

ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 12

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

12.1 Normes et équivalence

12.1 Compléments OdIT 2016/2017 EIVP PSI planche 533I

Pour x et y réels, on pose $u = (x, y)$ et $N(u) = \sup_{t \in [0;1]} |xt + y|$.

- a. Montrer que $N(u) = \max(|y|, |x + y|)$ puis que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
- b. Soit $B = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid N(u) \leq 1\}$. Trouver la plus petite boule fermée de centre $(0, 0)$ (pour la norme $\|\cdot\|_2$ classique dans le plan $\mathbb{R}^2$) contenant B puis la plus grande boule fermée de centre $(0, 0)$ contenue dans B .

12.2 Centrale MP

Soit $E = \{f \in C^1([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ et N l'application définie sur E par $N(f) = \|3f + f'\|_{\infty, [0;1]}$.

- a. Montrer que (E, N) est un espace vectoriel normé puis qu'il existe $k > 0$ tel que $\|f\|_{\infty} \leq kN(f)$.
- b. Les normes $\|\cdot\|_{\infty}$ et N sont-elles équivalentes ?

12.3 Soit $E = \{f \in C^1([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ et N_1, N_2 les deux applications définies sur E par $N_1(f) = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$ et $N_2(f) = \|f + f'\|_{\infty}$. Montrer que ce sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

12.4 Mines PSI 2010 d'après RMS Soit l'espace vectoriel $E = \{f \in C^2([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.

Pour toute fonction $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_{\infty}$.

- a. Montrer que N est une norme.
- b. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que : $\forall f \in E, \|f\|_{\infty} \leq cN(f)$.

12.5 Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$ et E^+ l'ensemble des fonctions de E qui sont positives et qui ne s'annule qu'un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$, on pose $\forall f \in E, \|f\|_{\varphi} = \sup_{t \in [0;1]} (|f(t)|\varphi(t))$.

- a. Montrer que $\|\cdot\|_{\varphi}$ est une norme.
- b. Si φ_1 et φ_2 sont strictement positives sur $[0; 1]$, montrer que $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ et $\|\cdot\|_{\varphi_2}$ sont équivalentes.
- c. Les normes $\|\cdot\|_x$ et $\|\cdot\|_{x^2}$ (abus de notation) sont-elles équivalentes ?

12.6 Mines MP Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$ et E^+ l'ensemble des fonctions de E qui sont positives et qui ne s'annule qu'un nombre fini de fois. Pour toute fonction $\varphi \in E^+$, on pose $\forall f \in E, \|f\|_{\varphi} = \int_0^1 |f(t)|\varphi(t)dt$.

- a. Montrer que $\|\cdot\|_{\varphi}$ est une norme.
- b. Si φ_1 et φ_2 sont strictement positives sur $[0; 1]$, montrer que $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ et $\|\cdot\|_{\varphi_2}$ sont équivalentes.
- c. Les normes $\|\cdot\|_x$ et $\|\cdot\|_{x^2}$ (abus de notation) sont-elles équivalentes ?

12.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$, $N_1(M) = \sum_{j=1}^n \max_{1 \leq i \leq n} |m_{i,j}|$ et $N_2(M) = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |m_{i,j}| \right)$.

- a. Montrer que N_1 est une norme sur E . On admet que N_2 est aussi une norme sur E .
- b. Déterminer les constantes optimales α et β telles que $\alpha N_2 \leq N_1 \leq \beta N_2$.

12.8 Normes p matricielles Soit $(p, q) \in]1; +\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ deux matrices carrées. On note bien sûr $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

a. Montrer que : $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

b. En déduire que si $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|^p = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |b_{i,j}|^q = 1$, alors $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}b_{i,j}| \leq 1$.

c. En déduire l'inégalité de HÖLDER : $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}b_{i,j}| \leq \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|^p \right)^{1/p} \times \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |b_{i,j}|^q \right)^{1/q}$.

d. Vérifier que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}||a_{i,j} + b_{i,j}|^{p-1} \leq \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j} + b_{i,j}|^p \right)^{1/q}$. En déduire l'inégalité de MINKOWSKI : $\left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j} + b_{i,j}|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |b_{i,j}|^p \right)^{1/p}$.

Ainsi, $\|\cdot\|_p : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\|A\|_p = \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|^p \right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

e. Justifier que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty \leq \|A\|_p \leq n^{2/p} \|A\|_\infty$. Que vaut donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|A\|_p$?

f. Établir $\forall 1 \leq p < q$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_q \leq \|A\|_p \leq n^{2/p-2/q} \|A\|_q$. Ces constantes sont-elles optimales ?

12.9 Normes p Soit $(p, q) \in]1; +\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et x, y deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On note bien sûr $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $y = (y_k)_{1 \leq k \leq n}$.

a. Montrer que : $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.

b. En déduire que si $\sum_{k=1}^n |x_k|^p = \sum_{k=1}^n |y_k|^q = 1$, alors $\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq 1$.

c. En déduire l'inégalité de HÖLDER : $\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \times \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}$.

d. Vérifier que $\sum_{k=1}^n |x_k||x_k + y_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/q}$. En déduire l'inégalité de MINKOWSKI : $\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p}$.

e. Prouver que $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

f. Justifier que $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$. Que vaut donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p$?

g. Établir, si $1 \leq r < s$, $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_s \leq \|x\|_r \leq n^{1/r-1/s} \|x\|_s$. Ces constantes sont-elles optimales ?

12.10 Fonctionnelle de MINKOWSKI Centrale PSI 2013 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé.

a. Montrer que la boule unité fermée de E , notée $\mathcal{B}_E = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$, est une partie convexe, fermée, bornée, symétrique par rapport à 0_E (c'est-à-dire que $\forall x \in E$, $x \in \mathcal{B}_E \implies -x \in \mathcal{B}_E$) et que $0_E \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}_E$.

