

DM 9 : MINES PSI 2016 MATHS1

PSI 1 2025/2026

pour le mercredi 25 février 2026

PARTIE 1 : Égalité de KARAMATA

- 1** Comme $x^{p+1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 1^-$, par composition des limites, $\sqrt{1-x^{p+1}} f(x^{p+1}) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\pi}$.
Or $1-x^{p+1} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} (p+1)(1-x)$ puisque la dérivée de $x \mapsto x^{p+1}$ en 1 vaut $p+1$. Par conséquent,
 $\sqrt{p+1} \sqrt{1-x} f(x^{p+1}) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\pi}$. Finalement, $\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p+1}}$.
- 2** La fonction $t \mapsto \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0; +\infty[$.
• Comme $\frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et que $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0; 1]$, il en va donc de même de $t \mapsto \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}$.
• De plus, $\frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} o(e^{-(p+1)t})$ et $t \mapsto e^{-(p+1)t}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, ainsi $t \mapsto \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}$ aussi.
Alors $t \mapsto \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt$ converge.
- 3** Grâce au changement de variable $(p+1)t = u$, puisque $u \mapsto \frac{u}{p+1}$ est une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même, il vient d'après l'énoncé $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{p+1}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p+1}}$.
- 4** On a finalement, grâce aux questions 1 et 3, $\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt$.
- 5** Puisque toutes les séries et intégrales convergent, par linéarité de chacun des membres, il suffit de montrer le résultat lorsque $Q = X^p$ car tout polynôme s'écrit $Q = \sum_{p=0}^d q_p X^p$. Dans ce cas, d'après la question 4,
 $\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k Q(x^k) = \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} Q(e^{-t})}{\sqrt{t}} dt$.
- 6** La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$. De plus, comme $\|h\|_{\infty, [0; 1]} = e$ et que h est positive, $0 \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t}) \leq \frac{e \times e^{-t}}{\sqrt{t}}$. D'après la question 2 et le théorème de comparaison, on en déduit que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})$ est intégrable sur $]0; +\infty[$. De plus, $h(e^{-t}) = 0$ si $t > 1$ et $e^{-t} h(e^{-t}) = 1$ si $t \leq 1$. Par conséquent, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t}) dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_0^1 = 2$.
- 7** Puisque $|a_k x^k h(x^k)| \leq e |a_k x^k|$ et que $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ converge absolument par hypothèse, la série $\sum_{k \geq 0} a_k x^k h(x^k)$ converge aussi absolument pour $x \in [0; 1[$. On pouvait aussi dire que, comme $x \in [0; 1[$, la suite $(x^k)_{k \geq 0}$ tend vers 0, donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq x^k < e^{-1}$ dès que $k \geq k_0$. Alors, par définition de h , $a_k x^k h(x^k) = 0$ si $k \geq k_0$ et $\sum_{k \geq 0} a_k x^k h(x^k)$ converge car elle a un nombre fini de termes non nuls.
- 8** On a $h(e^{-\frac{k}{n}}) = 0$ lorsque $k > n$ et $e^{-\frac{k}{n}} h(e^{-\frac{k}{n}}) = 1$ si $k \leq n$. Mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1^-$; par suite, $\sqrt{1-e^{-\frac{1}{n}}} \sum_{k=0}^n a_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$ d'après le résultat admis. Or $1-e^{-\frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Par conséquent, $\sum_{k=0}^n a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

PARTIE 2 : Un théorème taubérien

9 On a $S_{\lfloor \beta n \rfloor} - S_n = \sum_{k=\lfloor \beta n \rfloor+1}^{\lfloor \beta n \rfloor} a_k \leq (\lfloor \beta n \rfloor - n) a_n$ par décroissance de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$. Avec les hypothèses du préambule, $\lfloor \beta n \rfloor - n > 0$, ce qui permet d'obtenir la première inégalité par quotient.

De même, on a $S_n - S_{\lfloor \alpha n \rfloor} = \sum_{k=\lfloor \alpha n \rfloor+1}^n a_k \geq (n - \lfloor \alpha n \rfloor) a_n$ et l'on conclut de même.

On a donc bien la double inégalité attendue, $\frac{S_{\lfloor \beta n \rfloor} - S_n}{\lfloor \beta n \rfloor - n} \leq a_n \leq \frac{S_n - S_{\lfloor \alpha n \rfloor}}{n - \lfloor \alpha n \rfloor}$.

10 Puisque $\gamma n - 1 \leq \lfloor \gamma n \rfloor \leq \gamma n$, on a $\lfloor \gamma n \rfloor \underset{+\infty}{\sim} \gamma n$ par encadrement. Ainsi, $S_{\lfloor \gamma n \rfloor} \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{\lfloor \gamma n \rfloor} \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{\gamma n}$.

11 On peut écrire, pour $\gamma > 0$,

$$S_{\lfloor \gamma n \rfloor} = 2\sqrt{\gamma n} + o(\sqrt{n}) - 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) = 2(\sqrt{\gamma} - 1)\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$$

et $\lfloor \gamma n \rfloor - n \underset{+\infty}{=} (\gamma - 1)n + o(n)$.

