TD 21 : ESPACES EUCLIDIENS

PSI 1 2025-2026 **vendredi 06 mars 2026**

21.1 <u>*E3A PSI 2015*</u> Marie Trarieux et Patxi Teillagorry Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in O(n)$.

Montrer (1) : $\Big|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j}\Big| \leqslant n$, (2) : $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \big|m_{i,j}\big| \geqslant n$ et (3) : $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \big|m_{i,j}\big| \leqslant n\sqrt{n}$. Cas d'égalité ?

21.2 <u>*Mines PSI 2017*</u> Iñigo Saez-Casares I (note 10) Soit $n \geqslant 1$ et $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $U^T = (1 \cdots 1)$. On pose $V = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid U$ est vecteur propre de A et de $A^T\}$ et $W = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall i \in [\![2;n]\!],\ a_{1,i} = a_{i,1} = 0\}$.
a. Montrer que W est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.
b. Justifier qu'il existe $P = ((p_{i,j}) \in O(n)$ avec $\forall i \in [\![1;n]\!],\ p_{i,j} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
c. Montrer que $A \in V \iff P^TAP \in W$. En déduire la structure de V et sa dimension.

21.3 <u>*Centrale Maths1 PSI 2022*</u> Anna Decrock (note 10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,(A)$ dans la base canonique.
a. Montrer que $\big(\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ X^TMY = 0\big) \iff (M = 0)$.
b. Montrer que P est symétrique. Caractériser la matrice PA.
c. En déduire que $\mathrm{Tr}\,(A)^2 \leqslant \mathrm{rang}\,(A) \times \mathrm{Tr}\,(A^TA)$. Quel est le cas d'égalité ?

21.4 <u>*Centrale Maths1 PSI 2022*</u> Thomas Lanne (note 8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $V_1 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Sp}(M) = \{1\}\}$.
a. Donner un élément de V_1. Prouver que $\forall M \in V_1,\ (M - I_n)^n = 0$.
b. On prend ici $n = 4$. Trouver une matrice $M \in V_1$ telle que $(M - I_4)^2 \neq 0$ et $(M - I_4)^3 = 0$.
c. On revient à n quelconque. Trouver toutes les matrices symétriques appartenant à V_1.
d. On prend ici $n = 3$. Trouver toutes les matrices orthogonales appartenant à V_1.

21.5 <u>*Centrale Maths1 PSI 2022*</u> Baptiste Savarit (note 15) Soit $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $\forall n \geqslant 2,\ P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$.
a. Étudier le degré, la parité et le coefficient dominant de P_n pour tout $n \geqslant 1$.
b. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.
c. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet n racines réelles distinctes.
d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $U \in O(n)$. Trouver, pour $k \in \mathbb{N}^*$, un polynôme Q_k tel que $S_{U^k} = Q_k(S_U)$ où, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, S_M le projeté d'une matrice M sur $S_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{R})$.

21.6 <u>*Mines PSI 2022*</u> Tony Géreaud I (note 15) Soit E l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$ dans E, on pose $(M|M') = aa' + 2bb' + cc'$.
a. Montrer que E muni de $(.|.)$ est un espace euclidien de dimension 3.
On note $G = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \forall M \in E,\ \mathrm{Tr}\,(f(M)) = \mathrm{Tr}\,(M)$ et $\det(f(M)) = \det(M)\}$.
b. Montrer que G est un sous-groupe de $(O(E), \circ)$.
c. Montrer que G est l'ensemble des éléments de $O(E)$ tels que $f(I_2) = I_2$.

21.7 <u>*CCP PSI 2019 et CCINP PSI 2022*</u> Benoît Le Morvan I et Margaux Millaret I (note 12,86 et 16,39) Soit $A \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A^T$.
a. Trouver un polynôme annulateur de A. En déduire les valeurs propres complexes possibles de A.
b. En déduire la valeur de $\det(A)$. Quelles sont les valeurs possibles pour χ_A ?
c. Montrer que A est orthogonale. Quelles sont les valeurs possibles de A ?

21.8 *CCINP PSI 2022* Thibault Sourdeval I (note 20) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, $u \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice dans la base canonique, $w \in \mathcal{L}(E)$ canoniquement associé à A^T.
a. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ (u(x)|y) = (x|w(y))$.
b. Montrer que si F est un sous-espace stable par u, alors $F^\perp$ est stable par w.
c. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et A^T sont-elles diagonalisables ? Donner les sous-espaces stables par u.

