 - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T=n) = 1 - G_T(1) = 1-1 = 0$ : $T$ est presque sûrement finie mais admet une espérance infinie. Bizarre.

**19.8** **a.** Comme $X$ et $Y$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $\Omega = \bigsqcup\limits_{i,j\geqslant 0}(X=i,Y=j)$ donc, par $\sigma$-additivité, on obtient $\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\Big(\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=j)\Big) = 1$ donc $a\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\dfrac{q^i}{1-q} = \dfrac{a}{(1-q)^2} = 1$ (séries géométriques) donc $a = p^2$.

Pour $i \in \mathbb{N}$, $(X=i) = \bigsqcup\limits_{j=0}^{+\infty}(X=i,Y=j)$ donc, toujours par $\sigma$-additivité, $\mathbb{P}(X=i) = p^2q^i\sum\limits_{j=0}^{+\infty}q^j = p(1-p)^i$.

Comme $X+1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X+1=k) = \mathbb{P}(X=k-1) = p(1-p)^{k-1}$, la variable aléatoire $X+1$ suit la loi géométrique de paramètre $p$. Par symétrie, $Y+1$ suit aussi la même loi géométrique de paramètre $p$. D'après le cours, $\mathbb{E}(X+1) = \dfrac{1}{p}$ donc $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-p}{p} = \dfrac{q}{p}$ par linéarité de l'espérance et on sait aussi que $\mathbb{V}(X+1) = \dfrac{1-p}{p^2} = \mathbb{V}(X)$.

Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par $f(a,b) = ab$ de sorte que $XY = f(X,Y)$. Par théorème de transfert, la variable aléatoire $XY$ admet une espérance finie si et seulement si $(ij\,\mathbb{P}(X=i,Y=j))_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Or $\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} ij\,\mathbb{P}(X=i,Y=j) = \sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} ijp^2q^{i+j} = \sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} ijp^2q^{i+j} = p^2\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}(iq^i)(jq^j) = p^2\Big(\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} kq^k\Big)^2$

(famille produit). Or on sait que $\forall x \in ]-1;1[,\ \dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ qu'on dérive terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence pour avoir $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ donc $\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} nx^n$.

Par conséquent, $\mathbb{E}(XY) = p^2\Big(\dfrac{q}{(1-q)^2}\Big)^2 = \dfrac{q^2}{p^2}$ et $\mathsf{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = \dfrac{q^2}{p^2} - \Big(\dfrac{q}{p}\Big)^2 = 0$.

Mais c'est bien sûr, comme $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}(X=i, Y=j) = p^2q^{i+j} = (pq^i)(pq^j) = \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y=j)$, par définition, les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes et, d'après le cours, $\mathsf{Cov}(X,Y) = 0$.

**b.** Soit $n \in \mathbb{N}$, les valeurs prises par $U$ sachant que $X+Y = 2n+1$ sont tous les entiers de $n+1$ à $2n+1$. Pour $k \in [\![n+1;2n+1]\!]$, on a $(U = \mathsf{Max}(X,Y) = k) \cap (X+Y = 2n+1) = (X=k, Y=2n+1-k) \sqcup (X = 2n+1-k, Y = k)$ car $2n+1-k < k$ donc $\mathbb{P}(U=k, X+Y=2n+1) = \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=2n+1-k) + \mathbb{P}(X=2n+1-k)\,\mathbb{P}(Y=k)$ par indépendance de $X$ et $Y$ donc $\mathbb{P}(U=k, X+Y=2n+1) = 2(pq^k)(pq^{2n+1-k}) = 2p^2q^{2n+1}$. De plus, $(X+Y = 2n+1) = \bigsqcup\limits_{k=0}^{2n+1} (X=k, Y=2n+1-k)$ donc, par $\sigma$-additivité et indépendance de $X$ et $Y$, $\mathbb{P}(X+Y=2n+1) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=2n+1-k) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} (pq^k)(pq^{2n+1-k}) = (2n+2)p^2q^{2n+1}$. Ainsi, pour $k \in [\![n+1;2n+1]\!]$, $\mathbb{P}(U=k|X+Y=2n+1) = \dfrac{\mathbb{P}(U=k, X+Y=2n+1)}{\mathbb{P}(X+Y=2n+1)} = \dfrac{2p^2q^{2n+1}}{(2n+2)p^2q^{2n+1}} = \dfrac{1}{n+1}$.

Par conséquent, la loi de $U$ sachant $X+Y = 2n+1$ est uniforme sur l'intervalle $[\![n+1;2n+1]\!]$.

