

TD 20 : ESPACES NORMÉS

PSI 1 2025-2026

vendredi 27 février 2026

20.1 Méthode 1 : considérons $X = \{t \in [0; 1] \mid f(t) \in A\}$. Alors X est une partie non vide ($0 \in X$) et majorée (par 1) de $\mathbb{R}$ donc, à ce titre, admet une borne supérieure qu'on note x . Montrons que $f(x) \in \text{Fr}(A)$.

• Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = x$. Comme f est continue en x , par caractérisation séquentielle de la continuité, il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(t_n) = f(x)$. Par caractérisation séquentielle des points adhérents, comme $(f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de vecteurs de A , on en déduit que $f(x)$ est adhérent à A , c'est-à-dire $f(x) \in \bar{A}$.

• Supposons que $f(x) \in \overset{\circ}{A}$: il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x), \varepsilon) \subset A$. Comme $\overset{\circ}{A} \subset A$, on a $x < 1$ car $f(1) \notin A$. Mais comme f est continue en x , on aurait un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in [0; 1], |t - x| < \alpha \implies \|f(t) - f(x)\| < \varepsilon$. On aurait $\forall t \in [x; x + \alpha \cap [0; 1]], |t - x| < \alpha$ donc $\|f(t) - f(x)\| < \varepsilon \implies f(t) \in B(f(x), \varepsilon) \subset A$ donc $f(t) \in A$ ce qui contredit le fait que x soit la borne supérieure de X car ce qui précède montre que $[x; x + \alpha \cap [0; 1]] \subset X$. Ce raisonnement par l'absurde nous permet de conclure que $f(x) \notin \overset{\circ}{A}$.

Au final, $f(x) \in \bar{A} \cap (\overset{\circ}{A})^c = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \text{Fr}(A)$.

Méthode 2 : $Y = \{t \in [0; 1] \mid f(t) \notin A\}$ est une partie non vide ($1 \in Y$) et majorée (par 0) de $\mathbb{R}$ donc, à ce titre, admet une borne inférieure qu'on note y . Montrons que $f(y) \in \text{Fr}(A)$.

• Supposons que $f(y) \in \overset{\circ}{A}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(y), \varepsilon) \subset A$ et, par continuité de f en y , il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in [y; y + \alpha \cap [0; 1]], \|f(t) - f(y)\| < \varepsilon$ ce qui montre que $f(t) \in B(f(y), \varepsilon) \subset A$ donc $f(t) \in A$. On aurait donc $\forall t \in [y; y + \alpha \cap [0; 1]], t \notin Y$. Cette condition est incompatible avec la condition $\inf(Y) = y$. On vient donc de démontrer par l'absurde que $f(y) \notin \overset{\circ}{A}$. Comme $\overset{\circ}{A} \subset A$ et que $f(0) \in \overset{\circ}{A}$, on a forcément $y > 0$.

• Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, le réel $t_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)y$, alors $0 \leq t_n < y$ donc $t_n \notin Y$ ce qui montre que $f(t_n) \in A$.

Puisque $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers y , par caractérisation séquentielle de la continuité, $(f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(y)$, et comme elle est constituée de vecteurs de A , par caractérisation séquentielle des vecteurs adhérents, $f(y) \in \bar{A}$.

Au final, $f(x) \in \bar{A} \cap (\overset{\circ}{A})^c = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \text{Fr}(A)$.

20.2 a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{1}{(n+x)^2} + \frac{1}{(n-x)^2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$, on a

$f_n(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge et la fonction g est donc bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$.

Soit $a \in]0; 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-a; a]$, alors $0 \leq f_n(x) \leq \frac{2}{(n-a)^2}$. Ainsi, $\|f_n\|_{\infty, [-a; a]} \leq \frac{2}{(n-a)^2}$. Mais

comme $\sum_{n \geq 1} \frac{2}{(n-a)^2}$ converge par RIEMANN, la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur tout segment de $] -1; 1[$. Comme toutes les f_n sont continues sur $] -1; 1[$, g est continue sur $] -1; 1[$ par théorème.

De plus, on a classiquement $g(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2} = 2\zeta(2) = \frac{\pi^2}{3}$.

b. La fonction φ de l'énoncé est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ car g l'est et que $\sin$ ne s'annule qu'en les multiples de π . Comme il est donné qu'elle s'annule en tous les entiers, elle est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $g(x+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+1+x)^2} + \frac{1}{(n-1-x)^2} \right) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{(p+x)^2} + \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{(q-x)^2}$ donc il

vient $g(x+1) = \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+x)^2} \right) - \frac{1}{(1+x)^2} + \left(\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(q-x)^2} \right) + \frac{1}{x^2} = g(x) + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ de sorte que $\varphi(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(x+1))} + g(x+1) = \frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + g(x) = \varphi(x)$ car $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$.

Par conséquent φ est 1-périodique car elle vérifie aussi $\forall n \in \mathbb{Z}, \varphi(n+1) = \varphi(n) = 0$.

Comme g est continue sur $]0;1[$, que $x \mapsto \sin(\pi x)$ l'est aussi et ne s'y annule pas, φ est continue sur $]0;1[$ par opérations. Pour vérifier la continuité de φ sur $\mathbb{R}$, comme elle est 1-périodique, il suffit de vérifier que φ est continue en 0. Comme g est continue en 0 avec $g(0) = \frac{\pi^2}{3}$, on vérifie $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} \right) = -\frac{\pi^2}{3}$.

On a le développement limité $\sin(\pi x) \underset{0}{=} \pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3)$ donc $\sin^2(\pi x) \underset{0}{=} \pi^2 x^2 - \frac{\pi^4 x^4}{3} + o(x^4)$ ce qui donne en inversant $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} \underset{0}{=} \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1 - \frac{\pi^2 x^2}{3} + o(x^2)} \underset{0}{=} \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{\pi^2 x^2}{3} + o(x^2) \right) \underset{0}{=} \frac{1}{x^2} + \frac{\pi^2}{3} + o(1)$. Ainsi, $\varphi(x) \underset{0}{=} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{3} + o(1) \underset{0}{=} o(1)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \varphi(0) = 0$.

Au final, la fonction φ est bien un élément de E .

c. Soit $f \in E$, la fonction $h : x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et, comme f est 1-périodique, $h(x+1) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) + f\left(\frac{x+2}{2}\right) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) = h(x)$ donc h est elle aussi 1-périodique. De plus, h est continue sur $\mathbb{R}$ par opérations donc $h \in E$. Ainsi, comme la linéarité de L est claire, L est un endomorphisme de E . De plus, pour $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$, $|L(f)(x)| = \left| f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right| \leq \left| f\left(\frac{x}{2}\right) \right| + \left| f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right| \leq 2\|f\|_\infty$ ainsi L est 2-lipschitzienne donc continue. L'inégalité précédente montre que $\|L\| = \sup_{f \in E, f \neq 0} \frac{\|L(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq 2$. De plus, si on prend $f = 1$ (fonction constante), on a $L(f) = 2 = 2f$ et $f \neq 0$ donc $\|L\| = 2$.

d. Posons $\psi = L(\varphi)$. Pour $x \in]0;1[$, puisque $\sin\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, on obtient $\psi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{4}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x/2)} + g\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{\pi^2}{\cos^2(\pi x/2)} + g\left(\frac{x+1}{2}\right)$ qui devient $\psi(x) = \frac{4}{x^2} + \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x/2) \cos^2(\pi x/2)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n+x)^2} + \frac{4}{(2n-x)^2} + \frac{4}{(2n+1+x)^2} + \frac{4}{(2n-1-x)^2}$. Or $\frac{4}{(x+1)^2} = \frac{4}{(2-1-x)^2}$ et $\sin^2(\pi x/2) \cos^2(\pi x/2) = \frac{\sin^2(x)}{4}$ donc, en regroupant les termes pairs et impairs dans la même série : $\psi(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{4\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+x)^2} + \frac{1}{(n-x)^2} \right) = 4\varphi(x)$.

