

DEVOIR 20 : VARIABLES ALÉATOIRES

PSI 1 2025-2026

mardi 24 février 2026

QCM

1 *Espérance : soit X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et ayant des espérances finies*

1.1 $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X \geq n)$

1.3 $\forall n \geq 1, P(X \geq n) \leq \frac{E(X)}{n}$

1.2 $E(X + 2Y) = E(X) + 2E(Y)$

1.4 $\sum_{n \in \mathbb{N}} nP(X = n)$ est semi-convergente

2 *Inégalités : soit X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et ayant des moments d'ordre 2*

2.1 $E(X^2) \geq E(X)^2$

2.3 $\forall n \geq 1, P(X > n) \leq \frac{E(X)}{n}$

2.2 $V(X + Y) \leq V(X) + V(Y)$

2.4 $\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon}$

3 *Lois usuelles : soit X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui suivent respectivement la loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$, la loi de POISSON de paramètre $\lambda > 0$ et la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$*

3.1 $E(XY) = \frac{\lambda}{p}$

3.3 $E(XZ) = n$

3.2 $V(X + Y) = \frac{1+p}{p^2} + \lambda$

3.4 $V(Z) = np(1-p)$.

4 *Fonctions génératrices : soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, U une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$*

4.1 $G'_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) = E(X)$

4.3 $\forall t \in \mathbb{R}, G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$

4.2 $\lim_{t \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n = 1$

4.4 $\forall t \in]-1; 1[, G_U(t) = \frac{pt}{1 - (1-p)t}$

Énoncé

Donner précisément l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.

Preuve

Soit X une variable aléatoire discrète réelle positive sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X admet une espérance finie. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$ (inégalité de MARKOV).

Exercice 1

Chez un marchand de journaux, on peut acheter des pochettes contenant chacune une image.

La collection complète comporte en tout N images distinctes. On note X_k le nombre d'achats ayant permis l'obtention de k images distinctes. En particulier, $X_1 = 1$ et X_N est le nombre d'achats nécessaires à l'obtention de la collection complète. Par convention, $X_0 = 0$.

a. Quelle loi suit, pour $k \in \llbracket 1; N-1 \rrbracket$, la variable aléatoire $X_{k+1} - X_k$?

b. En déduire l'espérance de X_N . Donner (sans preuve) un équivalent de $E(X_N)$ quand N tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Soit $n \geq 2$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes telles que $P(X_k = -1) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$.

a. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Calculer $E(S_n)$ et, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $x \in \mathbb{R}$, $E(e^{xX_k})$.

b. En déduire que, pour tout $x > 0$, $E(e^{xS_n}) = (\text{ch}(x))^n$. On admet que $\text{ch}(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}$.

c. Montrer, pour $\varepsilon > 0$ et $x > 0$, que $P(S_n \geq \varepsilon) = P(e^{xS_n} \geq e^{x\varepsilon}) \leq e^{\frac{nx^2}{2} - x\varepsilon}$.

d. En déduire que $P(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{\frac{-\varepsilon^2}{2n}}$.

DEVOIR 20	NOM :	PRÉNOM :
-----------	-------	----------

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

i · j	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

i · j	1	2	3	4	Fautes
1		X	X		
2	X		X		
3	X		X	X	
4		X		X	

1.1 Faux : c'est $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$ **1.2** Vrai : c'est la linéarité de l'espérance **1.3** Vrai : c'est l'inégalité de

MARKOV **1.4** Faux : par définition cette série doit être absolument (donc commutativement) convergente.

2.1 Vrai : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \geq 0$ donc **2.2** Faux : $V(X+Y) - V(X) - V(Y) = 2\text{Cov}(X, Y)$ dont on ne connaît pas le signe **2.3** Vrai : c'est l'inégalité de MARKOV et $(X > n) \subset (X \geq n)$ **2.4** Faux : c'est $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$ d'après BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV donc ça peut être faux dès que $\varepsilon < 1$.