21.9 *ENS Cachan PSI 2024* Tiago Genet Soit $\big(E, (.|.)\big)$ un espace euclidien de dimension $d \geqslant 2$.
Pour $u \in E$ unitaire et $a \in \mathbb{R}$, on définit $f_a : E \to E$ par $f_a(x) = x + a(x|u)u$.
a. Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ f_a \circ f_b = f_{a+b+ba}$. En déduire que $f_a \circ f_b = f_b \circ f_a$.
b. Montrer que $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall p \in \mathbb{N},\ f_a^p = f_{(a+1)^p-1}$ et que f_a est inversible si et seulement si $a \neq -1$.
c. Montrer que f_a est autoadjoint pour tout réel a.
d. Montrer que f_a est une isométrie si et seulement si $a = 0$ ou $a = -2$.

21.10 *Centrale Maths1 PSI 2024* Guillaume Leduc Soit E un espace euclidien pour un produit scalaire $(\,.\,|\,.\,)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, v un vecteur non nul de E et $f : E \to E$ définie par $\forall x \in E,\ f(x) = x - \lambda(x|v)v$.
a. f est-il un endomorphisme autoadjoint de E ?
b. Pour quelles valeurs de λ l'endomorphisme f est-il une isométrie vectorielle ?
c. On suppose que f est une isométrie vectorielle, déterminer les éléments caractéristiques de f.
d. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux réflexions commutent.

21.11 *CCP PSI 2018 et Centrale Maths1 PSI 2024* Charlotte Nivelle II et Clément Reiner
Soit $\mathbb{U}' = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \mid |z| = 1\}$ et $h : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}$ définie par $h(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$.
a. Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ dans lui-même et induit une bijection de $\mathbb{U}'$ dans $i\mathbb{R}$.
b. Représenter $\mathbb{U}'$ dans le plan complexe. Pour $\theta \in]-\pi; \pi[$, représenter le point d'affixe $h(e^{i\theta})$.
Soit $O' = \{M \in O(2) \mid -1 \notin \mathrm{Sp}(M)\}$ et $H : O' \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $H(M) = (I_2 - M)(I_2 + M)^{-1}$.
c. Justifier que H est bien définie et donner le spectre de $H(M)$ si $M \in O'$.
d. Montrer que H réalise une bijection entre O' et les matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

21.12 *Centrale Maths1 PSI 2018 et CCINP PSI 2021 et Centrale Maths1 PSI 2024*
Julien Langlais et Mehdi Hamdaoui II et Guilhem Thébault (note 15, 11,82 et ?)
Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Sp}(M) = \{m_{1,1}, \cdots, m_{n,n}\}$ (valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité) : ces matrices sont dites à diagonale propre.
On note S_n (resp. A_n) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit à diagonale propre.
b. Déterminer $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap S_n$. Trouver $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n$.
c. Montrer que si un sous-espace F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $F \subset \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, alors $\dim(F) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.

21.13 *Mines PSI 2024* Jules Campistron I (note 17,5) Soit $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ et l'application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(M) = < MX, X >$. Déterminer $\Phi(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $\Phi(O_n(\mathbb{R}))$.

21.14 *CCINP PSI 2024* Yasmine Azzaoui II (note 14,7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $AA^T = A^TA$.
a. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^T)$, et que $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}\,(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.
b. En déduire qu'il existe $r \in [\![0; n]\!]$ et $P \in O(n)$ tels que $A = PBP^T$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $U \in GL_r(\mathbb{R})$.

21.15 *CCINP PSI 2024* Romane Mioque I (note 19,37) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^TM = MM^T$ et $M^2 + 2I_2 = 0$.
a. La matrice M^TM est-elle diagonalisable ? Montrer que $\mathrm{Sp}(M^TM) \subset \{-2, 2\}$.
b. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(M^TM)$, alors $\lambda \geqslant 0$. En déduire $\mathrm{Sp}(M^TM)$.
c. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} M \in O(2)$. Quelles sont les $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^TM = MM^T$ et $M^2 + 2I_2 = 0$?