De plus, $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - \pi^2 + g(1/2) = 4 - \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + 4 + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = -\pi^2 + 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 0$ (classiquement en séparant les termes pairs et impairs et en se ramenant à $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$).

Comme ψ est 1-périodique d'après **c.** et que $\forall n \in \mathbb{Z}, \psi(n) = \psi(0) = \varphi(0) + \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ d'après ce qui précède, on en déduit que $\psi = 4\varphi$. D'après la question **c.**, on a donc $\|\psi\|_\infty = 4\|\varphi\|_\infty = \|L(\varphi)\|_\infty \leq 2\|\varphi\|_\infty$ ce qui montre que $\|\varphi\|_\infty = 0$ donc que φ est la fonction nulle. On en déduit donc que pour tout réel x non entier : $\varphi(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + g(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+x)^2} + \frac{1}{(n-x)^2} \right) - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = 0$ donc que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ en regroupant les deux séries en une seule à indices entiers relatifs.

20.3 a. Pour $(t, t') \in \mathbb{R}^2$, $|f(t) - f(t')| = \left| \|a + tb\| - \|a + t'b\| \right| \leq \|a + tb - (a + t'b)\|$ par la seconde inégalité triangulaire, d'où $|f(t) - f(t')| \leq \|(t - t')b\| = \|b\| |t - t'|$. Ainsi, f est $\|b\|$ -lipschitzienne donc continue.

b. Comme $tb = (a + tb) - a$, par inégalité triangulaire, on obtient $\|tb\| = \|a + tb\| - \|a\| \leq \|a + tb\| + \|a\|$ donc $f(t) = \|a + tb\| \geq \|b\| |t| - \|a\|$. Comme $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\|b\| |t| - \|a\|) = +\infty$, par minoration, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = +\infty$.

c. Intervalle : si $I \neq \emptyset$, soit $(t_1, t_2) \in I^2$ tel que $t_1 < t_2$. On va montrer que $[t_1; t_2] \subset I$, c'est-à-dire que I est un convexe. Soit $t \in [t_1; t_2]$, en faisant un dessin, comme la trajectoire de $t \mapsto a + tb$ est la droite affine passant par le "point" a de vecteur directeur b , on voit que le vecteur $a + tb$ est dans le segment $[a + t_1b; a + t_2b]$, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\alpha \in [0; 1]$ tel que $a + tb = \alpha(a + t_1b) + (1 - \alpha)(a + t_2b)$. Un simple calcul, comme $b \neq 0_E$, montre que $\alpha = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}$. Par inégalité triangulaire, on a donc $\|a + tb\| \leq \alpha\|a + t_1b\| + (1 - \alpha)\|a + t_2b\|$ or, puisque t_1 et t_2 sont dans I , $\|a + t_1b\| < 1$ et $\|a + t_2b\| < 1$, d'où, puisque $\alpha > 0$ ou $1 - \alpha > 0$, on en déduit que $\|a + tb\| < 1$. Ainsi, $t \in I$. I est donc un convexe, I est alors un intervalle.

Borné si $I \neq \emptyset$, par définition des limites de $\mathbf{b}_\bullet$, en prenant $\varepsilon = 1$, il existe t_0 tel que $\forall t \geq t_0$, $f(t) \geq 1$ donc $[t_0; +\infty[\cap I = \emptyset$. On peut donc conclure que I est majoré par t_0 . Le même raisonnement avec $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = +\infty$ montre que I est aussi minoré par un réel t'_0 . Alors, I est un intervalle borné.

On pouvait aussi reprendre l'inégalité $\|a + tb\| \geq \|b\| |t| - \|a\|$ qui montre que si $t \in I$, on a $\|a + tb\| < 1$ donc $\|b\| |t| - \|a\| < 1$ d'où $|t| < \frac{1 + \|a\|}{\|b\|}$ donc I est borné.

Ouvert : supposons $I \neq \emptyset$, on va montrer que I est ouvert de trois manières différentes.

- Le plus simple, par définition de $I = \{t \in \mathbb{R} \mid \|a + tb\| = f(t) < 1\}$, on a $I = f^{-1}(] - 1; 1[) = f^{-1}(] - \infty; 1[)$ donc I est l'image directe d'un ouvert par une fonction continue donc c'est un ouvert.

- Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (I^c)^\mathbb{N}$ une suite convergente (vers t) d'éléments de I^c . Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|a + t_nb\| = f(t_n) \geq 1$ par définition de I . Par caractérisation séquentielle de la continuité, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(t_n) = f(t)$. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(t_n) \geq 1$ donc, à la limite, $f(t) \geq 1$ ce qui prouve que $t \in I^c$. Ainsi, I^c est fermé par caractérisation séquentielle des fermés donc I est ouvert.

- Soit $t \in I$, par définition $v = a + tb \in B(0_E, 1)$ qui est une boule ouverte donc il existe $r > 0$ tel que $B(v, r) \subset B(0_E, 1)$; on peut prendre par exemple $r = 1 - \|v\| > 0$. Or f est continue en t donc il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t' \in \mathbb{R}$, $|t - t'| < \eta \implies |f(t) - f(t')| < r \implies f(t') < f(t) + r = 1$ car $f(t) = \|v\|$. Ainsi, si $t' \in]t - \eta; t + \eta[$, on a $f(t') = \|a + t'b\| < 1$ donc $t' \in I$ et I est bien ouvert.

Par conséquent, $I = \{t \in \mathbb{R} \mid a + tb \in B(0_E, 1)\}$ est un intervalle borné et ouvert ou I est vide.

20.4 a. S n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car la matrice nulle ne vérifie pas $0^2 = I_3$ par exemple.

b. S n'est pas stable par produit car, par exemple, si on prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on

a bien $A^2 = B^2 = I_3$ mais $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $(AB)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq I_3$.

c. Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite de matrices de S qui converge vers $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. L'application produit définie par

$P : (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2 \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $P(A, B) = AB$ est bilinéaire en dimension finie donc elle est continue. L'application $D : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2$ définie par $D(A) = (A, A)$ est linéaire en dimension finie donc elle est continue. Ainsi, par composée, l'application carré $C = P \circ D : A \mapsto A^2$ est continue sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Ainsi, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A$, par caractérisation séquentielle de la continuité, $\lim_{n \rightarrow +\infty} C(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^2 = A^2$. Mais la suite $(A_n^2)_{n \geq 0}$ est constante égale à I_3 . Par unicité de la limite, $A^2 = I_3$. L'ensemble S est donc fermé.

d. S n'est pas borné car les matrices $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$ sont dans S quel que soit $a > 0$ alors que $\forall a > 1, \|M_a\|_\infty = a$ donc $\lim_{a \rightarrow +\infty} \|M_a\|_\infty = +\infty$.

