TD 22 : ESPACES EUCLIDIENS

PSI 1 2025-2026 **vendredi 13 mars 2026**

22.1 *Centrale Maths1 PSI 2018* Raphaël Pobeda (note 14) Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme de E. On définit $\Phi : E^2 \to \mathbb{R}$ par $\Phi(x,y) = (u(x)|y)$.

a. Montrer que Φ est bilinéaire. Si on suppose que Φ est symétrique, montrer que u est diagonalisable.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le spectre de u pour que Φ soit un produit scalaire.

c. On suppose que Φ symétrique et que u est de rang 1.

Montrer qu'il existe une forme linéaire $\ell : E \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in E^2,\ \Phi(x,y) = \varepsilon \ell(x)\ell(y)$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

22.2 *Centrale Maths1 PSI 2019* Thomas Méot (note 17) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$. On pose $E = \mathbb{R}^n$ qu'on munit du produit scalaire canonique noté $< .\,,\,. >$.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^T M$.

c. Si $0 \notin \mathrm{Sp}(M)$, montrer qu'il existe B triangulaire supérieure avec coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = B^T B$. Indication : montrer que $\varphi : (X,Y) \mapsto X^T A Y$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

22.3 *Mines PSI 2019* Perrine Hoffmann II (note 14) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on munit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $(U,V) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ symétriques telles que $\forall X \in E,\ (UX|X) \geqslant 0$ et $(VX|X) \geqslant 0$.

On se propose de montrer l'inégalité (I) : $\det(U+V) \geqslant \det(U) + \det(V)$.

a. Montrer (I) si U et V ne sont inversibles ni l'une ni l'autre.

b. Montrer (I) si U inversible. Indication : on pourra commencer par le cas $U = I_n$. Conclure.

c. Étudier le cas d'égalité dans (I).

22.4 *Mines PSI 2022* Noé Chassagne II (note 19) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $n(A) = \mathrm{Tr}\,(AA^T)$.

a. Montrer que $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ n(AB) \leqslant n(A)n(B)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, on note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A.

b. Montrer que $(\lambda_n - \lambda_1)^2 \leqslant 2n(A)$. Caractériser le cas d'égalité.

22.5 *Mines PSI 2022* Louis Lacarrieu II (note 9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(M) = M + M^T$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. f est-il diagonalisable ? Déterminer les sous-espaces propres de f.

22.6 *Mines PSI 2022* Paul Mayé II (note 13,5)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(X_1, \cdots, X_n)$ de E telle que $(AX_1, \cdots, AX_n)$ est une base orthogonale de E.

22.7 *CCINP PSI 2022* Camille Pucheu I (note 19,04) Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs propres de $M(a,b,c)$.

b. Calculer $d = \det\big(M(a,b,c)\big)$. Si $d = 0$, donner $\mathrm{Ker}\,\big(M(a,b,c)\big)$ et $\mathrm{Im}\,\big(M(a,b,c)\big)$.

c. La matrice $M(a,b,c)$ est-elle diagonalisable ?

d. Si $a = b$ et $c \neq 0$, donner des bases des sous-espaces propres de $M(a,a,c)$ et en déduire une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $M(a,a,c) = PDP^{-1}$.

22.8 *Mines-Télécom PSI 2022* Marius Desvalois I Soit $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, (A, B) une famille libre de E et $F = \mathrm{Vect}(A, B)$. On pose $M = AB^T + BA^T$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.
a. Trouver $\mathrm{Ker}(M)$. Déterminer rang (M) et Im (M).
b. M est-elle diagonalisable ? Quelles sont les valeurs propres de M ?

22.9 *X PSI 2024* Jules Campistron I

a. Soit $a, \lambda_1, \lambda_2, D_1, D_2$ des réels tels que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ et $D_1 \geqslant D_2$. Soit $A = \begin{pmatrix} D_1 & a \\ a & D_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont λ_1, λ_2. Montrer que $\lambda_1 + \lambda_2 = D_1 + D_2$ et $\lambda_1 \geqslant D_1$.
b. Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique avec $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ et $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ et soit D_1, D_2 réels tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = D_1 + D_2$, $D_1 \geqslant D_2$ et $\lambda_1 \geqslant D_1$. Montrer $\exists a \in \mathbb{R},\ A$ et $\begin{pmatrix} D_1 & a \\ a & D_2 \end{pmatrix}$ orthosemblables.

22.10 *Centrale Maths1 PSI 2024* Axel Corbière Soit E euclidien dont on note $||\,.\,||$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $(.|.)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est une contraction si $\forall x \in E,\ ||f(x)|| \leqslant ||x||$.
a. Si f est autoadjoint, montrer que f est une contraction si et seulement si $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f),\ |\lambda| \leqslant 1$.
b. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que si f est autoadjoint et $x \in E$, $||P(f)(x)|| \leqslant \Big(\underset{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)}{\mathrm{Sup}} (|P(\lambda)|) \Big) ||x||$.

22.11 *Centrale Maths1 PSI 2024* Nathan Jung Soit E un espace euclidien de dimension $p \geqslant 1$ dont on note $(\,.\,|\,.\,)$ le produit scalaire et $||\,.\,||$ la norme euclidienne associée. Soit u un endomorphisme autoadjoint de E dont on note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_p$ les valeurs propres. On note enfin $S = \{x \in E \mid ||x|| = 1\}$ la sphère unité de E.
a. Montrer que $x \mapsto (u(x)|x)$ admet un minimum sur S et que $\lambda_1 = \underset{x \in S}{\mathrm{Min}} \big((u(x)|x)\big)$.
c. Montrer que $\lambda_2 = \underset{F \in \mathcal{E}_2}{\mathrm{Min}} \Big(\underset{x \in S \cap F}{\mathrm{Max}} \big((u(x)|x)\big) \Big)$ où $\mathcal{E}_2$ est l'ensemble des plans vectoriels de E.

22.12 *Mines PSI 2024* Armand Dépée I (note 15) Soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Pour un entier $n \geqslant 2$, on note $A_n = (f_{i+j-2})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a. Exprimer A_2, A_3, A_4. Pour $n \geqslant 2$, quelle est la multiplicité de 0 pour A_n.
b. Montrer qu'il existe deux valeurs propres de A_n non nulles α_n et β_n, telles que $\alpha_n < 0 < \beta_n$.
c. Quelle est la nature de la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 2}$? Et de $(\beta_n)_{n \geqslant 2}$?

22.13 *Mines PSI 2024* Valentine Girard II (note 12,5) Trouver les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^T M M^T = I_n$.

22.14 *Mines PSI 2024* Antoine Métayer I (note 15) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$. Si $A \neq 0 \in E$, on définit l'application f_A qui à un polynôme $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne de P par A.
a. Montrer que $< .,. >: (P, Q) \in E^2 \mapsto < P, Q > = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur E.
b. Montrer que f_A est un endomorphisme de E.
c. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que f_A soit un projecteur orthogonal.
d. Trouver tous les polynômes A tel que f_A est un projecteur orthogonal si $n = 3$.

22.15 *Mines-Télécom PSI 2024* Mattéo Aumaitre II (note 10) Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne non nul et la suite de vecteurs colonnes $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall k \in \mathbb{N},\ Y_k = \dfrac{S^k X}{||S^k X||}$. Montrer que la suite $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur propre de S.