Réciproquement, soit K une partie de E vérifiant toutes ces propriétés. Pour $x \in E$, on pose $j_K(x) = \inf(I_x)$ où $I_x = \{r > 0 \mid \frac{x}{r} \in K\}$: j_K est appelée jauge de K (ou associée à K).

b. Montrer que j_K est bien définie sur E et que c'est une norme sur E .

c. Établir que K est la boule unité fermée pour cette norme.

d. Que peut-on dire des deux normes j_K et $\|\cdot\|$?

12.11 *Centrale PSI 2013* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et la subdivision régulière $x_0 = 0 < x_1 = 1 < \dots < x_n = n$ de $[0; n]$.

On définit aussi E_n le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions $f : [0; n] \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont continues sur $[0; n]$ et qui sont affines sur chaque intervalle $[x_k; x_{k+1}]$ pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.

On munit E_n des normes (admis) $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ telles que $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0; n]} |f(x)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^n |f(x)| dx$.

- a. Justifier que E_n est de dimension finie et en déterminer la dimension en fonction de n .
- b. Justifier qu'il existe α_n, β_n optimales avec $\forall f \in E_n, \alpha_n \|f\|_\infty \leq \|f\|_1 \leq \beta_n \|f\|_\infty$. Donner β_n .
- c. Déterminer la valeur exacte de α_1 et justifier que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par $\frac{1}{2}$.
- d. Pour $f \in E_n$, montrer que si $\|f\|_\infty = 1$ et $\|f\|_1 < \frac{1}{2}$ alors le maximum de f est atteint en 0 ou n .

En déduire, pour $n \geq 2$, que : $\alpha_n = 2\sqrt{\alpha_{n-1} + \frac{1}{2}} - 1 - \alpha_{n-1}$. Que vaut donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$?

12.12 Soit E l'espace formé des fonctions lipschitziennes $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(a) = 0$. Montrer que l'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $N(f) = \inf \{k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall (x, y) \in [a; b]^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|\}$ est une norme sur E . Indication : on pourra montrer que cette borne inférieure est en fait un minimum.

12.13 *Centrale PSI 2007 et 2013*

Soit $\alpha \in [0; 1]$. Pour $f \in C^0([0; 1], \mathbb{R})$ on pose $N_\alpha(f) = \int_0^\alpha |f| + \sup_{[\alpha; 1]} |f|$.

- a. Montrer que N_α est une norme sur $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$.
- b. Comparer les N_α entre elles : sont-elles équivalentes ?

12.2 Suites dans un espace vectoriel normé

12.14 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice antisymétrique telle que $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Que peut-on dire de B ?

12.15 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes de vecteurs de E telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ et v_n sont colinéaires. On note $u = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $v = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. Montrer que u et v sont colinéaires (raisonner par l'absurde et compléter (u, v) en une base de E).

12.16 *Centrale MP 2012* Soit E un espace normé de dimension quelconque et u un endomorphisme de E vérifiant

$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k$.

- a. Simplifier $v_n \circ (u - \text{id}_E)$.
- b. Montrer que $\text{Im}(u - \text{id}_E) \cap \text{Ker}(u - \text{id}_E) = \{0_E\}$.
- c. On suppose ici que E de dimension finie, établir que $\text{Im}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u - \text{id}_E) = E$.
- d. On suppose de nouveau E de dimension quelconque. Montrer que si $\text{Im}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u - \text{id}_E) = E$ alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement et que le sous-espace $\text{Im}(u - \text{id}_E)$ est une partie fermée de E .
- e. Étudier la réciproque.

12.17 *Classique* Soit $p \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On pose $M_n = \frac{A^n}{n!} = (m_{i,j}^{(n)})_{1 \leq i,j \leq p}$ et $S_n(A) = \sum_{k=0}^n M_k = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$.

- a. Montrer que : $\forall (U, V) \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{K}))^2$, $\|UV\|_\infty \leq p\|U\|_\infty\|V\|_\infty$.
- b. En déduire une majoration de $|m_{i,j}^{(n)}|$ pour tout $n \geq 1$ et tout couple $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$.
- c. Que peut-on donc dire de la série $\sum_{n \geq 0} m_{i,j}^{(n)}$ pour (i, j) fixé ?
- d. En déduire la convergence dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ de la suite de matrices $(S_n(A))_{n \geq 0}$.

On pose $\exp(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(A)$ qu'on note classiquement $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.

- e. Calculer $\exp(D)$ si D est diagonale. En déduire que si A est diagonalisable, alors $\det(\exp(A)) = e^{\text{Tr}(A)}$.

12.3 Topologie

12.18 Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$ normé par $\|\cdot\|_\infty$ et $A = \{f \in E \mid f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geq 1\}$.

- a. Montrer que A est une partie fermée et vérifier que $\forall f \in A$, $\|f\|_\infty > 1$.
- b. Calculer la distance de la fonction nulle à la partie A .

12.19 *Centrale PC 2008* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, à valeurs propres strictement positives.

- a. Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $X_0 = I_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \frac{1}{2}(X_n + AX_n^{-1})$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n est diagonalisable (on pourra utiliser une base de vecteurs propres de A).
- b. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite X vérifie $X^2 = A$. On la note $\sqrt{A}$.
- c. Montrer que si A est symétrique alors $\sqrt{A}$ est symétrique.

12.20 Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

12.21 Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = P$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} B^n = Q$.

On suppose que les matrices A et B commutent. Montrer que $PQ = QP$.

12.22 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie.

Montrer que l'ensemble P des projecteurs de E est une partie fermée de $\mathcal{L}(E)$.

12.23 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A \in E$, on pose $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$ (**rayon spectral de A**).