3.1 Vrai : $X \perp Y$ donc $E(XY) = E(X)E(Y)$ et $E(X) = \frac{1}{p}$ et $E(Y) = \lambda$ **3.2** Faux : on a bien $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ et $V(Y) = \lambda$ mais $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$ **3.3** Vrai : $E(X) = \frac{1}{p}$ et $E(Z) = np$ et $X \perp Z$ **3.4** Vrai : cours.

4.1 Faux : on ne sait pas si X admet une espérance finie **4.2** Vrai : la série génératrice converge normalement sur $[-1; 1]$ d'où la continuité en 1 de G_X **4.3** Faux : la formule est correcte mais on ne sait pas quel est le rayon de ces deux séries génératrices **4.4** Vrai : relation correcte et le rayon vaut $R = \frac{1}{1-p} > 1$.

Énoncé Soit X une variable aléatoire discrète réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre 2.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$ (inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV).

Preuve Pour $\varepsilon > 0$, posons $A = (X \geq \varepsilon) \in \mathcal{A}$ (car X est une variable aléatoire). Alors :

- si $\omega \in A$, on a $X(\omega) \geq \varepsilon$ et $\mathbb{I}_A(\omega) = 1$ donc $X(\omega) \geq \varepsilon \mathbb{I}_A(\omega)$.
 - si $\omega \notin A$, on a $X(\omega) \geq 0$ et $\mathbb{I}_A(\omega) = 0$ donc $X(\omega) \geq \varepsilon \mathbb{I}_A(\omega)$ à nouveau.
- Ainsi $X \geq \varepsilon \mathbb{I}_A$. Par croissance et linéarité de l'espérance : $E(X) \geq \varepsilon E(\mathbb{I}_A) = \varepsilon P(A) = \varepsilon P(X \geq \varepsilon)$.

Exercice 1 **a.** $X_{k+1} - X_k$ représente le nombre de pochettes à acheter (sachant qu'on a déjà k images différentes) pour en obtenir une nouvelle (c'est-à-dire une $(k+1)$ -ième image distincte). La probabilité d'avoir une nouvelle image est alors de $\frac{N-k}{N}$ donc $X_{k+1} - X_k$ suit la loi géométrique de paramètre $p_k = \frac{N-k}{N}$.

b. Comme $X_N = \sum_{k=0}^{N-1} (X_{k+1} - X_k)$, par linéarité de l'espérance, $E(X_N) = E(X_1) + \sum_{k=1}^{N-1} E(X_{k+1} - X_k)$. D'après de qui précède, $E(X_N) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{p_k} = N \sum_{i=1}^N \frac{1}{i} = NH_N \underset{+\infty}{\sim} N \ln(N)$.

Exercice 2 **a.** Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(X_k) = 0$ car $E(X_k) = 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$.

De plus, $E(e^{xX_k}) = e^x \times \frac{1}{2} + e^{-x} \times \frac{1}{2} = \text{ch}(x)$ par théorème de transfert.

b. $e^{xS_n} = \prod_{k=1}^n e^{xX_k}$ et $e^{xX_1}, \dots, e^{xX_n}$ sont indépendantes donc $E(e^{xS_n}) = \prod_{k=1}^n E(e^{xX_k}) = \text{ch}(x)^n$.

c. Comme $t \mapsto e^{xt}$ est strictement croissante, $(S_n \geq \varepsilon) = (e^{xS_n} \geq e^{x\varepsilon})$. Comme e^{xS_n} est positive et $e^{x\varepsilon} > 0$, par l'inégalité de MARKOV, $\mathbb{P}(e^{xS_n} \geq e^{x\varepsilon}) \leq \frac{E(e^{xS_n})}{e^{x\varepsilon}} \leq \frac{(e^{\frac{x^2}{2}})^n}{e^{x\varepsilon}} = e^{\frac{nx^2}{2} - x\varepsilon}$ d'après **b.**

d. La fonction parabolique $f : x \mapsto \frac{nx^2}{2} - x\varepsilon$ est minimale quand $f'(x) = nx - \varepsilon = 0$ donc en $x_0 = \frac{\varepsilon}{n}$ et, d'après **c.**, on a $\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{\frac{nx_0^2}{2} - x_0\varepsilon} = e^{-\frac{\varepsilon^2}{2n}}$.