20.5 a. Soit $f \in E$, on a $f \leq |f|$ donc $g = |f| - f \geq 0$ ce qui donne, par hypothèse, $u(g) = u(|f|) - u(f) \geq 0$ par linéarité de u . De même, $-f \leq |f|$ donc $h = |f| + f \geq 0$ et, à nouveau $u(h) = u(|f|) + u(f) \geq 0$ donc $-u(|f|) \leq u(f) \leq u(|f|)$ ce qui garantit bien que $|u(f)| \leq u(|f|)$.

b. Pour $f \in E$, comme f est continue sur le segment I , elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes donc $|f| \leq \|f\|_{\infty, I}$. On pose cette fois $a = \|f\|_{\infty, I} - f \geq 0$ donc $u(a) \geq 0$ ce qui donne une nouvelle fois par linéarité de u , $\|f\|_{\infty, I} u(e) - u(|f|) \geq 0$. On a donc, d'après a., $|u(f)| \leq u(|f|) \leq \|f\|_{\infty, I} u(e)$ donc on a bien $\forall f \in E, |u(f)| \leq C \|f\|_{\infty, I}$ en posant $C = u(e) \geq 0$ car e est positive sur I .

D'après la question précédente, $\forall f \in E \setminus \{0\}, \frac{|u(f)|}{\|f\|_{\infty, I}} \leq u(e)$. La partie $A = \left\{ \frac{|u(f)|}{\|f\|_{\infty, I}} \mid f \in E \setminus \{0\} \right\} \subset \mathbb{R}$ est non vide (car il existe des fonctions non nulles sur I) et majorée par $u(e)$ ce qui montre que la borne supérieure de l'énoncé existe et que $\sup(A) \leq u(e)$. De plus, en prenant $f = e$, on a $e \in E \setminus \{0\}$ et $\frac{|u(f)|}{\|f\|_{\infty, I}} = u(e)$ donc $u(e) \in A$ ce qui montre que cette borne supérieure est un maximum (atteint en e) et que $\sup_{\substack{f \in E \\ f \neq 0}} \frac{|u(f)|}{\|f\|_{\infty, I}} = u(e)$.

20.6 a. p_2 est bien définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_+$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- si $p_2(A) = 0$, on a $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = 0$ ce qui montre, comme une somme de quantités positives ne peut être nulle que si tous ses termes sont nuls, que $\forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2, a_{i,j} = 0$ donc que $A = 0$ (séparation).
- si $\lambda \in \mathbb{R}, p_2(\lambda A) = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} (\lambda a_{i,j})^2} = \sqrt{\lambda^2} \times \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2} = |\lambda| p_2(A)$ (homogénéité).
- $p_2(A+B)^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} + b_{i,j})^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 + 2 \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j} + \sum_{1 \leq i,j \leq n} b_{i,j}^2$. Par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ dans $\mathbb{R}^{n^2}$, on a $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j} \leq \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2} \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} b_{i,j}^2}$ donc on obtient $p_2(A+B)^2 \leq p_2(A)^2 + 2p_2(A)p_2(B) + p_2(B)^2$ ce qui, en passant à la racine, donne bien la majoration $p_2(A+B) \leq p_2(A) + p_2(B)$ (inégalité triangulaire).

Par conséquent, p_2 est bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. La norme p_2 définie par l'énoncé est, d'après le cours, la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique $(\cdot | \cdot) : (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $(A|B) = \text{Tr}(A^T B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}$.

c. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X^T = (x_1 \cdots x_n)$, en notant $L_i(M)$ la ligne i de la matrice M vue comme un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $(MX)^T = \left(\sum_{j=1}^n m_{1,j} x_j \cdots \sum_{j=1}^n m_{n,j} x_j \right) = ((L_1(M)|X) \cdots (L_n(M)|X))$. Ainsi,

$\|MX\|_2^2 = \sum_{i=1}^n (L_i(M)|X)^2$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a $(L_i(M)|X)^2 \leq \|L_i(M)\|_2^2 \|X\|_2^2$ donc

$\|MX\|_2^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \|L_i(M)\|_2^2 \right) \|X\|_2^2 = p_2(M)^2 \|X\|_2^2$. En passant à la racine, on a bien $\|MX\|_2 \leq p_2(M) \|X\|_2$.

Pour trouver $X \neq 0$ tel que $\|MX\|_2 = p_2(M) \|X\|_2$, il faut que toutes les inégalités précédentes soient des égalités, c'est-à-dire que X et $L_i(M)$ soient colinéaires pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, donc que toutes les lignes de M soient proportionnelles, ou encore que M soit de rang 1. Ce n'est donc pas la meilleure constante cherchée dans le cas général.

Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\|MX\|_2^2 = (MX|MX) = X^T M^T M X$. La matrice $M^T M$ est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable par le théorème spectral. De plus, si λ est une valeur propre de $M^T M$, il existe $X \neq 0$ tel que $M^T M X = \lambda X$ ce qui donne $X^T M^T M X = \lambda X^T X$ ou encore $\|MX\|_2^2 = \lambda \|X\|_2^2$ donc $\lambda \geq 0$ car $\|X\|_2^2 > 0$ puisque $X \neq 0$. On dit que $M^T M$ est symétrique positive. Il existe donc $P \in O(n)$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale avec des termes positifs sur la diagonale (les valeurs propres de $M^T M$), plus précisément $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ telles que $M^T M = P D P^T$.

Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|MX\|_2^2 = X^T M^T M X = X^T P D P^T X = Y^T D Y$ en posant $Y = P^T X$. Si on note $Y^T = (y_1 \dots y_n)$, on calcule $Y^T D Y = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 \leq \lambda_n \sum_{k=1}^n y_k^2 = \lambda_n \|Y\|_2^2$. Or $\|Y\|_2^2 = Y^T Y = X^T P P^T X = X^T X = \|X\|_2^2$ car $P P^T = I_n$.

Ainsi, $\|MX\|_2^2 \leq \lambda_n \|X\|_2^2$ d'où, en passant à la racine, $\|MX\|_2 \leq \sqrt{\lambda_n} \|X\|_2$ donc $\frac{\|MX\|_2}{\|X\|_2} \leq \sqrt{\lambda_n}$. Si X_n est un

vecteur propre unitaire de $M^T M$ associé à la valeur propre λ_n , on a $\frac{\|MX_n\|_2^2}{\|X_n\|_2^2} = X_n^T M^T M X_n = \lambda_n X_n^T X_n = \lambda_n$

donc $\frac{\|MX_n\|_2}{\|X_n\|_2} = \sqrt{\lambda_n}$. Par conséquent, $\sqrt{\lambda_n}$ majore $\left\{ \frac{\|MX\|_2}{\|X\|_2} \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } X \neq 0 \right\}$ et fait partie de

cet ensemble, ceci prouve que $\sup_{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \neq 0}} \frac{\|MX\|_2}{\|X\|_2} = \max_{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \neq 0}} \frac{\|MX\|_2}{\|X\|_2} = \sqrt{\lambda_n}$.