On va montrer que pour toute norme $\|\cdot\|$ de E , on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.

- a. Montrer que si le résultat est vrai pour une norme, alors il est vrai pour toute norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- b. Montrer que si le résultat est vrai pour une matrice A alors il est vrai pour toute matrice semblable à A .

Dans la suite, on considère la norme $\|A\|_\infty = \max_{(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2} |a_{i,j}|$.

- c. Montrer que si T est triangulaire et que ses coefficients diagonaux valent 1 alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|T^k\|_\infty^{\frac{1}{k}} = 1$.

Indication : écrire $T = I_n + N$ avec $N = T - I_n$ nilpotente.

- d. Si $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ vérifie $|a_{i,j}| \leq b_{i,j}$, montrer $\|A^k\|_\infty \leq \|B^k\|_\infty$. Conclure en trigonalisant $\frac{A}{\rho(A)}$.

12.24 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et la partie $S = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = n \text{ et } P \text{ scindé à racines simples dans } \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P \in S$ et $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ ses n racines distinctes réelles. On suppose que le coefficient dominant de P est strictement positif (le cas $\text{dom}(P) < 0$ est similaire). On se donne aussi des réels $\beta_0, \dots, \beta_n$ tels que $\beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \beta_{n-1} < \alpha_n < \beta_n$.

a. Déterminer les signes de $P(\beta_k)$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

b. Que dire des applications $\varphi_k : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $\varphi_k(R) = R(\beta_k)$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$?

b. En considérant $\varphi_0^{-1}((-1)^n \mathbb{R}_+^*) \cap \dots \cap \varphi_{n-1}^{-1}(\mathbb{R}_-^*) \cap \varphi_n^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$, que dire de l'aspect topologique de S ?

12.25 Soit E un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E , $x \in E$ et $d(x, A) = \inf \left(\{ \|x - a\| \mid a \in A \} \right)$.

a. Montrer l'application $d : x \in E \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

b. Établir que : $x \in \bar{A} \iff d(x, A) = 0$.

c. Justifier que si A est fermée, il existe un vecteur $a_0 \in A$ tel que $d(x, A) = \|x - a_0\|$.

12.26 Soit B l'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $\|(u_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ et F l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

F est-elle convexe ? ouverte ? fermée ? compacte ? bornée ? Déterminer $\bar{F}$, $\overset{\circ}{F}$.

12.4 Suites récurrentes réelles

12.27 *Centrale PSI 2008 d'après RMS* Rappeler le domaine de définition de la fonction Arccos.

Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(u_{n+1})$. Que dire de u_0 ?

12.28 Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n^2}$.

Indication : étudier la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2}{1 + x^2}$, et étudier la fonction $f \circ f$.

12.29 Étudier $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^3 - 1}{u_n^2 + 1}$.

12.30 Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}$.

12.31 Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + \sqrt{u_{n-1} + \dots + \sqrt{u_0}}}$.

12.5 Applications linéaires continues

12.32 Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, une fonction $\varphi \in E$ fixée et $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(f) = \int_0^1 f\varphi$.

Montrer que T est continue et déterminer $\|T\|_\infty$.

12.33 Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_1$, une fonction $\varphi \in E$ fixée et $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(f) = \int_0^1 f\varphi$.

Montrer que T est continue et déterminer $\|T\|_1$.

12.34 *Centrale PSI 2012*

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|P\|_\infty = \max_{k \in \mathbb{N}} |a_k|$ si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$. Soit aussi l'application $\|\cdot\|_1 : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\|P\|_1 = \sup_{-1 \leq t \leq 1} |P(t)|$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, on définit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall P \in E, f(P) = P(x_0)$.

a. Justifier que $\|\cdot\|_1$ est aussi une norme sur E . Est-elle équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?

Dorénavant, pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la restriction de f à $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

b. Dans $(E_n, \|\cdot\|_\infty)$, calculer $u_n = \|f_n\|_\infty = \sup_{P \in E_n, \|P\|_\infty=1} |f_n(P)|$ en fonction de x_0 . Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

c. On définit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $T_0 = 1, T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ (ce sont les fameux polynômes de TCHEBYCHEV). Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ et $T_n(\cosh(x)) = \cosh(nx)$.

d. Dans $(E_n, \|\cdot\|_1)$, on pose $v_n = \|f_n\|_1 = \sup_{P \in E_n, \|P\|_1=1} |f_n(P)|$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ en fonction de x_0 .

12.35 *Mines PSI 2010 d'après RMS*

On munit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

Soit T l'application qui à $f \in E$ associe $T(f) : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

a. Montrer que T est continu. Déterminer la constante α optimale telle que $\forall f \in E, \|T(f)\|_\infty \leq \alpha \|f\|_\infty$.

b. Soit $f \in E$ non nulle telle que $f(0) = 0$. Montrer que : $\exists x_0 \in]0; 1], \forall x \in [0; x_0[, |f(x)| < |f(x_0)| = \|f\|_\infty$.

c. En déduire que l'espace propre de T associé à la valeur propre 2 est de dimension 1.

12.36 Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Montrons que $u : f \mapsto u(f)$ où $u(f)(x) = f(0) + x(f(1) - f(0))$ est un endomorphisme continu de E et calculer sa norme.

12.37 On note $E = \ell^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel normé des suites réelles bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ on pose $\Delta(u)$ la suite définie par $\Delta(u)_n = u_{n+1} - u_n$.

Montrer que Δ est un endomorphisme continu de E et calculer sa norme.

12.38 Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)dt - f(a)$ avec $a \in [0; 1]$ fixé. Montrer que φ est continue et calculer $\|\varphi\|$.