**19.9** Comme $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{X_k(\omega)}{k}$ est une série à termes positifs pour $\omega \in \Omega$, elle converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Ainsi, en discrétisant les majorants $M \in \mathbb{N}^*$, on a l'expression $A = \bigcup\limits_{M=1}^{+\infty} A_M$ où $A_M = \Big\{\omega \in \Omega \ \Big|\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{X_k(\omega)}{k} \leqslant M\Big\} = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$ avec $B_n = (S_n \leqslant M)$.

Soit $M \in \mathbb{N}^*$, comme la suite $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion car $B_{n+1} \subset B_n$ puisque si $S_{n+1}(\omega) \leqslant M$, alors $S_n(\omega) \leqslant S_{n+1}(\omega) \leqslant M$. Par le théorème de continuité décroissante, on a donc $\mathbb{P}(A_M) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\mathbb{E}(X_k)}{k} = pH_n$ en posant $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ la somme partielle de la série harmonique. Par indépendance de $X_1, \cdots, X_n$, $\mathbb{V}(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\mathbb{V}(X_k)}{k^2} = p(1-p)T_n$ en posant $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ la somme partielle de la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ qui converge et dont la somme est $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Comme $S_n$ admet un moment d'ordre 2, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$, on a la majoration $\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(|S_n - pH_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{p(1-p)T_n}{\varepsilon^2} = \dfrac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2} \leqslant \dfrac{p(1-p)\pi^2}{6\varepsilon^2}$.

Soit $M \in \mathbb{N}^*$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ pH_n > M$. Pour tout $n \geqslant n_0$, comme $M < pH_n$, on a $(S_n \leqslant M) \subset (|S_n - pH_n)| \geqslant pH_n - M)$ donc, en posant $\varepsilon = pH_n - M > 0$ dans la majoration précédente, on obtient $0 \leqslant \mathbb{P}(S_n \leqslant M) \leqslant \dfrac{p(1-p)\pi^2}{6\varepsilon^2} = \dfrac{p(1-p)\pi^2}{6(pH_n - M)^2}$. Par encadrement, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n \leqslant M) = 0$ donc $\mathbb{P}(A_M) = 0$.

Méthode 1 : par sous-additivité, comme $A = \bigcup_{M=1}^{+\infty} A_M$, on a $\mathbb{P}(A) \leqslant \sum_{M=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_M) = 0$ donc $\mathbb{P}(A) = 0$.

Méthode 2 : Pour $M \in \mathbb{N}^*$, si la suite $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par $M$, elle est a fortiori majorée par $M+1$ donc $A_M \subset A_{M+1}$. Ainsi, la suite d'évènements $(A_M)_{M\in\mathbb{N}^*}$ est croissante pour l'inclusion donc, par continuité croissante, on a $\mathbb{P}(A) = \lim_{M\to+\infty} \mathbb{P}(A_M) = 0$.

**19.10** **a.** On connaît le développement en série entière géométrique de rayon $R = 1$ : $\forall x \in ]-1;1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{+\infty} x^m$. Soit un entier $d \in \mathbb{N}^*$, on peut dériver terme à terme $d-1$ fois le développement de la question précédente. Une récurrence simple montre que $\forall d \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in ]-1;1[$, $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(d)} = \frac{d!}{(1-x)^{d+1}}$. Ainsi, avec $r = d-1$, on a $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(r-1)} = \frac{(r-1)!}{(1-x)^r} = \sum_{m=r-1}^{+\infty} \frac{m!}{(m-r+1)!} x^{m-(r-1)} = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} x^m\right)^{(r-1)}$.

**b.** Pour $x \in ]-1;1[$ et $r \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{m=r-1}^{+\infty} \frac{m!}{(r-1)!(m-r+1)!} x^{m-(r-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+r-1)!}{(r-1)!n!} x^r$ en posant $n = m-r+1$ donc $\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+r-1}{n} x^n$. En prenant $x = p \in ]-1;1[$ dans cette relation, on obtient donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+r-1}{n} p^n = \frac{1}{q^r}$, c'est-à-dire $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ car $\binom{n+r-1}{n} = \binom{n+r-1}{r-1}$ alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n > 0$. Par conséquent, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une distribution de probabilité.

