TD 20 : ESPACES NORMÉS

PSI 1 2025-2026 **vendredi 27 février 2026**

20.1 <u>*Mines PSI 2017*</u> Maxime Pouvereau II (note 11)

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Soit $f : [0;1] \to E$ une fonction continue telle que $f(0) \in A$ et $f(1) \notin A$. Prouver qu'il existe $t \in [0;1]$ tel que $f(t)$ soit sur la frontière de A.

20.2 <u>*ENS Ulm/Cachan PSI 2018*</u> Antoine Secher (note 8)

Soit E l'espace des fonctions continues, 1-périodiques, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $||f||_\infty = \underset{x\in\mathbb{R}}{\mathrm{Sup}}(|f(x)|$.

Soit g la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*,\ g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\dfrac{1}{(n+x)^2} + \dfrac{1}{(n-x)^2}\Big)$.

a. Montrer que g est continue sur $]-1;1[$. Calculer $g(0)$.

b. Montrer que $\varphi \in E$ si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + g(x)$ si $x \notin \mathbb{Z}$, $\varphi(n) = 0$ si $n \in \mathbb{Z}$.

c. Montrer que $L \in \mathcal{L}(E)$ et L continue si $L(f)(x) = f\Big(\dfrac{x}{2}\Big) + f\Big(\dfrac{x+1}{2}\Big)$. Calculer $|||L||| = \underset{f\in E, f\neq 0}{\mathrm{Sup}} \dfrac{||L(f)||_\infty}{||f||_\infty}$.

d. Montrer que $\forall x \notin \mathbb{Z},\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2} = \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$.

20.3 <u>*Mines PSI 2019*</u> Axel Brulavoine II (note 12,5) Soit E un espace vectoriel normé et deux vecteurs non nuls a et b de E. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = ||a + tb||$.

a. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle lipschitzienne ?

b. Si elles existent, calculer $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t)$.

c. Montrer que $I = \{t \in \mathbb{R} \mid a + tb \in B(0_E, 1)\}$ est un intervalle borné et ouvert ou que I est vide.

20.4 <u>*TPE, EIVP PSI 2019*</u> Maël Classeau I Soit $S = \big\{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2 = I_3\big\}$.

a. L'ensemble S est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

b. L'ensemble S est-il stable par produit ?

c. L'ensemble S est-il fermé ?

d. L'ensemble S est-il borné ?

20.5 <u>*ENS Cachan PSI 2022*</u> Colin Herviou-Laborde I (note 10) Soit I un segment de $\mathbb{R}$, $E = C^0(I, \mathbb{R})$, $f \in E$, $u : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. On dit que u est positive si on a $\forall f \in E,\ u(f) \geqslant 0$. On pose $e : x \to 1 \in E$.

a. Si u est positive, montrer que $\forall f \in E,\ |u(f)| \leqslant u(|f|)$.

b. Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall f \in E,\ |u(f)| \leqslant C||f||_{\infty,I}$. Calculer $\underset{\substack{f\in E\\ f\neq 0}}{\mathrm{Sup}} \dfrac{|u(f)|}{||f||_{\infty,I}}$.

20.6 <u>*ENS Cachan PSI 2022*</u> Colin Herviou-Laborde II (note 10)

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $p_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ définie par $p_2(M)^2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}^2$ si $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer p_2 est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Est-ce qu'on peut munir $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une structure d'espace euclidien telle que la norme euclidienne associée soit p_2. Si oui, donner ce produit scalaire.

c. Démontrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ ||MX||_2 \leqslant p_2(M)||X||_2$. Calculer $\underset{\substack{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\\ X\neq 0}}{\mathrm{Sup}} \dfrac{||MX||_2}{||X||_2}$.

20.7 <u>*ENS Cachan PSI 2022*</u> Margaux Millaret I (note 10) Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a. Montrer que si f est lipschitzienne, alors f est continue.

b. Est-ce que le fait que f soit lipschitzienne implique que f soit dérivable ?