12.39 Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$ et $F = C^1([0; 1], \mathbb{R})$. On définit N_1 et N_2 par $N_1(f) = \|f\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. On définit $T : E \rightarrow F$ par $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$. Montrer que T est continue et calculer la norme de T .

12.40 On considère $\mathbb{C}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, et soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sa matrice dans les bases canoniques. Montrer que $\|u\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

12.41 On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ associée au produit scalaire $(A|B) = \text{Tr}(A^t B)$. Établir que : $\forall A \in E, \text{Tr}(A)^2 \leq n \text{Tr}(A^t A)$. Justifier la continuité de $\text{Tr} : E \rightarrow \mathbb{R}$ et calculer $\|\text{Tr}\|$.

12.42 Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace vectoriel normé, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ continus tels que $u \circ v - v \circ u = \alpha \text{id}_E$.

a. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}, u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1)\alpha v^n$. En déduire que $\alpha = 0$.

b. Si E est de dimension finie, donner un argument plus simple.

12.43 Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. On pose $F = \{f \in E \mid \int_0^1 f = 0\}$.

- a. Montrer que tout $u \in E$ admet une unique primitive $T(u)$ dans F .
- b. Montrer que T est linéaire, continue et calculer $\|T\|$.

12.6 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

12.44 *ENS Cachan PSI 2013* Marine DC.

Théorème de MARKOV-KAKUTANI : soit E un espace vectoriel normé et C une partie de E .

On dit que C est convexe si $\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in [0; 1], tx + (1 - t)y \in C$. Une application $T : C \rightarrow C$ est dite une transformation affine de C si $\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in [0; 1], T(tx + (1 - t)y) = tT(x) + (1 - t)T(y)$.

- a. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall (t_1, \dots, t_p) \in [0; 1]^p, \forall (x_1, \dots, x_p) \in C^p$ si $\sum_{k=1}^p t_k = 1$:

(i) : $\sum_{k=1}^p t_k x_k \in C$; (ii) : $T\left(\sum_{k=1}^p t_k x_k\right) = \sum_{k=1}^p t_k T(x_k)$.

On admet le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS : “si C est un fermé borné non vide, de toute suite d’éléments de C on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément $x \in C$ ”.

Soit C une partie convexe fermée et bornée non vide de E et $a \in C$, alors on définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E par $x_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n T^k(a)$. On suppose T continue.

- b. Montrer qu’il existe $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = x \in C$ et que x est un point fixe de T .
- c. Donner un exemple de couple (C, T) tel que T admette un unique point fixe et un autre exemple tel que T admette plusieurs points fixes.
- d. Soit $(T_1, \dots, T_N)$ N transformations affines continues sur C qui commutent deux à deux. Montrer qu’il existe au moins un point fixe commun à toutes les transformations affines. Indication : on pourra faire une récurrence en montrant au préalable que $C' = \{x \in C \mid \forall k \in \llbracket 1; N-1 \rrbracket, T_k(x) = x\}$ est un convexe fermé borné non vide. Donner un tel exemple $(C, T_1, \dots, T_N)$.

12.45 *Mines PSI 2015* François-Xavier Solvar

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. A et B deux points distincts de la courbe de f tel que B appartienne à la tangente de f au point A . Montrer qu’il existe M distinct de A tel que A appartienne à la tangente de f au point M .

12.46 *ENS Cachan PSI 2016* Romain Morgavi

- a. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$, montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{1 + \lambda e^{i\theta}} d\theta = 0$.
- b. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $a \in \mathbb{C}$. Supposons que Q ne possède aucune racine dans $D(a, r)$ (disque fermé de centre a et de rayon r) avec $r > 0$. Montrer que $I(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Q'(a + re^{i\theta})}{Q(a + re^{i\theta})} re^{i\theta} d\theta = 0$.
- c. Que vaut $I(Q)$ si Q ne possède que a comme racine dans $D(a, r)$ d’ordre de multiplicité m ?
Soit $(P_k)_{k \geq 0} \in (\mathbb{R}_n[X])^{\mathbb{N}}$ une suite de polynômes scindés dans $\mathbb{R}$ convergeant vers P . Le but est de montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}$. Supposons par l’absurde que $\exists a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, P(a) = 0$. Posons $r > 0$.
- d. Montrer que $P \mapsto \|P\| = \max_{z \in D(a, r)} |P(z)|$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- e. Montrer qu’il existe une constante M telle que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \|P'\| \leq M\|P\|$.
Soit $C(a, r)$ le cercle de centre a et de rayon r et posons $\mu = \min(\{|P(z)| \mid z \in C(a, r)\})$.
- f. Montrer que $\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0, \forall z \in C(a, r), |P_k(z)| \geq \frac{\mu}{2}$.
- g. Montrer que $\forall k \geq k_0, \frac{2\pi}{r} |I(P_k) - I(P)| \leq \frac{2}{\mu^2} \cdot (2\pi) \cdot (\|P'\| + M\|P\|) \|P - P_k\|$ et conclure.

12.47 Centrale Maths1 PSI 2016 Léo Fusil

Si $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = (x_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$, soit $\|M\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}|$, $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

a. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\|MX\|_\infty \leq n\|M\|_\infty\|X\|_\infty$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.

b. Montrer que $\text{Ker}(A - I_n)$ et $\text{Im}(A - I_n)$ sont supplémentaires en utilisant $B_p = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.

c. Montrer que la suite $(B_p)_{p \geq 0}$ converge vers la projection sur $\text{Ker}(A - I_n)$ parallèlement à $\text{Im}(A - I_n)$.

12.48 X PSI 2017 Vincent Bouget I

Soit I un segment et $f : I \rightarrow I$ continue telle que $f(I) \subset I$.

a. Montrer que f admet un point fixe sur I .

b. Montrer que pour tout segment $[a; b] \subset f(I)$, il existe $[c; d] \subset I$ tel que $f([c; d]) = [a; b]$.