**c.** La série génératrice de $X$ est de rayon $R \geqslant 1$ d'après le cours et $\forall t \in ]-R;R[$, $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n$ donc $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n = q^r \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+r-1}{r-1} (pt)^n$. On a donc $R = \frac{1}{p}$ puisque le rayon de $\sum_{n\geqslant 0} \binom{n+r-1}{r-1} t^n$ vaut 1 d'après la question **b.**. Ainsi, $\forall t \in \left]-\frac{1}{p};\frac{1}{p}\right[$, $G_X(t) = \frac{q^r}{(1-pt)^r}$.

Comme $R > 1$, $G_X$ est dérivable deux fois en 1 donc, d'après le cours, $X$ admet un moment d'ordre 2 donc une espérance et une variance finies et que $\mathbb{E}(X) = G_X'(1)$ et $\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) = G_X''(1)$. Or $\forall t \in \left]-\frac{1}{p};\frac{1}{p}\right[$, $G_X'(t) = \frac{rpq^r}{(1-pt)^{r+1}}$ et $G_X''(t) = \frac{r(r+1)p^2q^r}{(1-pt)^{r+2}}$, d'où $\mathbb{E}(X) = \frac{rpq^r}{(1-p)^{r+1}} = \frac{rp}{q}$ et $\mathbb{V}(X) + \frac{r^2p^2}{q^2} - \frac{rp}{q} = \frac{r(r+1)p^2}{q^2}$ donc $\mathbb{V}(X) = \frac{r(r+1)p^2 - r^2p^2 + rp(1-p)}{q^2} = \frac{rp}{q^2}$.

**19.11** **a.** On note $T_k$ le numéro de la boule tirée au tirage $k$. On admet l'existence d'un espace probabilisé qui supporte cette suite $(T_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes (remarque du cours). D'abord $X_n(\Omega) = (\mathbb{N}^* \setminus \{1\}) \cup \{+\infty\}$ car on rajoute la possibilité de ne jamais avoir une autre boule que la première tirée, qu'on note $X_n = +\infty$. De plus, $(X_n = +\infty) = \bigcap_{k=2}^{+\infty} \overline{(X_n = k)}$ par convention et $(X_n = k) = \bigcup_{i=1}^{n} \Big((T_1 = i) \cap \cdots \cap (T_{k-1} = i) \cap (T_k \neq i)\Big) \in \mathcal{A}$ pour $k \geqslant 2$ donc $X_n$ est une variable aléatoire car les $T_i$ le sont. Par incompatibilité de ces $n$ évènements, indépendance mutuelle des $T_k$ qui suivent toutes la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$, on a $\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^{k-1}}$ pour $k \geqslant 2$.

On vérifie la cohérence de ces résultats car $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n^{k-1}} = \frac{n-1}{n} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^j = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{1-(1/n)} = 1$. Ceci justifie que l'évènement $(X_n = +\infty)$ (toujours la même boule) est négligeable comme attendu.

**b.** $k\,\mathbb{P}(X_n=k)=\dfrac{k(n-1)}{n^{k-1}}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}\frac{k(n-1)}{n^{k-1}}$ converge car le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}kx^{k-1}$ est égal à 1 et que $\left|\dfrac{1}{n}\right|<1$. De plus, comme $\forall x\in]-1;1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$, on obtient en dérivant $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$ donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}-1$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n)=(n-1)\times\left(\dfrac{n^2}{(n-1)^2}-1\right)=\dfrac{2n-1}{n-1}$. Par conséquent, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}(X_n)=2$ ce qu'on subodorait car plus $n$ augmente, plus l'évènement $(X_n=2)$ devient presque sûr. Comme $(X_n-1)(\Omega)=\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$ et que $\forall k\geqslant 1$, $\mathbb{P}(X_n-1=k)=\mathbb{P}(X_n=k+1)=\dfrac{n-1}{n^k}$ qui s'écrit aussi $\mathbb{P}(X_n-1=k)=\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=\left(1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right)^{k-1}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ avec $p=1-\dfrac{1}{n}\in]0;1[$, la variable aléatoire $X_n-1$ suit la loi géométrique de paramètre $p=\dfrac{n-1}{n}$ ce qui simplifie les calculs car alors $\mathbb{E}(X_n-1)=\dfrac{1}{p}=\dfrac{n}{n-1}$ donc, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(X_n)=1+\dfrac{n}{n-1}=\dfrac{2n-1}{n-1}$.

**c.** Comme $X_2=Y_2$, pour $k\geqslant 2$, on a $(Y_2=k)=(X_2=k)$ donc $\mathbb{P}(Y_2=k)=\dfrac{1}{2^{k-1}}$ d'après **a.**. On reconnaît cette loi, $Y_2-1$ suit la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$ car $\mathbb{P}(Y_2-1=k)=\mathbb{P}(Y_2=k+1)=\dfrac{1}{2^k}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$.

