TD 24 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PSI 1 2025-2026 **mercredi 25 mars 2026**

Géométrie :

24.1 Déterminer les plans tangent à $S\ :\ z^3 = xy$ contenant la droite $D : x - 2 = y - 3(z+1) = 0$.

24.2 Déterminer les plans tangents à $S\ :\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ qui sont orthogonaux à $D\ :\ x = \frac{y}{3} = -\frac{z}{2}$.

24.3 *TPE PSI 2015* Déterminer les plans tangents à $S\ :\ z^2 = xy$ et contenant la droite $D\ :\ x = y = z$.

Calcul différentiel :

24.4 *Centrale PSI 2013* Soit les deux parties $D_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $D_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application $\varphi : D_2 \to D_1$ définie par $\forall (u,v) \in D_2,\ \varphi(u,v) = (x,y) = \left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u}{v}\right)$.

a. Montrer que φ est de classe C^1 et bijective.

b. Résoudre dans D_1 l'équation $(E)\ :\ 2xy\frac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y} = 2xf$ en posant $x = \frac{u^2+v^2}{2}$ et $y = \frac{u}{v}$.

24.5 *Petites Mines PSI 2015* Patxi Teillagorry Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $g(x,x) = f(x)$ et $g(x,y) = \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)dt$ si $x \neq y$. On pose $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$.

a. Exemple, prendre $f(x) = x^2$. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

b. Montrer que g est de classe C^1 sur D et calculer $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$.

c. Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que g admet une dérivée partielle en (a,a) selon x et selon y. Les calculer.

d. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

24.6 *Mines PSI 2016* Sylvin Bielle I (note 8) On note $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Soit $p \in \mathbb{R}$ et $g \in C^2(U, \mathbb{R})$. Trouver $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x,y) \in U,\ g(x,y) = f(x^2+y^2)$ si $\forall (x,y) \in U,\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = (x^2+y^2)^p$.

24.7 *ENS Cachan PSI 2017* Thomas Laborde (note 5,5)

Soit $u \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} \frac{|u(x)|}{||x||} = +\infty$. On pose $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| < r\}$ pour $r > 0$.

a. Cas $n = 1$: ∇u est-il surjectif ?

Pour la suite, on prend $n = 2$ et on suppose que ∇u n'est pas surjectif.

b. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^2$ tel que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = u(x) - (x|v)$ soit de classe C^1, que ∇f ne s'annule pas, et que $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} \frac{|f(x)|}{||x||} = +\infty$.

c. Soit $r > 0$ et $(a,b) \in (\mathbb{R}^2 \setminus B_r)^2$, montrer qu'il existe $\gamma : [0;1] \to (\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$ telle que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. En déduire que $f(\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$ est un intervalle. Conclure.

24.8 *Centrale Maths1 PSI 2019* Victor Margueritte (note 14) Dans $\mathbb{R}^2$, soit D le disque fermé de centre O et de rayon 1 (disque fermé unité). On définit $f : D \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = -(x^2+y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^2+y^2) + 1$.

a. Calculer le gradient de $F : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,y,z) = f(x,y) - z$.

b. Soit $S = \{(x,y,z) \in D \times \mathbb{R} \mid z = f(x,y)\}$ la surface représentative de f. Déterminer les points $(x,y) \in D$ où le plan tangent à S en (x,y,z) est normal au vecteur $\overrightarrow{v} = (0,1,-1)$.

c. Soit $\gamma : t \mapsto (t,t)$ et $g = f \circ \gamma$. Donner l'ensemble de définition de g, calculer g' par la règle de la chaîne. En déduire les extrema de la fonction g sur son ensemble de définition.

24.9 *CCP PSI 2019* Perrine Hoffmann et Quentin Vacher I (notes 10,13 et 15,39) Soit $f : (x, y) \mapsto x^3y^2(1-x-y)$.

a. Trouver les points critiques de f.

b. Étudier les extrema locaux de f. Admet-elle des extrema absolus ?

24.10 *ENS Cachan PSI 2022* Olivier Baesen et Thibault Le Gal et Antoine Prévost (note 13 et 10 et 10)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ et $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ définie par $\Phi(M) = M^TAM$.

a. Montrer que Φ, vue comme une application de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, est de classe C^1.

b. Rappeler la définition de la différentielle.

c. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $d_{I_n}\Phi$ la différentielle de Φ en I_n.
- Montrer que $\Phi(I_n + H) - \Phi(I_n) = H^TA + AH + H^TAH$.
- En déduire que $d_{I_n}\Phi(H) = H^TA + AH$.
- Déterminer le noyau et l'image de $d_{I_n}\Phi$.

d. Montrer que $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM \in S_n(\mathbb{R})\}$ et $\mathrm{Ker}(d_{I_n}\Phi)$ sont supplémentaires.

e. Montrer qu'il existe un ouvert U contenant I_n tel que $U \subset GL_n(\mathbb{R})$.

24.11 *Mines PSI 2022* Jimmy Guertin I (note 12) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$.

On définit la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $F(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2}\,dt$.

a. Montrer l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Trouver une relation entre I_{n+2} et I_n pour $n \in \mathbb{N}$.

b. Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer I_{2p+1} et I_{2p} en admettant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

c. Calculer $F(x, y)$. Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

d. Déterminer les points critiques de F, puis ses éventuels extrema.

24.12 *Centrale Maths1 PSI 2024* Edward Bauduin Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

a. Donner l'équation du plan tangent à $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ et } z = f(x, y)\right\}$ en $(a, b, c) \in S$.

b. Montrer que f admet un minimum local en un unique point $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ à déterminer.

c. Montrer que $K = \left\{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid xy \leqslant 3 \text{ et } x \geqslant \dfrac{1}{3} \text{ et } y \geqslant \dfrac{1}{3}\right\}$ est un fermée borné de $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

d. En déduire que f admet en (x_0, y_0) un minimum absolu.

24.13 *Centrale Maths1 PSI 2024* Amjad Belmiloud

Soit les ensembles $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 8\}$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leqslant 8\}$. Soit les fonctions $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $\Phi(t) = \big(2\cos(t), \sqrt{2}\sin(t)\big)$ et $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2} + x^2$.

a. Montrer que Φ réalise une bijection de classe C^1 de $[0; 2\pi[$ dans $\mathcal{E}$.

b. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur Δ.

c. Déterminer $\underset{\Delta}{\mathrm{Min}}(f)$. Montrer que le maximum de f sur Δ est atteint sur $\mathcal{E}$ et calculer $\underset{\Delta}{\mathrm{Max}}(f)$.

24.14 *Centrale Maths1 PSI 2024* Lou Goiffon et Tom Sanchez

Soit $H = [-1; 1] \times [0; 1]$, $O =]-1; 1[\times]0; 1[$ et $f : H \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sqrt{y - yx^2}\,(x - xy)$.

a. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur H.

b. Trouver les extrema de f sur O. Calculer la valeur du maximum global de f sur H.

24.15 *E3A PSI 2015 et Centrale Maths1 PSI 2024* Florie Montpezat et Martin Mayot

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 1$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},\ f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$.

a. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. Trouver les points critiques de f. Déterminer les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.

24.16 *Mines PSI 2024* Martin Mayot II (note 5) Soit $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^1 sur $\mathbb{R}^n$ avec $\displaystyle\lim_{||x|| \to +\infty} \frac{f(x)}{||x||} = +\infty$.

a. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.

b. Montrer que l'application $x \mapsto \nabla f(x)$ est surjective.