20.7 a. Supposons que f est k -lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, alors $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, alors, pour tout réel x tel que $|x - x_0| \leq \alpha = \frac{\varepsilon}{k+1}$, on a $|f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0| \leq \frac{\varepsilon k}{k+1} \leq \varepsilon$. Ceci prouve que f est continue en x_0 et, comme ceci est valable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $f : x \mapsto |x|$. La fonction f n'est pas dérivable en 0. Pourtant, f est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. En effet, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$, traitons quatre cas :

- si $0 \leq x \leq y$, on a $|f(x) - f(y)| = |x - y| \leq 1 \cdot |x - y|$.
- si $x \leq y \leq 0$, on a $|f(x) - f(y)| = |(-x) - (-y)| = |y - x| = |x - y| \leq 1 \cdot |x - y|$.
- si $x \leq 0 \leq y \leq |x|$, on a $|f(x) - f(y)| = |(-x) - y| = |x + y| = -x - y \leq 1 \cdot |x - y| = y - x$ car $-y \leq y$.
- si $x \leq 0 \leq |x| \leq y$, on a $|f(x) - f(y)| = |(-x) - y| = |x + y| = x + y \leq 1 \cdot |x - y| = y - x$ car $x \leq -x$.

Le fait que f soit lipschitzienne n'implique donc pas que f soit dérivable.

20.8 a. Soit un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $at^2 + bt \geq 0$. traitons deux cas :

Si $a = 0$, pour avoir $bt \geq 0$ pour tout réel t , on doit clairement avoir $b = 0$.

Si $a \neq 0$, $f : t \mapsto at^2 + bt$ est polynomiale de degré 2 et son discriminant $\Delta = b^2$ doit être négatif car sinon f s'annulerait deux fois et changerait de signe au passage des racines. Ainsi, $0 \leq b^2 \leq 0$ donc $b = 0$.

Dans les deux cas, on a forcément $b = 0$ si $\forall t \in \mathbb{R}$, $at^2 + bt \geq 0$.

b. Méthode 1 : pour se servir de la question précédente, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $f : t \mapsto \langle B(x_0 + tx), x_0 + tx \rangle$.

Par bilinéarité du produit scalaire, $f(t) = \langle Bx_0, x_0 \rangle + (\langle Bx_0, x \rangle + \langle Bx, x_0 \rangle)t + \langle Bx, x \rangle t^2$. Or la matrice B est symétrique donc $\langle Bx_0, x \rangle = x_0^T B^T x = x_0^T Bx = \langle x_0, Bx \rangle = \langle Bx, x_0 \rangle$. Ainsi, par hypothèse, $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 2 \langle Bx_0, x \rangle t + \langle Bx, x \rangle t^2 \geq 0$. La question précédente montre alors que $\langle Bx_0, x \rangle = 0$. Ceci étant vrai pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, on a $Bx_0 \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$ donc $Bx_0 = 0$.

Méthode 2 : d'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $B = PDP^T$. Comme B est positive par hypothèse, on peut écrire $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positives de B . Alors $\langle Bx_0, x_0 \rangle = x_0^T Bx_0 = x_0^T PDP^T x_0 = y_0^T D y_0$ en posant $y_0 = P^T x_0$. Si on pose $y_0 = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ et, on a $\langle Bx_0, x_0 \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 = 0$ donc $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_i y_i^2 = 0$ donc $\lambda_i y_i = 0$ ce qui montre que $D y_0 = 0$ d'où $Bx_0 = PDP^T P y_0 = P D y_0 = 0$ car $P^T P = I_n$.

c. En notant $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^n, F(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$ donc F est polynomiale en les coordonnées de x ce qui prouve que F est continue. On pouvait aussi écrire $F = G \circ H$ où $H : \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^2$ et $G : (\mathbb{R}^n)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont définies par $H(x) = \langle Ax, x \rangle$ et $G(x, y) = \langle x, y \rangle$ puis, comme G et H sont continues car respectivement bilinéaire et linéaire en dimension finie, F est continue par composition. La sphère unité S est clairement bornée. De plus, en notant $N : x \mapsto \|x\|$ la fonction norme qui est continue car 1-lipschitzienne d'après le cours, on a $S = N^{-1}(\{1\})$ et $\{1\}$ est fermé donc S est aussi fermée comme image réciproque d'un fermé par une application continue. F étant continue sur un fermé borné en dimension finie, on sait d'après le théorème des bornes atteintes que F est bornée sur S et y atteint ses bornes, d'où l'existence de $\inf_{x \in S} F(x) = \min_{x \in S} F(x) = \lambda_1 = F(e_1)$ avec $e_1 \in S$ d'après l'énoncé de la question **d.**

d. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, si $x = 0$, alors $\langle (A - \lambda_1 I_n)x, x \rangle = 0 \geq 0$. Si $x \neq 0$, on pose $y = \frac{x}{\|x\|} \in S$ donc $F(y) \geq \lambda_1$ d'après la question précédente, ce qui s'écrit $\langle Ay, y \rangle = \frac{1}{\|x\|^2} \langle Ax, x \rangle \geq \lambda_1$ par bilinéarité du produit scalaire et on a donc $\langle Ax, x \rangle \geq \lambda_1 \langle x, x \rangle$ ou encore $\langle (A - \lambda_1 I_n)x, x \rangle \geq 0$.

e. Comme $A - \lambda_1 I_n$ est symétrique, que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle (A - \lambda_1 I_n)x, x \rangle \geq 0$ et que, d'après ce qui précède, on a aussi $\langle (A - \lambda_1 I_n)e_1, e_1 \rangle = F(e_1) - \lambda_1 = 0$, on a $(A - \lambda_1 I_n)e_1 = 0$ d'après la question **b.** Ainsi, λ_1 est une valeur propre de A et e_1 un vecteur propre unitaire de A associé à la valeur propre λ_1 .

Soit λ une valeur propre de A et $e \in S$ un vecteur propre de A associé à λ_1 , alors on a $Ae = \lambda e$ donc $F(e) = \langle \lambda e, e \rangle = \lambda \|e\|^2 = \lambda \geq \lambda_1$ par construction de λ_1 . Ainsi, λ_1 est la plus petite valeur propre de A .

20.9 a. Si $n = 1$, $M \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc M est diagonalisable.