Pour $k\geqslant 3$, en notant $i$ le numéro de la première boule tirée, $r$ le premier rang pour lequel on tire une boule de numéro $j\neq i$, comme $6-i-j$ est le numéro tiré autre que $i$ et $j$ (car $i+j+(6-i-j)=1+2+3=6$), on a $\displaystyle(Y_3=k)=\bigsqcup_{i=1}^{3}\bigsqcup_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}\bigsqcup_{r=2}^{k-1}\left(\left(\bigcap_{a=1}^{r-1}(T_a=i)\right)\cap(T_r=j)\cap\left(\bigcap_{b=r+1}^{k-1}((T_k=i)\cup(T_k=j))\right)\right)\cap(T_k=6-i-j)$.
Ainsi, par incompatibilité de tous ces évènements, indépendance mutuelle des tirages et symétrie entre les numéros, $\displaystyle\mathbb{P}(Y_3=k)=3\times 2\times\sum_{r=2}^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{r-1}\times\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{k-r-1}\times\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{6}{3^k}\sum_{r=2}^{k-1}2^{k-r-1}=\frac{6(2^{k-2}-1)}{3^k}$.
À nouveau, comme $Y_3(\Omega)=\{3,4,5,\cdots,+\infty\}$, on vérifie que $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty}\mathbb{P}(Y_3=k)=\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{6(2^{k-2}-1)}{3^k}=1$. En effet, on a $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{6(2^{k-2}-1)}{3^k}=(6/4)\frac{(2/3)^3}{1-(2/3)}-6\frac{(1/3)^3}{1-(1/3)}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$. Ceci justifie que l'évènement $(Y_3=+\infty)$ (maximum deux numéros tirés éternellement) est négligeable comme attendu.

**19.12** Comme $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, sous réserve de convergence, on a $\displaystyle G_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)t^n$. Or, pour $t\in\mathbb{R}$, la suite $\left(\mathbb{P}(X=n)t^n\right)_{n\geqslant 0}=\left(\dfrac{e^{-\lambda}(\lambda t)^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ est bornée par croissances comparées. Ainsi, le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\mathbb{P}(X=n)t^n$ vaut $R=+\infty$ et on a $\forall t\in\mathbb{R}$, $\displaystyle G_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}(\lambda t)^n}{n!}=e^{-\lambda}e^{\lambda t}=e^{\lambda(t-1)}$.
Soit $a>0$ et $t\geqslant 1$, comme $\displaystyle(X\geqslant a)=\bigsqcup_{k\geqslant a}(X=k)$, par σ-additivité, et car $t\geqslant 1$ donc $\forall k\geqslant a$, $t^a\leqslant t^k$, on a $\displaystyle\mathbb{P}(X\geqslant a)=\sum_{k\geqslant a}\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{t^a}\sum_{k\geqslant a}t^a\,\mathbb{P}(X=k)\leqslant\frac{1}{t^a}\sum_{k\geqslant a}t^k\,\mathbb{P}(X=k)$ . Ainsi, $\mathbb{P}(X\geqslant a)\leqslant\dfrac{G_X(t)}{t^a}$ car $\displaystyle G_X(t)=\left(\sum_{k<a}\mathbb{P}(X=k)t^k\right)+\left(\sum_{k\geqslant a}\mathbb{P}(X=k)t^k\right)$ et que $\displaystyle\sum_{k<a}\mathbb{P}(X=k)t^k\geqslant 0$.
Avec $a=2\lambda>0$, $\mathbb{P}(X\geqslant 2\lambda)\leqslant\dfrac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}}=e^{\lambda(t-1)-2\lambda\ln(t)}$ pour tout $t\geqslant 1$. Soit $f:[1;+\infty[\to\mathbb{R}$ dérivable définie par $f(t)=\lambda(t-1)-2\lambda\ln(t)$, $f'(t)=\lambda-\dfrac{2\lambda}{t}=\dfrac{\lambda(t-2)}{t}$ donc $f$ est décroissante sur $[1;2]$ et croissante sur $[2;+\infty[$. En prenant $t=2$ ci-dessus car $\displaystyle\mathop{\mathrm{Min}}_{[1;+\infty[}(f)=f(2)$, $\mathbb{P}(X\geqslant 2\lambda)\leqslant e^{f(2)}=e^{\lambda-2\lambda\ln(2)}=\left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}$.