12.49 ENS Cachan PSI 2017 Clément Maurel I

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit C un convexe de E et $u \in E$; on dit que u est un point extrémal de C si et seulement si $C \setminus \{u\}$ est encore convexe.

a. Quels sont les points extrémaux de la boule fermée unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $\|\cdot\|_2$?

b. Quels sont les points extrémaux de la boule fermée unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $\|\cdot\|_1$?

c. Montrer qu'un point de C est extrémal si et seulement s'il n'est pas le milieu de deux points de C .

Soit E un espace euclidien qui est donc un espace vectoriel normé si on prend pour norme la norme euclidienne associée au produit scalaire de E . On note B la boule unité de E .

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $\|u\| = \sup_{x \in B} \|u(x)\|$ et $C = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \|u\| \leq 1\}$.

d. Montrer que les points extrémaux de C sont les automorphismes orthogonaux de E . Indication : on pourra utiliser sans démonstration la décomposition suivante : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exists O \in O_n(\mathbb{R})$, $\exists S \in S_n^+(\mathbb{R})$, $A = OS$.

12.50 Mines PSI 2017 Maxime Pouvereau II

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E . Soit $f : [0; 1] \rightarrow E$ une fonction continue telle que $f(0) \in A$ et $f(1) \notin A$. Prouver qu'il existe $t \in [0; 1]$ tel que $f(t)$ soit sur la frontière de A .

12.51 X PSI 2018 Emeric Benoist

Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^d$ euclidien canonique. Soit B_1 et B_2 deux boules fermées de centres x_1 et x_2 et de même rayon $r > 0$.

a. Trouver $r_{\min}$ le rayon minimal d'une boule qui contient $B_1 \cap B_2$.

b. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$, r la borne inférieure de tous les rayons des boules fermées qui contiennent K .

Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de boules fermées de rayon r_n et de centre x_n telles que B_n contient K pour tout entier n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = r$.

Soit $z_n = \sup_{k > n} (\|x_k - x_n\|)$. Vers quoi tend la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

12.52 X PSI 2018 Oihana Piquet

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites reliées par la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2u_{n+1} + u_n$.

a. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

b. Soit une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$. Est-ce que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge forcément ?

c. Soit une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ et qui possède une suite extraite convergente. Est-ce que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge forcément ?

12.53 *ENS Ulm/Cachan PSI 2018* Antoine Secher

Soit E l'espace des fonctions continues, 1-périodiques, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

Soit g la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+x)^2} + \frac{1}{(n-x)^2} \right)$.

a. Montrer que g est continue sur $] -1; 1[$. Calculer $g(0)$.

b. Montrer que $\varphi \in E$ si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + g(x)$ si $x \notin \mathbb{Z}$, $\varphi(n) = 0$ si $n \in \mathbb{Z}$.

c. Montrer que $L \in \mathcal{L}(E)$ et L continue si $L(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$. Calculer $\|L\| = \sup_{f \in E, f \neq 0} \frac{\|L(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$.

d. Montrer que $\forall x \notin \mathbb{Z}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$.

12.54 *Centrale Maths1 PSI 2018* Maëlle Casas

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A de multiplicités au moins égales à 1. On suppose que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Que peut-on dire sur les valeurs propres de A ?

b. Donner un polynôme annulateur P de degré p de A .

c. Soit Q un polynôme annulateur de A . Montrer que toute valeur propre de A est racine de Q .

En déduire que $(I_n, A, \dots, A^{p-1})$ est libre.

d. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists P_k \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$, $A^k = P_k(A)$.

e. Montrer qu'il existe un polynôme $U \in \mathbb{C}[X]$ tel que $L = U(A)$.

12.55 *Mines PSI 2018* Vincent Barreau et Peio Betbeder II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_n$ des complexes distincts deux à deux et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ définie par $\Phi(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n))$ est un isomorphisme.

b. En déduire que, pour tout entier $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $L_i(a_i) = 1$ et $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i\}$, $L_i(a_j) = 0$.

c. Exprimer le polynôme caractéristique χ_A de A comme combinaison linéaire des polynômes précédents.

d. Montrer que l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}_n[X]$ définie par $f(M) = \chi_M$ est continue.

Remarque : il doit manquer une question sur une certaine densité !!

12.56 *Mines PSI 2018* Florian Gaboriaud I

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{a + \sqrt{b + \dots}}}}$ (il y a n radicaux).

Par exemple $u_1 = \sqrt{a}$, $u_2 = \sqrt{a + \sqrt{b}}$ et $u_3 = \sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{a}}}$.

a. Montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$. Indication : on pourra s'intéresser au cas $a = b$.

b. Trouver un polynôme de degré 4 (dont les coefficients dépendent de a et b) admettant $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ comme racine.

12.57 *Mines PSI 2018* Claire Raulin I

Soit $(f, g) \in C^0([0; 1], [0; 1])^2$ tel que $f \circ g = g \circ f$.

a. On suppose que $\forall x \in [0; 1]$, $f(x) > g(x)$. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, ici $f^n(x)$ représente $f \circ \dots \circ f$ composée n fois, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0; 1]$, $f^n(x) - g^n(x) \geq n\alpha$. En déduire une contradiction.

b. En déduire qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

12.58 *Mines PSI 2018* Titouan Sancier I

Soit $E = \{f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+) \mid f \text{ bijective et } f' = f^{-1}\}$.

- Trouver une fonction $f \in E$ de la forme $f : x \mapsto cx^\alpha$ où c et α sont réels.
- Soit $f \in E$, donner la limite de f en 0. Prouver que f et f^{-1} sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Montrer que $f \in E$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}_+^*$.