Par conséquent, en supposant à présent que $\gamma \neq 1$, et n assez grand pour que $\lfloor \gamma n \rfloor - n \neq 0$,

$$\sqrt{n} \frac{S_{\lfloor \gamma n \rfloor} - S_n}{\lfloor \gamma n \rfloor - n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n} \frac{2(\sqrt{\gamma} - 1)\sqrt{n}}{(\gamma - 1)n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2(\sqrt{\gamma} - 1)}{\gamma - 1}.$$

Il en résulte l'existence de $N(\gamma)$ tel que, si $n \geq N(\gamma)$, alors

$$\frac{2(\sqrt{\gamma} - 1)}{\gamma - 1} - \varepsilon \leq \sqrt{n} \frac{S_{\lfloor \gamma n \rfloor} - S_n}{\lfloor \gamma n \rfloor - n} \leq \frac{2(\sqrt{\gamma} - 1)}{\gamma - 1} + \varepsilon.$$

Appliquons cette inégalité lorsque $\gamma = \beta$, puis lorsque $\gamma = \alpha$. Si $N = \max(N(\alpha), N(\beta))$ et si $n \geq N$,

$$\frac{2(\sqrt{\beta} - 1)}{\beta - 1} - \varepsilon \leq \sqrt{n} \frac{S_{\lfloor \beta n \rfloor} - S_n}{\lfloor \beta n \rfloor - n} \leq \sqrt{n} a_n \leq \frac{S_n - S_{\lfloor \alpha n \rfloor}}{n - \lfloor \alpha n \rfloor} \leq \frac{2(\sqrt{\alpha} - 1)}{\alpha - 1} + \varepsilon.$$

12 Puisque $\frac{2(1 - \sqrt{t})}{1 - t} = \frac{2}{1 + \sqrt{t}} \xrightarrow{t \rightarrow 1} 1$, il existe η , que l'on peut choisir dans $]0; 1[$, tel que, si $t \in [1 - \eta; 1 + \eta]$,

alors $1 - \varepsilon \leq \frac{2(1 - \sqrt{t})}{1 - t} \leq 1 + \varepsilon$. Posons $\alpha = 1 - \eta$ et $\beta = 1 + \eta$. Alors, pour $n \geq N$, on obtient

$$1 - 2\varepsilon \leq \sqrt{n} a_n \leq 1 + 2\varepsilon.$$

Nous avons ainsi démontré que $\sqrt{n} a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

PARTIE 3 : Marche aléatoire

13 Par indépendance $X_{k+1}, \dots, X_n$, comme toutes les variables aléatoires X_m suivent la même loi,

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i_1, \dots, X_n = i_{n-k}) = \mathbb{P}(X_{k+1} = i_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n = i_{n-k}) = \mathbb{P}(X_1 = i_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_{n-k} = i_{n-k}).$$

On a donc $\mathbb{P}(X_1 = i_1, \dots, X_{n-k} = i_{n-k}) = \mathbb{P}(X_1 = i_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_{n-k} = i_{n-k})$ par indépendance de la famille $(X_1, \dots, X_{n-k})$, ce qui emporte le résultat.

14 On a $S_{k+1} - S_k = X_{k+1}, \dots, S_n - S_k = X_{k+1} + \dots + X_n$. Par conséquent,

$$(S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}) = (X_{k+1} = j_1, X_{k+2} = j_2 - j_1, \dots, X_n = j_{n-k} - j_{n-k-1}).$$

Par la question 14,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}) &= \mathbb{P}(X_{k+1} = j_1, X_{k+2} = j_2 - j_1, \dots, X_n = j_{n-k} - j_{n-k-1}) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = j_1, X_2 = j_2 - j_1, \dots, X_{n-k} = j_{n-k} - j_{n-k-1}) \\ &= \mathbb{P}(S_1 = j_1, \dots, S_{n-k} = j_{n-k}), \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de la même transformation que celle qui débute la question.

15 Par définition de l'évènement A_k^n ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_k^n) &= \mathbb{P}(S_k = 0, S_{k+1} \neq 0, \dots, S_n \neq 0) = \mathbb{P}(S_k = 0, S_{k+1} - S_k \neq 0, \dots, S_n - S_k \neq 0) \\ &= \mathbb{P}(S_k = 0, X_{k+1} \neq 0, \dots, X_{k+1} + \dots + X_n \neq 0). \end{aligned}$$

Comme $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$ et $(X_{k+1}, X_{k+1} + X_{k+2}, \dots, X_{k+1} + \dots + X_n)$ sont deux variables aléatoires indépendantes par hypothèse (et par le lemme des coalitions), comme la variable $(S_{k+1} - S_k, \dots, S_n - S_k)$ suit la même loi que la variable $(S_1, \dots, S_{n-k})$ d'après la question 15, et car $E_{n-k} = (T > n - k) = (S_1 \neq 0, \dots, S_{n-k} \neq 0)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_k^n) &= \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(X_{k+1} \neq 0, \dots, X_{k+1} + \dots + X_n \neq 0) = \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(S_{k+1} - S_k \neq 0, \dots, S_n - S_k \neq 0) \\ &= \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, S_{n-k} \neq 0) = \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(T > n - k) = \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(E_{n-k}). \end{aligned}$$