20.8 *ENS Cachan PSI 2022* Camille Pucheu II (note 6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique. On note $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ (pour ce produit scalaire canonique).

a. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, montrer que si $\forall t \in \mathbb{R},\ at^2 + bt \geqslant 0$, alors $b = 0$.

b. Soit B une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ < Bx, x > \geqslant 0$. Montrer que pour un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $< Bx_0, x_0 >= 0$, on a $Bx_0 = 0$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique à laquelle on associe $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $F(x) =< Ax, x >$.

c. Montrer que $\underset{x \in S}{\mathrm{Inf}}\, F(x)$ existe et que cette borne inférieure est atteinte.

d. Soit $\lambda_1 = \underset{x \in S}{\mathrm{Min}}\, F(x)$ et $e_1 \in S$ tel que $\lambda_1 =< Ae_1, e_1 >$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ < (A - \lambda_1 I_n)x, x > \geqslant 0$.

e. Montrer que λ_1 est la plus petite valeur propre de A.

20.9 *Centrale Maths1 PSI 2022* Olivier Courmont II (note 20) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M. On suppose de plus que toutes les matrices M_k sont diagonalisables.

a. La matrice M est-elle diagonalisable ?

b. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire, de degré $n \in \mathbb{N}^*$, montrer (P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$) $\Longleftrightarrow$ ($\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}\,(z)|^n$).

c. La matrice M est-elle trigonalisable ?

20.10 *Mines PSI 2022* Amandine Darrigade II (note 8) Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$, $f \in E$ et $\phi(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)dt$.

a. Montrer que ϕ définit un endomorphisme de E.

b. Déterminer le plus petit réel K_1 tel que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant K_1 ||f||_\infty$.

c. Déterminer le plus petit réel K_2 tel que $\forall f \in E,\ ||\phi(f)||_1 \leqslant K_2 ||f||_1$.

20.11 *Mines PSI 2022* Paul Lafon I (note 18) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $B_n(A) = I_2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} A^k$.

a. Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $|a| < 1$ et $|b| < 1$, montrer que la suite $(B_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

b. Si $A = \lambda I_2 + N$ avec $|\lambda| < 1$, $N \neq 0$ et $N^2 = 0$, montrer que la suite $(B_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

c. Si $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ |\lambda| < 1$, montrer que $(B_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $B^2 = I_2 + A$.

20.12 *Mines PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche I (note 17) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose J_n la matrice dont tous les coefficients sont nuls à part ceux de la sur-diagonale qui valent 1. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit l'exponentielle de la matrice M, notée $\exp(M)$ ou e^M, par $e^M = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$.

a. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice k, montrer qu'il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $(X, NX, \cdots, N^{k-1}X)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En déduire que $k \leqslant n$.

b. On suppose que $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente d'indice n, montrer que N est semblable à J_n.

c. Soit A, B deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.

Montrer que $A + B$ est nilpotente et que $I_n + A$ est inversible.

d. Montrer que e^{J_n} est inversible. Montrer que $J_n e^{J_n}$ est nilpotente d'indice n.

e. Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$, montrer que $Pe^{J_n}P^{-1} = e^{PJ_nP^{-1}}$.

f. Montrer qu'il existe une matrice $\tilde{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n = \tilde{N}e^{\tilde{N}}$.

20.13 *Centrale Maths1 PSI 2024* Olivier Farje Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, on suppose que P n'admet pas de racine complexe. On définit alors la fonction I sur $\mathbb{R}_+$ par $I(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(re^{i\theta})}$.

a. Montrer que I est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que I est constante sur $\mathbb{R}_+$.

c. Montrer que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists k \in \mathbb{R}_+,\ \forall (r, \theta) \in [k; +\infty[\times [0; 2\pi],\ \left| \dfrac{1}{P(re^{i\theta})} \right| \leqslant \varepsilon$. Conclure.

20.14 *Mines PSI 2024* Armand Coiffe et Adrien Saugnac II (note 7,5 et 14,5)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Montrer que $A = \left\{ f(m) - f(n) \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2 \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.