

TD 20 : ESPACES NORMÉS

PSI 1 2025-2026

vendredi 27 février 2026

20.1 Mines PSI 2017 Maxime Pouvereau II (note 11)

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E . Soit $f : [0; 1] \rightarrow E$ une fonction continue telle que $f(0) \in A$ et $f(1) \notin A$. Prouver qu'il existe $t \in [0; 1]$ tel que $f(t)$ soit sur la frontière de A .

20.2 ENS Ulm/Cachan PSI 2018 Antoine Secher (note 8)

Soit E l'espace des fonctions continues, 1-périodiques, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} (|f(x)|)$.

Soit g la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+x)^2} + \frac{1}{(n-x)^2} \right)$.

a. Montrer que g est continue sur $] -1; 1[$. Calculer $g(0)$.

b. Montrer que $\varphi \in E$ si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + g(x)$ si $x \notin \mathbb{Z}$, $\varphi(n) = 0$ si $n \in \mathbb{Z}$.

c. Montrer que $L \in \mathcal{L}(E)$ et L continue si $L(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$. Calculer $\|L\| = \sup_{f \in E, f \neq 0} \frac{\|L(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$.

d. Montrer que $\forall x \notin \mathbb{Z}$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$.

20.3 Mines PSI 2019 Axel Brulavoine II (note 12,5) Soit E un espace vectoriel normé et deux vecteurs non nuls

a et b de E . Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \|a + tb\|$.

a. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle lipschitzienne ?

b. Si elles existent, calculer $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t)$.

c. Montrer que $I = \{t \in \mathbb{R} \mid a + tb \in B(0_E, 1)\}$ est un intervalle borné et ouvert ou que I est vide.

20.4 TPE, EIVP PSI 2019 Maël Classeau I Soit $S = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2 = I_3\}$.

a. L'ensemble S est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

b. L'ensemble S est-il stable par produit ?

c. L'ensemble S est-il fermé ?

d. L'ensemble S est-il borné ?

20.5 ENS Cachan PSI 2022 Colin Herviou-Laborde I (note 10) Soit I un segment de $\mathbb{R}$, $E = C^0(I, \mathbb{R})$, $f \in E$,

$u : E \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire. On dit que u est positive si on a $\forall f \in E$, $f \geq 0 \implies u(f) \geq 0$. On pose $e : x \rightarrow 1 \in E$.

a. Si u est positive, montrer que $\forall f \in E$, $|u(f)| \leq u(|f|)$.

b. Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall f \in E$, $|u(f)| \leq C \|f\|_{\infty, I}$. Calculer $\sup_{\substack{f \in E \\ f \neq 0}} \frac{|u(f)|}{\|f\|_{\infty, I}}$.

20.6 ENS Cachan PSI 2022 Colin Herviou-Laborde II (note 10)

Soit un entier $n \geq 2$ et $p_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $p_2(M)^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j}^2$ si $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer p_2 est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Est-ce qu'on peut munir $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une structure d'espace euclidien telle que la norme euclidienne associée soit p_2 . Si oui, donner ce produit scalaire.

c. Démontrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|MX\|_2 \leq p_2(M) \|X\|_2$. Calculer $\sup_{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X \neq 0}} \frac{\|MX\|_2}{\|X\|_2}$.

20.7 ENS Cachan PSI 2022 Margaux Millaret I (note 10) Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

a. Montrer que si f est lipschitzienne, alors f est continue.

b. Est-ce que le fait que f soit lipschitzienne implique que f soit dérivable ?

20.8 ENS Cachan PSI 2022 Camille Pucheu II (note 6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique. On note

$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ (pour ce produit scalaire canonique).

a. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, montrer que si $\forall t \in \mathbb{R}, at^2 + bt \geq 0$, alors $b = 0$.

b. Soit B une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Bx, x \rangle \geq 0$. Montrer que pour un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle Bx_0, x_0 \rangle = 0$, on a $Bx_0 = 0$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice réelle symétrique à laquelle on associe $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par $F(x) = \langle Ax, x \rangle$.

c. Montrer que $\inf_{x \in S} F(x)$ existe et que cette borne inférieure est atteinte.

d. Soit $\lambda_1 = \min_{x \in S} F(x)$ et $e_1 \in S$ tel que $\lambda_1 = \langle Ae_1, e_1 \rangle$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle (A - \lambda_1 I_n)x, x \rangle \geq 0$.

e. Montrer que λ_1 est la plus petite valeur propre de A .

20.9 Centrale Maths1 PSI 2022 Olivier Courmont II (note 20) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers M . On suppose de plus que toutes les matrices M_k sont diagonalisables.

a. La matrice M est-elle diagonalisable ?

b. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire, de degré $n \in \mathbb{N}^*$, montrer $(P \text{ est scindé dans } \mathbb{R}[X]) \iff (\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n)$.

c. La matrice M est-elle trigonalisable ?

20.10 Mines PSI 2022 Amandine Darrigade II (note 8) Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$, $f \in E$ et $\phi(f) : x \mapsto \int_0^x tf(t)dt$.

a. Montrer que ϕ définit un endomorphisme de E .

b. Déterminer le plus petit réel K_1 tel que $\forall f \in E, \|\phi(f)\|_1 \leq K_1 \|f\|_\infty$.

c. Déterminer le plus petit réel K_2 tel que $\forall f \in E, \|\phi(f)\|_1 \leq K_2 \|f\|_1$.

20.11 Mines PSI 2022 Paul Lafon I (note 18) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $B_n(A) = I_2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{4^k(2k-1)} \binom{2k}{k} A^k$.

a. Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $|a| < 1$ et $|b| < 1$, montrer que la suite $(B_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

b. Si $A = \lambda I_2 + N$ avec $|\lambda| < 1$, $N \neq 0$ et $N^2 = 0$, montrer que la suite $(B_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

c. Si $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(A), |\lambda| < 1$, montrer que $(B_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $B^2 = I_2 + A$.

20.12 Mines PSI 2022 Guillaume Tran-Ruesche I (note 17) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose J_n la matrice dont tous les

coefficients sont nuls à part ceux de la sur-diagonale qui valent 1. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit l'exponentielle

de la matrice M , notée $\exp(M)$ ou e^M , par $e^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$.

a. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice k , montrer qu'il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $(X, NX, \dots, N^{k-1}X)$ est libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En déduire que $k \leq n$.

b. On suppose que $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente d'indice n , montrer que N est semblable à J_n .

c. Soit A, B deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.

Montrer que $A + B$ est nilpotente et que $I_n + A$ est inversible.

d. Montrer que e^{J_n} est inversible. Montrer que $J_n e^{J_n}$ est nilpotente d'indice n .

e. Soit $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer que $P e^{J_n} P^{-1} = e^{P J_n P^{-1}}$.

f. Montrer qu'il existe une matrice $\tilde{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n = \tilde{N} e^{\tilde{N}}$.

20.13 Centrale Maths1 PSI 2024 Olivier Farje Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, on suppose que P

n'admet pas de racine complexe. On définit alors la fonction I sur $\mathbb{R}_+$ par $I(r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(re^{i\theta})}$.

a. Montrer que I est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que I est constante sur $\mathbb{R}_+$.

c. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{R}_+, \forall (r, \theta) \in [k; +\infty[\times [0; 2\pi]$, $\left| \frac{1}{P(re^{i\theta})} \right| \leq \varepsilon$. Conclure.

20.14 Mines PSI 2024 Armand Coiffe et Adrien Sagnac II (note 7,5 et 14,5)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Montrer que $A = \{f(m) - f(n) \mid (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.