Si $n \geq 2$, M n'est pas forcément diagonalisable. En effet, si $M_k = \text{diag}\left(\frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+n}\right) + E_{1,2}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, alors M_k est triangulaire supérieure avec des termes tous différents sur la diagonale donc $\chi_{M_k} = \prod_{i=1}^n \left(x - \frac{1}{k+i}\right)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc M_k est diagonalisable. Clairement, en regardant les suites coordonnées (case par case), $\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k = E_{1,2}$ et $\chi_{E_{1,2}} = X^n$ alors que $\dim \text{Ker}(E_{1,2}) = n - 1$ avec la formule du rang car $\text{rang}(E_{1,2}) = 1$. Ainsi, M n'est pas diagonalisable (les deux ordres de multiplicité de 0 ne sont pas égaux) même en étant limite d'une suite de matrices toutes diagonalisables.

b. ($\implies$) Supposons P unitaire et scindé dans $\mathbb{R}[X]$, alors $P = \prod_{k=1}^r (X - \alpha_k)^{m_k}$ avec $r \geq 1, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines

réelles distinctes de P et $m_1, \dots, m_r$ les ordres de multiplicité associés. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $P(z) = \prod_{k=1}^r (z - \alpha_k)^{m_k}$ donc $|P(z)|^2 = \prod_{k=1}^r |z - \alpha_k|^{2m_k}$. Or, pour $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $|z - \alpha_k|^2 = (\operatorname{Re}(z) - \alpha_k)^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 \geq |\operatorname{Im}(z)|^2$ et on a donc $|P(z)|^2 \geq \prod_{k=1}^r |\operatorname{Im}(z)|^{2m_k}$. Comme $\deg(P) = n = \sum_{k=1}^r m_k$, on a $|P(z)|^2 \geq |\operatorname{Im}(z)|^{2n}$ ce qui donne bien $|P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$ en passant à la racine.

($\Leftarrow$) On sait d'après le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS que P est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Soit λ une racine complexe de P , comme $|P(z)| = 0 \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$, on a $|\operatorname{Im}(z)| = 0$ donc z est réelle. Ainsi, P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ car toutes les racines de P sont réelles.

Par double implication, on a montré que $(P \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X]) \iff (\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n)$.

c. Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé, la suite $(M_k)_{k \geq 0}$ converge vers M , donc $(zI_n - M_k)_{k \geq 0}$ converge vers $zI_n - M$. Comme la fonction $\det$ est polynomiale donc continue dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension finie, par caractérisation séquentielle de la continuité, $(\det(zI_n - M_k))_{k \geq 0}$ converge vers $\det(zI_n - M)$. Ainsi, $(\chi_{M_k}(z))_{k \geq 0}$ converge vers $\chi_M(z)$. Comme toutes les matrices M_k sont trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les polynômes χ_{M_k} sont scindés sur $\mathbb{R}$, ce qui montre avec la question **b.** que $|\chi_{M_k}(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|$. En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient donc $|\chi_M(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|$, ce qui montre avec l'autre sens de la question précédente que χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ car χ_M est unitaire de degré n . Ainsi, par théorème, M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

20.10 a. Pour $f \in E$, la fonction $g : t \mapsto tf(t)$ est continue sur le segment $[0; 1]$ donc $\int_0^x tf(t)dt$ est bien défini pour tout $x \in [0; 1]$. Ceci justifie que φ est bien définie. De plus, $\phi(f)$ étant la primitive de g qui s'annule en 0, $\phi(f)$ est de classe C^1 donc a fortiori continue : ϕ va donc bien de E dans E . La linéarité de ϕ découle très naturellement de la linéarité de l'intégrale. Par conséquent, ϕ définit un endomorphisme de E .

b. Pour une fonction $f \in E$ et un réel $x \in [0; 1]$, par inégalité triangulaire sur les intégrales, on obtient la majoration $|\phi(f)(x)| = \left| \int_0^x tf(t)dt \right| \leq \int_0^x t|f(t)|dt \leq \int_0^x t\|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{\|f\|_\infty x^2}{2}$. Ainsi, il vient $\|\phi(f)\|_1 = \int_0^1 |\phi(f)(x)|dx \leq \int_0^1 \frac{\|f\|_\infty x^2}{2} dx = \|f\|_\infty \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \frac{\|f\|_\infty}{6}$. Si on prend $f = 1$, alors $\phi(f) : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ donc $\|\phi(f)\|_1 = \frac{1}{6}$ alors que $\|f\|_\infty = 1$. Ceci justifie que $K_1 = \frac{1}{6}$ est le plus petit réel tel que $\forall f \in E, \|\phi(f)\|_1 \leq K_1 \|f\|_\infty$. En effet, s'il existait $k < \frac{1}{6}$ tel que $\forall f \in E, \|\phi(f)\|_1 \leq k \|f\|_\infty$, en prenant $f = 1$, on aurait $\|f\|_\infty = 1, \phi(f) : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ donc $\|\phi(f)\|_1 = \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{6} \leq k$ ce qui est contradictoire.

c. Pour une fonction $f \in E$ et un réel $x \in [0; 1]$, posons la fonction $F : x \mapsto \int_0^x t|f(t)|dt$ de sorte que l'on a $\|\phi(f)\|_1 = \int_0^1 |\phi(f)(x)|dx \leq \int_0^1 \left(\int_0^x t|f(t)|dt \right) dx = \int_0^1 F(x)dx$ par inégalité triangulaire sur les intégrales. Ainsi, comme F est de classe C^1 sur $[0; 1]$ d'après le théorème fondamental de l'intégration car $t \mapsto t|f(t)|$ est continue sur $[0; 1]$, en posant $u = F$ et $v' : x \mapsto x - 1$, par intégration par parties, on obtient la relation $\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 v'(x)u(x)dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx = \int_0^1 x(1-x)|f(x)|dx$ car $u(0) = v(1) = 0$. Alors, comme $\forall x \in [0; 1], x(1-x) \leq \frac{1}{4}$, on a $\|\phi(f)\|_1 \leq \int_0^1 \frac{|f(x)|}{4} dx = \frac{\|f\|_1}{4}$.

Si on trouvait une fonction non nulle $f \in E$ telle que $\|\phi(f)\|_1 = \frac{\|f\|_1}{4}$, on montrerait comme à la question

précédente que $K_2 = \frac{1}{4}$. Supposons l'existence d'une telle fonction. Alors $\int_0^1 x(1-x)|f(x)|dx = \frac{1}{4} \int_0^1 |f(x)|dx$ ce qui donne, en soustrayant et par linéarité de l'intégrale, la relation $\int_0^1 \left(\frac{1}{4} - x(1-x)\right)|f(x)|dx = 0$. Or $x \mapsto \left(\frac{1}{4} - x(1-x)\right)|f(x)|$ est continue et positive sur le segment $[0;1]$. on en déduit par théorème que $x \in [0;1]$, $\left(\frac{1}{4} - x(1-x)\right)|f(x)| = 0$ donc que $\forall x \in [0;1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $f(x) = 0$. Par continuité de f , on en déduit que $\forall x \in [0;1]$, $f(x) = 0$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse initiale. Ainsi, il n'existe aucune fonction non nulle f telle que $\|\phi(f)\|_1 = \frac{\|f\|_1}{4}$ mais on peut essayer avec les suites de fonctions.

