TD 23 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PSI 1 2025-2026 **vendredi 20 mars 2026**

23.1 *Mines PSI 2014* Soufiane

Soit E l'espace des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $\Phi : E \to E$ définie par $\Phi(f) = g$ où $g(t) = f'(t)+tf(t)$.

a. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ. De Φ^2.

b. Résoudre l'équation $(E)\ :\ y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

23.2 *Mines PSI 2016* Samuel Cailleaux II (note 17)

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $(E)\ :\ y'' + qy = 0$. Soit f une solution de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

a. Forme de l'ensemble des solutions de (E). Structure ? Dimension ?

b. Unicité de f ? Prouver que les zéros de f sont isolés.

c. Supposons que $\forall x \in \mathbb{R},\ q(x) \leqslant 0$. Prouver que f^2 est convexe. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 1$.

23.3 *Mines PSI 2018* Pauline Lamaignère II (note 11) Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E)\ :\ 2t(1+t)y' + (1+t)y = 1$ sur des intervalles à préciser. Indication : on cherchera une solution DSE.

23.4 *E3A PSI 2018* Claire Raulin

Soit $(E)\ :\ 2t^2y'' + y = 0$ et y solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $z : u \mapsto y(e^u)e^{-u/2}$.

a. Exprimer $y(t)$ en fonction de $z(\ln(t))$.

b. Montrer que z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (E').

c. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

23.5 *Centrale Maths1 PSI 2019* Charles Broquet (note 12) On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}\,dt$.

a. Donner le domaine de définition de F. Déterminer un équivalent de F en 0.

b. Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ 2xy' + y = \ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

c. La (les) solution (s) de la question **b.** est-elle (sont-elles) développable(s) en série entière sur $[0;1]$?

23.6 *Mines PSI 2019* Romain Cornuault I (note 13) On cherche $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $(E)\ :\ -2y'' + xy' + y = 0$ avec $y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$. En cas de convergence, on pose $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2}\,dt$.

a. Y a-t-il existence et/ou unicité d'une solution au problème posé ?

b. Donner une expression explicite de y vérifiant les conditions ci-dessus.

c. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f. Conclure.

23.7 *Mines PSI 2019* Lola Josseran I (note 13) On considère l'équation $(E)\ :\ (x^2 - x)y'' + (x+4)y' - y = 0$.

a. Donner les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0.

b. Existe-t-il des solutions de (E) non développables en série entière au voisinage de 0 ?

23.8 *ENS Cachan PSI 2022* Jimmy Guertin (note 11) Soit $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et $(E)\ :\ y'' + py' + qy = 0$.

a. Soit f une solution de (E) non identiquement nulle avec $a \in \mathbb{R}$ telle que $f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta\,;a+\eta] \setminus \{a\},\ f(x) \neq 0$.

Soit f et g deux solutions de (E) telles que (f,g) est libre et $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$.

b. Établir une équation différentielle vérifiée par W. En déduire une expression de W en fonction de $t_0 \in \mathbb{R}$.

c. Montrer que pour tout réel t, on a $W(t) \neq 0$.

d. Soit $a < b$ tels que $f(a) = f(b) = 0$ et $\forall x \in]a;b[,\ f(x) \neq 0$. Montrer que g s'annule une seule fois sur $]a;b[$.

23.9 *Centrale Maths1 PSI 2022* Paul Mayé (note 19)

Soit $\mathsf{E} = \left\{ \mathsf{f} \in \mathsf{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)dt \text{ converge} \right\}$. On admet que E est un sous-espace vectoriel de $\mathsf{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que l'application $\varphi : \mathsf{E} \to \mathsf{E}$ définie par $\varphi(f) = F$ avec $F(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t)dt$ est linéaire.

a. Soit $f \in E$, montrer que $F = \varphi(f) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = F'(x) + f(x)$.
b. En déduire que φ n'est pas surjective. Donner les éléments propres de φ.
c. Soit $f \in E$ de classe C^1 et bornée, montrer que $f' \in E$ et que $\big(\varphi(f)\big)' = \varphi(f')$.
d. Montrer que si on pose F l'ensemble des fonctions bornées et C^1 de E, alors F est stable par φ. Quel est le spectre de l'endomorphisme induit par φ dans F ?

23.10 *Mines PSI 2022* Thibault Sourdeval II (note 9) Soit I un intervalle et $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$ dérivables. On définit le wronskien de α, β comme la fonction $w : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall t \in I,\ w(t) = \begin{vmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \alpha'(t) & \beta'(t) \end{vmatrix}$.

a. Montrer que si φ et ψ sont des solutions de $(E)\ :\ y'' = ay' + by$ avec $a, b : I \to \mathbb{R}$ continues, alors le wronskien w de φ, ψ vérifie une équation différentielle (F) d'ordre 1 sur I.
b. Si φ ne s'annule pas sur I, exprimer $\left(\dfrac{\psi}{\varphi}\right)'$ en fonction de w et φ.
c. Trouver une solution φ développable en série entière de $(E)\ :\ 2ty'' + y' - y = 0$ telles que $\varphi(0) = 1$.
d. En déduire une autre solution ψ de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ non colinéaire à φ. Et sur $\mathbb{R}_-^*$?
e. Donner toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

23.11 *CCINP PSI 2022* Naïs Baubry I et Anna Decrock I (note 13,13 et 17,14)

Soit les équations $(E_0)\ :\ x^2y'' - 2y = 0$ et $(E)\ :\ x^2y'' - 2y = x^3$.
a. Trouver une solution polynomiale u de (E_0).
b. Trouver v solution de (E_0), telle que (u, v) libre et $v = uz$ avec z de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.
c. Déduire de la question précédente les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.
d. Trouver toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

23.12 *X PSI 2024* Guilhem Thébault II

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et 2π-périodique et l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' + \varphi y = 0$.
a. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est $\mathrm{Vect}(y_1, y_2)$ où $y_1(0) = 0,\ y_1'(0) = 1,\ y_2(0) = 1,\ y_2'(0) = 0$.
b. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de (E), alors $g : x \mapsto f(x + 2\pi)$ est aussi solution de (E).
c. Quelle est la nature de l'application $\psi : f \to g$?
d. Montrer que si un réel λ est valeur propre de l'endomorphisme ψ, alors λ est solution de l'équation polynomiale $(P)\ :\ x^2 - \big(y_1'(2\pi) + y_2(2\pi)\big)x + \big(y_1'(2\pi)y_2(2\pi) - y_2'(2\pi)y_1(2\pi)\big) = 0$.

23.13 *Mines PSI 2024* Clément Reiner I (note 12,5)

a. Montrer que $f : x \mapsto \int_0^1 \mathrm{Arctan}^2(xt)dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Donner la valeur de $f(0)$.
b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = -\dfrac{f(x)}{x} + \dfrac{\mathrm{Arctan}^2(x)}{x}$.
d. Déterminer les solutions de $(E)\ :\ xy' + y = \mathrm{Arctan}^2(x)$ sur $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{R}_+^*$. Trouver les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

23.14 *CCINP PSI 2024* Olivier Farje II (note 14,87)

La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Résoudre $(S)\ :\ \begin{cases} x'' = & -x + y \\ y'' = & -x + 2y - z \\ z'' = & -3x + y + 2z \end{cases}$.

23.15 *Mines-Télécom PSI 2024* Clément Lacoste I (note 15) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^0 et $f(2x) = 1 + \int_0^x (x - t)f(2t)dt$.
a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
b. Justifier que f est solution d'une équation différentielle du second ordre (E) qu'on déterminera. Conclure.