12.59 *Mines PSI 2019* Axel Brulavoine II

Soit E un espace vectoriel normé et deux vecteurs non nuls a et b de E .

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \|a + tb\|$.

- La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle lipschitzienne ?
- Si elles existent, calculer $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t)$.
- Montrer que $I = \{t \in \mathbb{R} \mid a + tb \in B(0_E, 1)\}$ est un intervalle borné et ouvert ou que I est vide.

12.60 *CCP PSI 2019* Carla Chevillard II

Soit $E = C^2([0; 1], \mathbb{R})$. On associe à toute fonction $f \in E$ les trois réels suivants :

$$N_0(f) = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad N_1(f) = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + \int_0^1 |f'(t)| dt \quad \text{et} \quad N_2(f) = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| + \left| \int_0^1 f'(t) dt \right| + \left| \int_0^1 f''(t) dt \right|.$$

- Donner la définition d'une norme sur un espace vectoriel.
- Les applications N_0, N_1, N_2 sont-elles des normes sur E ?
- Montrer que $\forall f \in E, \exists c \in [0; 1], f(c) = \int_0^1 f(t) dt$.
- Montrer que $\forall f \in E, N_0(f) \leq N_1(f)$. Existe-t-il $f \in E$ non nulle telle que $N_0(f) = N_1(f)$?
- Existe-t-il une constante $k > 0$ telle que $\forall f \in E, N_1(f) \leq k N_0(f)$?

12.61 *TPE, EIVP PSI 2019* Maël Classeau I

Soit $S = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2 = I_3\}$.

- L'ensemble S est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
- L'ensemble S est-il stable par produit ?
- L'ensemble S est-il fermé ?
- L'ensemble S est-il borné ?

12.62 *X PSI 2020* Louis Carillo II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$, on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. On considère une famille $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_m)$ génératrice de $\mathbb{R}^n$ et on définit l'application $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par $N(x) = \max_{1 \leq i \leq m} |(v_i | x)|$.

- Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
- Trouver une famille $\mathcal{F}$ telle que N soit la norme infini classique.
- Trouver une famille $\mathcal{F}$ telle que N soit la norme 1 classique.
- Montrer que la norme 2 classique n'est pas une norme N obtenue comme ceci.

12.63 *X PSI 2021* Clément Lopez II

- Montrer que la fonction $\cos$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.
- Montrer qu'il n'existe aucune fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f \circ f = \cos$.

12.64 *X PSI 2021* Arthur Riché II

Soit $a \in \mathbb{C}$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 2$.

Trouver les valeurs de a telles que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Indication : traiter d'abord le cas réel.

12.65 ENS Cachan PSI 2021 Titouan Nguyen

Pour une fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, on pose $V(f) = \sup_{n \geq 1} \left(\sup_{0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n \leq 1} \left(\sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| \right) \right)$. On note aussi $BV = \{f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid V(f) < +\infty\}$. Pour une fonction $f \in BV$, on dit que f est à variations bornées.

- Une fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne appartient-elle à BV ?
- Une fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ monotone appartient-elle à BV ?
- Donner un exemple de fonction continue $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \notin BV$.
- Soit $f \in BV$, la fonction f est-elle bornée ?
- L'application $N : BV \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $N(f) = |f(0)| + V(f)$ fait-elle de BV un espace vectoriel normé ?
- Si $(f, g) \in BV^2$ a-t-on nécessairement $fg \in BV$?
- Soit $(f, g) \in BV^2$ avec $g : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ monotone, montrer que $f \circ g \in BV$.
- Soit $(f, g) \in BV^2$ avec $g : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$, la condition f monotone implique-t-elle que $f \circ g \in BV$?

12.66 Centrale Maths1 PSI 2021 Tinaël Gelpe

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres distinctes sont $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ avec $p \geq 2$.

On suppose de plus que $\forall i \in \llbracket 2; p \rrbracket, |\lambda_i| < |\lambda_1|$ (*).

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Tr}(A^k) \neq 0$, on pose $t_k = \frac{\text{Tr}(A^{k+1})}{\text{Tr}(A^k)}$.

- Montrer que les t_k sont définis à partir d'un rang k_0 et que $(t_k)_{k \geq k_0}$ converge vers une limite à déterminer.
- Les résultats de la question **a.** sont-ils encore vérifiés si (*) ne l'est plus ?

c. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d. Déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{A^k}{k}$.

12.67 Mines PSI 2021 Esteban Poupinet II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\exp_p(A) = \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!}$ pour $p \in \mathbb{N}$.

- Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace de E . Montrer que F est fermé.
- Montrer que la suite $(\exp_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$ converge. On note $\exp(A)$ sa limite.
- Montrer que $\exp(A) \in \bigcup_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} \text{Vect}(A^k)$.

12.68 ENS Cachan PSI 2022 Colin Herviou-Laborde I

Soit I un segment de $\mathbb{R}$, $E = C^0(I, \mathbb{R})$ et $f \in E$. On se donne une forme linéaire $u : E \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que u est positive si on a $u(f) \geq 0$ pour toute fonction positive $f \in E$. On pose $e : x \rightarrow 1 \in E$.

- Si u est positive, montrer que $\forall f \in E, |u(f)| \leq u(|f|)$.
- Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall f \in E, |u(f)| \leq C \|f\|_{\infty, I}$.
- Calculer $\sup_{\substack{f \in E \\ f \neq 0}} \frac{|u(f)|}{\|f\|_{\infty, I}}$.

12.69 *ENS Cachan PSI 2022* Colin Herviou-Laborde II

Soit un entier $n \geq 2$ et $p_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $p_2(M) = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j}^2}$ si $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer p_2 est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Est-ce qu'on peut munir $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une structure d'espace euclidien telle que la norme euclidienne associée soit p_2 . Si oui, donner ce produit scalaire.
- Démontrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|MX\|_2 \leq p_2(M)\|X\|_2$.
- Calculer $\sup_{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \neq 0}} \frac{\|MX\|_2}{\|X\|_2}$.