Il faut que l'intégrale se condense autour de $\frac{1}{2}$, un peu comme une fonction de DIRAC, là où $x(1-x)$ est maximal. On peut donc prendre, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto (x(1-x))^n = x^n(1-x)^n$. Posons $I_n = \|f_n\|_1$ et, pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $J(p, q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q dx > 0$. Par le changement de variables $x = 1-t$ on trouve facilement $J(p, q) = J(q, p)$ et par intégration par parties, en posant $u : x \mapsto (1-x)^{q+1}$ et $v : x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}$, on obtient $J(p, q+1) = \frac{q+1}{p+1} J(p+1, q)$. Ainsi, comme $J(p, 0) = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$, on a par télescopage $J(p, q) = \left(\prod_{k=0}^q \frac{J(p+k, q-k)}{J(p+k+1, q-k-1)}\right) \times J(p+q, 0) = \left(\prod_{k=0}^{q-1} \frac{q-k}{p+k+1}\right) \times \frac{1}{p+q+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$. Ainsi, $I_n = J(n, n) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. Soit $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall f \in E$, $\|\phi(f)\|_1 \leq k\|f\|_1$, en prenant $f = f_n \neq 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\|\phi(f_n)\|_1}{\|f_n\|_1} = \frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{n+1}{2(2n+3)} \leq k$ ce qui donne, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, $k \geq \frac{1}{4}$. Comme on a vu que $\forall f \in E$, $\|\phi(f)\|_1 \leq \frac{\|f\|_1}{4}$, ceci justifie que $K_2 = \frac{1}{4}$ est le plus petit réel tel que $\forall f \in E$, $\|\phi(f)\|_1 \leq K_2\|f\|_1$.

20.11 a. Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $|a| < 1$ et $|b| < 1$, comme on a $A^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il vient $B_n(A) = I_2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} A^k = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ 0 & b_n \end{pmatrix}$ par définition avec $a_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} a^k$ et $b_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} b^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le cours, la suite $(B_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. La série entière $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} z^k$ a pour rayon $R = 1$ par la règle de D'ALEMBERT car en notant $u_k = \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k}$, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = 1$ puisque $\forall k \geq 1$, $\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \frac{2k-1}{4(2k+1)} \times \frac{(2k+2)!k!}{(2k)!(k+1)!(k+1)!} = \frac{2k-1}{4(2k+1)} \times \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+1)^2}$. Comme $|a| < 1$ et $|b| < 1$, les deux séries $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} a^k$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} b^k$ convergent donc les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Ainsi, la suite $(B_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

b. Comme I_2 et N commutent, on a $\forall n \geq 1$, $A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\lambda I_2)^k N^{n-k} = \lambda^n I_2 + n\lambda^{n-1}N$ par le binôme de NEWTON car $\forall k \geq 2$, $N^k = 0$. Pour $n \geq 2$, $B_n(A) = I_2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} (\lambda^n I_2 + n\lambda^{n-1}N)$ donc $B_n(A) = \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} \lambda^k\right) I_2 + \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} k \lambda^{k-1}\right) N$. On a vu en **a.** que le rayon

de convergence de $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} z^k$ vaut 1 donc celui de la "série dérivée" $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} k z^{k-1}$ vaut aussi 1 d'après le cours. Comme $|\lambda| < 1$ par hypothèse, les deux séries $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} \lambda^k$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} k \lambda^{k-1}$ convergent donc, d'après l'expression (1), la suite $(B_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

c. Traitons les deux cas quant à la diagonalisabilité de A :

- Si A est diagonalisable, alors A est semblable à une matrice $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ du type de la question a.

avec a et b qui sont les valeurs propres de A donc qui vérifient bien $|a| < 1$ et $|b| < 1$ par hypothèse.

Il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$. On a classiquement, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$

donc $B_n(A) = P \left(I_2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} D^k \right) P^{-1} = PB_n(D)P^{-1}$. On sait d'après a. que $(B_n(D))_{n \in \mathbb{N}}$

converge vers D' et, comme $\varphi : M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire en dimension finie, elle est continue donc, par caractérisation séquentielle de la continuité, $(B_n(A))_{n \in \mathbb{N}} = (\varphi(B_n(D)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $B = \varphi(D')$.

- Si A n'est pas diagonalisable, comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, A est tout de même trigonalisable et on a forcément, d'après le cours, $\chi_A = (X - \lambda)^2$ car χ_A ne peut pas être scindé à racines simples puisque A n'est pas diagonalisable. Ainsi, il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\alpha \neq 0$. En posant $N = \alpha E_{1,2}$, on a bien N nilpotente d'indice 2 donc, d'après la question b., la suite $(B_n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers T' . Comme avant, puisque $B_n(A) = PB_n(T)P^{-1}$ et que $\varphi : M \mapsto PMP^{-1}$ est continue, $(B_n(A))_{n \in \mathbb{N}} = (\varphi(B_n(T)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $B = \varphi(T')$.

Comme $\forall k \geq 1$, $\binom{1/2}{k} = \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k}$ par un calcul classique, pour tout réel $x \in]-1; 1[$, on a la relation

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k \text{ en notant à nouveau } u_k = \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} \text{ pour } k \geq 1 \text{ et } u_0 = 1.$$

Comme $\forall x \in]-1; 1[$, $(\sqrt{1+x})(\sqrt{1+x}) = 1+x$, on a $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k \right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k \right) = 1+x$ donc, par identification des coefficients d'une série entière de rayon strictement positif, on a $u_0^2 = u_0 = 1$, $2u_0u_1 = 1$ car $u_1 = 1$ (on le savait déjà) mais surtout $\forall n \geq 2$, $\sum_{k=0}^n u_k u_{n-k} = 0$. Ainsi, si on prend $z \in \mathbb{C}$ tel que

$|z| < 1$, par produit de CAUCHY, on a $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^k \right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^k \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k u_{n-k} \right) z^n = 1+z$ (1) donc

$f(z)^2 = 1+z$ en notant $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^k$ pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

De même, en notant $g(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} k z^{k-1}$ pour $|z| < 1$, on a $\forall x \in]-1; 1[$, $g(x) = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

car $f(x) = \sqrt{1+x}$ donc $2f(x)g(x) = 1$. Comme avant, en passant par l'égalité des coefficients qui provient d'un produit de CAUCHY, on montre que $\forall |z| < 1$, $2f(z)g(z) = 1$. À nouveau, on traite les deux cas :

- Si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ tel que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec $|a| < 1$ et

$|b| < 1$. D'après ce qui précède, $(B_n(D))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $D' = \begin{pmatrix} f(a) & 0 \\ 0 & f(b) \end{pmatrix}$ et, en élevant au carré,

il vient $D'^2 = \begin{pmatrix} f(a)^2 & 0 \\ 0 & f(b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ 0 & 1+b \end{pmatrix} = I_2 + D$ d'après (1). Ainsi, $B = \varphi(D') = PD'P^{-1}$,

et on obtient bien la relation $B^2 = PD'^2P^{-1} = P(I_2 + D)P^{-1} = I_2 + A$.