16 Pour n donné, les A_k^n sont disjoints car, si $0 \leq k < \ell \leq n$, on a l'inclusion $A_k^n \cap A_\ell^n \subset (S_\ell \neq 0) \cap (S_\ell = 0) = \emptyset$ grâce aux inclusions $A_k^n \subset (S_\ell \neq 0)$ et $A_\ell^n \subset (S_\ell = 0)$. De plus, si $\omega \in \Omega$, ou bien aucun des $S_k(\omega)$, pour $k \leq n$, n'est nul, et alors $\omega \in A_0^n$, ou bien il existe $p \leq n$ tel que $S_p(\omega) = 0$. Dans ce cas, considérons k , le plus grand de ces p . Alors $\omega \in A_k^n$. Ainsi, Ω est l'union disjointe des A_k^n et donc, par incompatibilité,

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(A_k^n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(E_{n-k}) = 1.$$

17 Puisque les séries entières $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(S_k = 0)x^k$ et $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(E_k)x^k$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 (leurs coefficients sont dans $[0; 1]$ et le rayon de la série entière $\sum_{k \geq 0} x^k$ est égal à 1), on obtient, par produit de CAUCHY de deux séries entières dans l'intervalle ouvert de convergence, pour tout $x \in [0; 1[$:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(E_{n-k}) \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

18 Remarquons que $X_n \equiv 1 [2]$ et donc que $S_n \equiv n [2]$. Par conséquent, si n est impair, $S_n \neq 0$ et $\mathbb{P}(S_n = 0) = 0$. Supposons n pair et posons $n = 2p$. Posons aussi $Y_n = \frac{1 + X_n}{2}$. Alors les Y_n sont mutuellement indépendants et suivent la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Si $T_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, T_n suit d'après le cours la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. Comme $T_n = \frac{n + S_n}{2}$, on a $S_n = 2T_n - n$. Par conséquent, $\mathbb{P}(S_{2p} = 0) = \mathbb{P}(T_{2p} = p) = \frac{1}{4^p} \binom{2p}{p}$.

19 Pour $x \in [0; 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{4^p} \binom{2p}{p} x^{2p} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ d'après le douzième développement en série entière du théorème 17 cours. Finalement, d'après la question 18, $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$.

20 Comme on a clairement $(T > n+1) \subset (T > n)$, la suite $(\mathbb{P}(E_n))_{n \geq 0}$ est décroissante et à valeurs positives ou nulles. Si $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$, alors $\sqrt{1-x} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sqrt{2}$. Par conséquent, $\sqrt{1-x} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\pi}$. Le résultat de la question **13** nous indique alors que $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(E_k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$ donc que $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \mathbb{P}(E_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ d'après la partie 3 admise. Finalement, $\mathbb{P}(E_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}}$.

21 Or $(T = +\infty) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} E_n$ et cette intersection est décroissante.

Le théorème de la limite décroissante montre que $\mathbb{P}(T = +\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_n) = 0$.

22 La formule demandée est vraie si $x = 1$ d'après **22** car $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T < +\infty) = 1 - \mathbb{P}(T = +\infty) = 1$. De $(T = n) = E_{n-1} \setminus E_n$ et $E_n \subset E_{n-1}$, il résulte, comme $E_n \subset E_{n-1}$, que $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(E_{n-1}) - \mathbb{P}(E_n)$ pour $n \geq 1$. Par suite,

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_{n-1})x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n + 1 \\ &= (x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 1 = 1 - \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

23 On a, pour $x \in [0; 1[$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)x^n &= \frac{x^2}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n = \frac{x^2}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \cdots \times \left(\frac{3}{2} - n\right) x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} \times \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n-1) \times (2n)} x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n-1)(2^n n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}. \end{aligned}$$

Puisque l'égalité sur $[0; 1[$ de la somme de deux séries entières entraîne l'égalité de leurs coefficients,

$$\forall n \geq 1, \mathbb{P}(T = 2n) = \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n}.$$

24 Avec la formule de STIRLING, on montre $\mathbb{P}(T = 2n) = \frac{(2n)!}{(2n-1)(n!)^2 2^{2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} (2n)^{2n} e^{-2n}}{(2n) e^{2n} (2\pi n) n^{2n} 2^{2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n\sqrt{\pi n}}$.

Ainsi $(2n)\mathbb{P}(T = 2n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ donc T n'admet pas une espérance finie d'après RIEMANN car $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

On pouvait aussi dire que G_T n'est définie que sur $[0; 1]$ et que puisque $G_T(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$, la fonction G_T n'est pas dérivable en 1 car $\frac{G_T(x) - G_T(1)}{x-1} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}$. Ainsi T n'admet pas d'espérance finie.