12.70 *ENS Cachan PSI 2022* Margaux Millaret I

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Montrer que si f est lipschitzienne, alors f est continue.
- Est-ce que le fait que f soit lipschitzienne implique que f soit dérivable ?

12.71 *ENS Cachan PSI 2022* Camille Pucheu I

Soit C une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.

- Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de C qui converge vers $\sup(C)$.
On pose $X = \{|x - y| \mid (x, y) \in C^2\}$.
- Montrer que X admet une borne inférieure et une borne supérieure.
- Exprimer $\sup(X)$ en fonction de $\sup(C)$ et de $\inf(C)$.

12.72 *ENS Cachan PSI 2022* Camille Pucheu II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et le produit scalaire défini dans $\mathbb{R}^n$ par $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$.

On note $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ (pour ce produit scalaire canonique).

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, montrer que si $\forall t \in \mathbb{R}, at^2 + bt \geq 0$, alors $b = 0$.
- Soit B une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Bx, x \rangle \geq 0$. Montrer que pour un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle Bx_0, x_0 \rangle = 0$, on a $Bx_0 = 0$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique à laquelle on associe $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par $F(x) = \langle Ax, x \rangle$.

- Montrer que $\inf_{x \in S} F(x)$ existe et que cette borne inférieure est atteinte.
- Soit $\lambda_1 = \min_{x \in S} F(x)$ et $e_1 \in S$ tel que $\lambda_1 = \langle Ae_1, e_1 \rangle$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle (A - \lambda_1 I_n)x, x \rangle \geq 0$.
- Montrer que λ_1 est la plus petite valeur propre de A .

12.73 *Centrale Maths1 PSI 2022* Olivier Courmont II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M . On suppose de plus que toutes les matrices M_k sont diagonalisables.

- La matrice M est-elle diagonalisable ?
- Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P) = n \in \mathbb{N}^*$ et P unitaire, montrer que l'on a l'équivalence
(P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$) $\iff (\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n)$.
- La matrice M est-elle trigonalisable ?

12.74 *Centrale Maths1 PSI 2022* Florian Picq

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $(A, B) \in E^2$ telles que $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on pose $\langle A, B \rangle = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}$ et $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$.

a. Montrer que $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$.

b. Rappeler l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ dans $\mathbb{R}^m$. En déduire que $\forall (A, B) \in E^2$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Soit $A \in E$ inversible et $F : E \rightarrow E$ définie par $F(M) = 2M - MAM$.

On considère une suite de matrices $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que $AM_0 = M_0A$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $M_{p+1} = F(M_p)$.

c. Montrer que si $\|I_n - AM_0\| < 1$ alors $\lim_{p \rightarrow +\infty} M_p = A^{-1}$.

12.75 *Mines PSI 2022* Amandine Darrigade II

Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$, $f \in E$ et $\phi(f) : x \mapsto \int_0^x tf(t)dt$.

a. Montrer que ϕ définit un endomorphisme de E .

b. Déterminer le plus petit réel K_1 tel que $\forall f \in E$, $\|\phi(f)\|_1 \leq K_1 \|f\|_\infty$.

c. Déterminer le plus petit réel K_2 tel que $\forall f \in E$, $\|\phi(f)\|_1 \leq K_2 \|f\|_1$.

12.76 *Mines PSI 2022* Paul Lafon I

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n(A) = I_2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{4^k (2k-1)} \binom{2k}{k} A^k$.

a. Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $|a| < 1$ et $|b| < 1$, montrer que la suite $(B_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

b. Si $A = \lambda I_2 + N$ avec $|\lambda| < 1$, $N \neq 0$ et $N^2 = 0$, montrer que la suite $(B_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

c. Si $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$, $|\lambda| < 1$, montrer que $(B_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $B^2 = I_2 + A$.

12.77 *Mines PSI 2022* Thibault Le Gal II

Soit f et g deux fonctions continues de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$.

On pose $A = \{x \in [0; 1] \mid f(x) = x\}$.

a. Montrer que $A \neq \emptyset$ et que A admet un minimum et un maximum.

b. En déduire l'existence d'un réel $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

12.78 *Mines PSI 2022* Guillaume Tran-Ruesche I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, N est dite nilpotente d'indice $k \in \mathbb{N}^*$ si $N^k = 0$ et $N^{k-1} \neq 0$.

On pose J_n la matrice dont tous les coefficients sont nuls à part ceux de la sur-diagonale qui valent 1.

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit l'exponentielle de la matrice M , notée $\exp(M)$ ou e^M , par $e^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$.

a. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice k , montrer qu'il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $(X, NX, \dots, N^{k-1}X)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En déduire que $k \leq n$.

b. On suppose que $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente d'indice n , montrer que N est semblable à J_n .

c. Soit A, B deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.

Montrer que $A + B$ est nilpotente et que $I_n + A$ est inversible.

d. Montrer que e^{J_n} est inversible.

e. Montrer que $J_n e^{J_n}$ est nilpotente d'indice n .

f. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer que $P e^{J_n} P^{-1} = e^{P J_n P^{-1}}$.

g. Montrer qu'il existe une matrice $\tilde{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n = \tilde{N} e^{\tilde{N}}$.

12.79 *Mines PSI 2023* Pierre Dobeli II

- a. Montrer que $O(n)$ n'est pas convexe.
- b. Montrer que $O(n)$ est un fermé borné.
- c. Caractériser géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

12.80 *Mines PSI 2023* Maxence Prieur I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour $n+1$ complexes distincts $a_0, a_1, \dots, a_n$, on définit $\Phi : \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ par $\Phi(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n))$.