- Si A n'est pas diagonalisable, A est trigonalisable et il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\alpha \neq 0$ donc $T = \lambda I_2 + N$ en posant $N = \alpha E_{1,2}$. On a vu qu'alors la suite $(B_n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $T' = f(\lambda)I_2 + g(\lambda)N$. À nouveau, $T'^2 = f(\lambda)^2 I_2 + 2f(\lambda)g(\lambda)N$ car $N^2 = 0$ donc $T'^2 = (1 + \lambda)I_2 + N = I_2 + (\lambda I_2 + N) = I_2 + T'$. Comme avant, $B = \varphi(T') = PT'P^{-1}$, et on obtient bien la relation $B^2 = PT'^2P^{-1} = P(I_2 + T')P^{-1} = I_2 + A$.

Dans les deux cas, la suite $(B_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $B^2 = I_2 + A$.

20.12 a. Comme $N^{k-1} \neq 0$, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $N^{k-1}X \neq 0$. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}) \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^k$

tel que $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i N^i X = 0$, posons $r = \min(\{i \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket \mid \lambda_i \neq 0\}) \leq k-1$, alors $\sum_{i=r}^{k-1} \lambda_i N^i X = 0$ donc $N^{k-r-1} \sum_{i=r}^{k-1} \lambda_i N^i X = 0 = \lambda_r N^{k-1} X$ ce qui est absurde car $\lambda_r \neq 0$ et $N^{k-1} X \neq 0$. Par l'absurde, on a montré

que $(\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}) = (0, \dots, 0)$ si $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i N^i X = 0$. Ainsi, $(X, NX, \dots, N^{k-1}X)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Comme une famille libre a moins de vecteurs que la dimension de l'espace qu'elle occupe, on a donc $k \leq n$.

b. D'après a., il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\mathcal{B} = (X, NX, \dots, N^{n-1}X)$ est libre donc c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ car $\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})) = n$. La famille $\mathcal{B}' = (N^{n-1}X, \dots, NX, X)$ est aussi une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et, en notant u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à N , on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = J_n$ par construction. En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à la base $\mathcal{B}'$, on a $N = PJ_nP^{-1}$ par formule de changement de base. Ainsi, N est semblable à J_n .

c. D'après a., il existe $k \leq n$ tel que $A^k = 0$ donc $A^n = 0$. De même, $B^n = 0$. Ainsi, d'après le binôme car A et B commutent, $(A+B)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} A^j B^{2n-j}$. Pour $j \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$, si $j \geq n$, on a $A^j = A^n A^{j-n} = 0$ et si $j \leq n$, $B^{2n-j} = B^n B^{n-j} = 0$. Ainsi, $(A+B)^{2n} = 0$ donc $A+B$ est nilpotente (et même $(A+B)^n = 0$ avec a.). De plus, $(I_n + A) \left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j A^j \right) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j A^j \right) - \left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j A^{j+1} \right) = I_n + (-1)^n A^n = I_n$ par télescopage donc $I_n + A$ est inversible et $(I_n + A)^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j A^j$.

d. Posons $A = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{J_n^k}{k!}$ de sorte que $e^{J_n} = I_n + A$. Comme $A = J_n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{J_n^{k-1}}{k!}$, en posant $K_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{J_n^{k-1}}{k!}$, on a $A = J_n K_n = K_n J_n$ donc $A^n = J_n^n K_n^n = 0$ car $J_n^n = 0$. D'après la question c., $e^{J_n} = I_n + A$ est inversible. Comme $J_n e^{J_n} = e^{J_n} J_n$, on a $(J_n e^{J_n})^n = J_n^n (e^{J_n})^n = 0$ donc J_n est nilpotente d'indice inférieur ou égal à n . En prenant $X = E_1$, par définition de J_n , on a $J_n E_1 = E_2$, puis $J_n^2 E_1 = J_n E_2 = E_3$ et, par une récurrence facile, $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $J_n^k E_1 = E_{k+1}$. Ainsi, $J_n^{n-1} \neq 0$ donc J_n est nilpotente d'indice n . Comme on a $(J_n e^{J_n})^k = J_n^k (e^{J_n})^k$ pour $k < n$, que $(e^{J_n})^k$ est inversible d'après la question d et que $J_n^k \neq 0$, on a $(J_n e^{J_n})^k \neq 0$ donc $J_n e^{J_n}$ est nilpotente d'indice n .

e. Si $L_n = PJ_nP^{-1}$ et $S_m(L_n) = \sum_{k=0}^m \frac{L_n^k}{k!}$ et $S_m(J_n) = \sum_{k=0}^m \frac{J_n^k}{k!}$, on a classiquement $S_m(L_n) = PS_m(J_n)P^{-1}$. Comme $f : M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire en dimension finie donc continue, par caractérisation séquentielle de la continuité, on a $e^{L_n} = \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m(L_n) = \lim_{m \rightarrow +\infty} f(S_m(J_n)) = f\left(\lim_{m \rightarrow +\infty} S_m(J_n)\right) = f(e^{J_n}) = Pe^{J_n}P^{-1}$.

f. Comme $J_n e^{J_n}$ est nilpotente d'ordre n d'après la question e., il existe une matrice inversible Q telle que $J_n e^{J_n} = Q^{-1} J_n Q$ d'après b.. Ainsi, $J_n = Q^{-1} (J_n e^{J_n}) Q$. Si on note $P = Q^{-1}$, on a $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et

$J_n = PJ_n P^{-1} P e^{J_n} P^{-1} = PJ_n P^{-1} e^{PJ_n P^{-1}}$ d'après **f.** En posant $\tilde{N} = PJ_n P^{-1}$, on a donc $\tilde{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n = \tilde{N} e^{\tilde{N}}$ et $\tilde{N}$ est nilpotente d'indice n .

20.13 a. Pour $r \in \mathbb{R}_+$, soit $f_r : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(\theta) = \frac{1}{P(re^{i\theta})}$. Comme P n'admet aucune racine complexe par hypothèse, la fonction f_r est bien définie et continue sur le segment $[0; 2\pi]$ par opérations. Ainsi, la fonction I est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(r, \theta) = \frac{1}{P(re^{i\theta})}$.

(H₁) $\forall \theta \in [0; 2\pi]$, $r \mapsto f(r, \theta)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ par opérations.

(H₂) $\forall r \in \mathbb{R}_+$, $f_r : \theta \mapsto f(r, \theta)$ est continue et intégrable sur $[0; 2\pi]$ (on vient de le voir).

(H₃) $\forall r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \mapsto \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) = -\frac{e^{i\theta} P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})^2}$ est continue sur $[0; 2\pi]$.

(H₄) Soit $r_0 > 0$, comme la fonction $\frac{P'}{P^2}$ est continue sur le fermé borné $B(0, r_0)$ dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{C}$ (par le module) de dimension finie 2, on sait d'après le théorème des bornes atteintes que cette fonction est bornée sur $B(0, r_0)$ et il existe $M_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall z \in B(0, r_0)$, $\left| \frac{P'(z)}{P(z)^2} \right| \leq M_0$.

Ainsi, $\forall (r, \theta) \in [0; r_0] \times [0; 2\pi]$, $\left| \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) \right| = \left| \frac{P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})^2} \right| \leq M_0 = \varphi_{r_0}(\theta)$ et φ_{r_0} est continue et intégrable sur $[0; 2\pi]$ car elle est constante sur ce segment.

Ainsi par théorème de dérivation sous le signe somme, I est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

b. Avec la formule de LEIBNIZ et la question précédente, $\forall r \in \mathbb{R}_+$, $I'(r) = -\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})^2} d\theta$. On reconnaît, $i r I'(r) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-i r e^{i\theta} P'(re^{i\theta})}{P(re^{i\theta})^2} \right) d\theta = \left[\frac{1}{P(re^{i\theta})} \right]_0^{2\pi} = 0$ car $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est 2π -périodique. Ainsi, $\forall r > 0$, $I'(r) = 0$ et, puisque I' est continue en 0 d'après la question **a.**, on a aussi $I'(0) = 0$. Ainsi, I est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

c. Écrivons $P = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ de sorte que $\deg(P) = n \geq 1$ et $a_n \neq 0$. Pour $z \neq 0 \in \mathbb{C}$, on peut écrire $\frac{P(z)}{a_n z^n} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} z^{k-n}$ donc $\left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{|a_n|} |z|^{k-n}$ par inégalité triangulaire en notant $M = \max_{0 \leq k \leq n-1} (|a_k|)$. Ainsi, dès que $|z| \geq 1$, on a $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $n-k \geq 1$ donc $|z|^{n-k} \geq |z|$ ce qui donne $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geq 1$, $\left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| \leq \frac{nM}{|a_n| |z|}$. On en déduit par encadrement que $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{P(z)}{a_n z^n} = 1$ donc que $|P(z)| \underset{|z| \rightarrow +\infty}{\sim} |a_n| |z|^n$. Puisque $n \geq 1$, cela donne $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$. Par définition, pour $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall (r, \theta) \in [k; +\infty[\times [0; 2\pi]$, $\left| \frac{1}{P(re^{i\theta})} \right| \leq \varepsilon$ en prenant $z = re^{i\theta}$ car $|re^{i\theta}| = r \geq k$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, avec la constante k de la question précédente, par inégalité triangulaire, pour $r \geq k$, on a $|I(r)| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(re^{i\theta})} \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{P(re^{i\theta})} \right| d\theta \leq 2\pi\varepsilon$. Ainsi, $\lim_{r \rightarrow +\infty} I(r) = 0$ alors que I est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$, ce qui prouve que I est nulle sur $\mathbb{R}_+$. On a donc $I(0) = \frac{2\pi}{P(0)} = 0$ ce qui est absurde. L'hypothèse de départ est donc fautive, c'est-à-dire le fait que P n'admet aucune racine complexe.

On vient donc de montrer le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS, à savoir que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[C]$ non constant admet au moins une racine complexe et, par récurrence, que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ admet autant de racines (comptées avec leur ordre de multiplicité) que son degré.

20.14 On va d'abord montrer que pour $A \subset \mathbb{R}$, $(A \text{ dense dans } \mathbb{R}) \iff (\forall [\alpha; \beta], \alpha < \beta \implies (\exists a \in A, a \in [\alpha; \beta]))$.

($\implies$) Si A est dense, $\overline{A} = \mathbb{R}$ donc tout réel est la limite d'une suite d'éléments de A . Soit $[\alpha; \beta]$ avec $\alpha < \beta$, en posant par exemple $x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0$. En

prenant $\varepsilon = \frac{\beta - \alpha}{2} > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n - x_0| \leq \varepsilon \iff a_n \in [\alpha; \beta]$. Ainsi, $a_{n_0} \in A \cap [\alpha; \beta]$.

($\impliedby$) Supposons que $A \cap [\alpha; \beta] \neq \emptyset$ dès que $\alpha < \beta$. Soit un réel x_0 et $n \in \mathbb{N}$, prenons $\alpha_n = x_0 - \frac{1}{2^n}$ et $\beta_n = x_0 + \frac{1}{2^n} > \alpha_n$, alors il existe $a_n \in [\alpha_n; \beta_n] \cap A$ et l'encadrement $-\frac{1}{2^n} \leq x_0 - a_n \leq \frac{1}{2^n}$ montre que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers x_0 . Ainsi, $\overline{A} = \mathbb{R}$ et A est dense dans $\mathbb{R}$.

On a montré par double inclusion que $(A \text{ dense dans } \mathbb{R}) \iff (\forall [\alpha; \beta], \alpha < \beta \implies (\exists a \in A, a \in [\alpha; \beta]))$.

Montrons que $A = \{f(m) - f(n) \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit un segment $[\alpha; \beta] \subset \mathbb{R}$ non réduit à un point. On cherche un élément de A dans $[\alpha; \beta]$. Traitons plusieurs cas :

$\alpha \leq 0 \leq \beta$ Prenons $n = m = 0$, alors $0 = f(0) - f(0) \in A \in [\alpha; \beta]$.

$0 < \alpha < \beta$ Posons $\varepsilon = \beta - \alpha > 0$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geq M, |f'(x)| \leq \varepsilon$.

Posons $n = \lfloor M \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$ et $m = \text{Min}(\{k \geq n \mid f(k) \geq f(n) + \alpha\})$. Cet entier m existe bien par propriété fondamentale de $\mathbb{N}$ car la partie $X = \{k \geq n \mid f(k) \geq f(n) + \alpha\} \subset \mathbb{N}$ est non vide puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrons que $f(m) - f(n) \in [\alpha; \beta]$:

- Comme $m \in X$, on a $f(m) \geq f(n) + \alpha$ donc $f(m) - f(n) \geq \alpha$.
- On ne peut pas avoir $m = n$ car on aurait $f(m) - f(n) = 0$ contredisant $f(m) - f(n) \geq \alpha > 0$.
Ainsi, $m > n$ donc $m - 1 \geq n$ et, par minimalité de m , $m - 1 \notin X$ donc $f(m - 1) < f(n) + \alpha$.
D'après le théorème des accroissements finis, comme f est dérivable sur $[m - 1; m]$, il existe un réel $c \in]m - 1; m[$ tel que $f(m) - f(m - 1) = f'(c)(m - (m - 1)) = f'(c)$. Or $c > m - 1 \geq n$ donc $|f'(c)| \leq \varepsilon$ et $f(m) = f(m - 1) + f'(c) < f(n) + \alpha + \varepsilon = f(n) + \beta$ d'où $f(m) - f(n) \leq \beta$.

Le réel $f(m) - f(n)$ appartient donc à $[\alpha; \beta]$ et aussi à A par construction car $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

$\alpha < \beta < 0$ D'après le cas précédent, comme $0 < -\beta < -\alpha$, $A \cap [-\beta; -\alpha] \neq \emptyset$ donc il existe $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f(m) - f(n) \in [-\beta; -\alpha]$ et $f(n) - f(m) = -(f(m) - f(n)) \in A \cap [\alpha; \beta]$.

Ainsi, $A = \{f(m) - f(n) \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ car $A \cap [\alpha; \beta]$ est non vide dès que $\alpha < \beta$.