- a. Montrer que Φ est une bijection.
- b. En déduire que $\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \exists ! L_i \in \mathbb{C}_n[X], (L_i(a_i) = 1 \text{ et } \forall j \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}, L_i(a_j) = 0)$.
- c. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, trouver une expression de χ_M en fonction de $L_0, \dots, L_n$.
- d. Montrer que l'application $f : M \rightarrow \chi_M$ est continue.
- e. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

12.81 *Mines PSI 2023* Antoine Vallade I

Soit E un espace normé, X une partie de E et C un convexe de E .

- a. Montrer que $\overset{\circ}{X} \subset X \subset \overline{X}$.
- b. Montrer que $\overset{\circ}{C}$ et $\overline{C}$ sont aussi des convexes.

12.82 *CCINP PSI 2023* Olivier Farje I

Soit $E = \{f \in C^1([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ et N_1, N_2 les deux applications définies sur E par $N_1(f) = \|f + f'\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f'\|_\infty$ (les normes infinies sont calculées sur $[0; 1]$).

- a. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes.
- b. Montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes.

12.83 *Centrale Maths1 PSI 2024* Olivier Farje

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, on suppose que P n'admet pas de racine complexe.

On définit alors la fonction I sur $\mathbb{R}_+$ par $I(r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(re^{i\theta})}$.

- a. Montrer que I est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
- b. Montrer que I est constante sur $\mathbb{R}_+$.
- c. Pour $\varepsilon > 0$, montrer l'existence de $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (r, \theta) \in [k; +\infty[\times [0; 2\pi], \left| \frac{1}{P(re^{i\theta})} \right| \leq \varepsilon$.
- d. Conclure.

Question supplémentaire :

- soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g : t \mapsto f(t^2, 2^t)$. Calculer la dérivée de g .

12.84 *Mines PSI 2024* Armand Coiffe et Adrien Saugnac II

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Montrer que $A = \{f(m) - f(n) \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

12.85 *Mines PSI 2024* Mathias Pisch II

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

- a. Calculer χ_A . Indication : on pourra commencer par l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$.
- b. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \|A^n\| z^n$.

12.86 *CCINP PSI 2024* Lucie Girard II

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$.

Soit $x \in \text{Im}(u - \text{id}_E) \cap \text{Ker}(u - \text{id}_E)$.

- a. Justifier l'existence d'un vecteur $y \in E$ tel que $u(y) = x + y$.
- b. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, $u^n(y)$ en fonction de n , x et y .
- c. Que peut-on en déduire sur x ?
- d. Que peut-on dire de $\text{Im}(u - \text{id}_E)$ et $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$ dans E ?

12.7 Officiel de la Taupe

12.87 *OdIT Centrale PSI 2012/2013 planche 128II*

Soit $f :]0; 1[\rightarrow \mathbb{R}$, dérivable et telle que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf'(x) = \mu \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mu = 0$.

12.88 *OdIT Mines PSI 2012/2013 planche 174I*

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et convexe sur un intervalle I .

Montrer que : $\forall a \in I, \forall r \in \mathbb{R}_+, [a - r; a + r] \subset I \implies \int_{a-r}^{a+r} f(t) dt \geq 2rf(a)$.

On suppose maintenant f de classe C^2 sur I et $f''(a) < 0$. Montrer que la propriété précédente n'est pas vérifiée. Indication : on pourra étudier les variations de $g(x) = \int_{a-x}^{a+x} f(t) dt - 2xf(a)$. Conclure.

12.89 *OdIT 2013/2014 X-Cachan PSI planche 72*

- a. Montrer que l'ensemble E des fonctions lipschitziennes $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un sous-espace de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- b. Montrer que $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E . Donner un supplémentaire de F .
- c. Soit $0 < t < 1$; montrer que ϕ , qui à $f \in F$ associe g telle que $g(x) = f(x) - f(tx)$, est bien défini et que c'est un endomorphisme. Est-il injectif ?
- d. Soit $(f, g) \in F^2$ tel que $g = \phi(f)$. Exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} g(t^k x)$. Montrer que $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(t^k x)$. Conclure.
- e. Déterminer toutes les fonctions $f \in F$ telle que $f(x) - 2f(tx) + f(t^2 x) = x$.

12.90 *OdIT Mines PSI 2013/2014 planche 196II*

Soit un réel p . Montrer que : $(\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, |x^p - y^p| \leq |x - y|^p) \iff p \leq 1$.

12.91 *OdIT ENSAM PSI 2013/2014 planche 288III*

Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ transformant tout segment en un segment de même longueur.

12.92 OdIT 2017/2018 Centrale PSI planche 165

- a. Montrer que $N : f \mapsto N(f) = \sup_{[0;1]} |f'' + 2f' + f|$ est une norme sur $E = \{f \in C^2([0;1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.
- b. Soit $h(t) = f(t)e^t$ avec $f \in E$; montrer que $\forall t \in [0;1], h(t) = \int_0^t (t-u)h''(u)du$.
- c. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|f\|_\infty \leq aN(f)$ et minimiser a .

12.93 Compléments OdIT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 566II

Montrer que si $0 < p < 1, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x+y|^p \leq |x|^p + |y|^p$ (on pourra montrer que $\forall t \geq 0, (1+t)^p \leq 1+t^p$).
 $N(x) = |x|^p$ est-elle une norme sur $\mathbb{R}$?

12.94 Compléments OdIT 2017/2018 Mines-Télécom PSI planche 574II

Donner l'égalité des accroissements finis et en faire une interprétation géométrique.
Soit f dérivable de I dans $\mathbb{R}$; montrer que si f' est bornée, f est lipschitzienne.