

# DEVOIR 21 : ESPACES NORMÉS

PSI 1 2025-2026

mardi 03 mars 2026

## QCM

**1** Topologie : soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $(U_i)_{i \in I}$  une famille d'ouverts de  $E$ ,  $U_i^c$  désigne le complémentaire de  $U_i$ ,  $a$  un vecteur de  $E$  et  $A$  une partie de  $E$

**1.1**  $a$  est intérieur à  $A$  si  $\exists r > 0$ ,  $B(a, r) \subset A$

**1.3**  $\bigcup_{i \in I} U_i$  est une partie ouverte de  $E$

**1.2**  $a$  est adhérent à  $A$  si  $\exists r > 0$ ,  $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$

**1.4**  $\bigcap_{i \in I} U_i^c$  est une partie fermée de  $E$

**2** Caractérisation séquentielle : soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $A$  une partie de  $E$ ,  $x \in E$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

**2.1**  $(\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x) \implies x \in \bar{A}$

**2.2**  $(\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x) \iff x \in \bar{A}$

**2.3**  $(\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)) \implies f \text{ continue en } x$

**2.4**  $(\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)) \iff f \text{ continue en } x$

**3** Images directes et réciproques : soit  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  continue, soit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $U$  un fermé de  $E$ ,  $V$  un ouvert de  $E$

**3.1**  $f^{-1}([0; a])$  est un fermé de  $E$

**3.3** Si  $U$  est borné,  $f(U)$  est un borné de  $\mathbb{R}$

**3.2**  $f^{-1}(]a; +\infty[)$  est un ouvert de  $E$

**3.4** Si  $V$  est borné,  $f(V)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$

**4** Continuité et lipschitzianité : soit  $E, F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés avec  $E$  de dimension finie ; soit  $f : E \rightarrow F$ ,  $g : F \rightarrow E$  continues et  $h \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $k \in \mathcal{L}(F, E)$

**4.1**  $g \circ h$  est continue

**4.3**  $k \circ h$  est lipschitzienne

**4.2**  $k \circ f$  est continue

**4.4**  $h \circ k$  est lipschitzienne

**Énoncé** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $a$  un vecteur de  $E$  et  $A$  une partie de  $E$ .

Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur les suites) pour que  $a$  soit adhérent à  $A$ .

Donner une condition nécessaire et suffisante (portant sur les suites) pour que  $A$  soit une partie fermée de  $E$ .

**Preuve** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés (norme  $\|\cdot\|_E$  dans  $E$  et  $\|\cdot\|_F$  dans  $F$ ). On suppose  $E$  de dimension finie, soit une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , montrer que  $f$  est lipschitzienne.

**Exercice 1** Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$  muni de n'importe quelle norme et  $A = \left\{ P \in E \mid 0 \leq \int_0^1 P(x) dx \leq 1 \right\}$ .

Est-ce que  $A$  est une partie convexe ? bornée ? fermée ? ouverte ?

**Exercice 2** Soit  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  muni de la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$  associée au produit scalaire  $(A|B) = \text{tr}(A^T B)$ .

a. Établir que :  $\forall A \in E, \text{tr}(A)^2 \leq n \text{tr}(A^T A)$ .

b. Justifier la continuité de l'application trace  $\text{tr} : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

c. Calculer  $\|\text{tr}\|$  qui est par définition la plus petite constante  $k \geq 0$  telle que  $\forall A \in E, |\text{tr}(A)| \leq k\|A\|_2$ .

**QCM** Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne  $i$  colonne  $j$  revient à déclarer la question  $i,j$  vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

| $i \cdot j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | Fautes |
|-------------|---|---|---|---|--------|
| 1           |   |   |   |   |        |
| 2           |   |   |   |   |        |
| 3           |   |   |   |   |        |
| 4           |   |   |   |   |        |

**Énoncé**

**Preuve**

**Exercice 1**

## Exercice 2

| i · j | 1 | 2 | 3 | 4 | Fautes |
|-------|---|---|---|---|--------|
| 1     | X |   | X | X |        |
| 2     | X | X |   | X |        |
| 3     | X | X | X |   |        |
| 4     | X |   | X |   |        |

**1.1** Vrai : cours **1.2** Faux :  $a$  est adhérent à  $A$  si  $\forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset$  **1.3** Vrai : une réunion d'ouverts en est un **1.4** Vrai :  $U_i^c$  est un fermé par définition et une intersection de fermés en est un.

**2.1** et **2.2** Vrais : cours **2.3** Faux :  $[1/n] \rightarrow 0 = [0]$  et pourtant  $[ ]$  n'est pas continue en 0 **2.3** Vrai : c'est même vrai pour toutes les suites qui tendent vers  $x$ .

**3.1** Vrai : du cours car  $[0; a]$  est fermé dans  $\mathbb{R}$  **3.2** Vrai : du cours car  $]a; +\infty[$  est ouvert dans  $\mathbb{R}$  **3.3** Vrai : si  $U$  est borné alors  $U$  est compact (fermé borné) et  $f$  continue est bornée sur  $U$  (théorème des bornes atteintes) **3.4** Faux : par exemple  $E = \mathbb{R}, f = \sin$  et  $V = ]0; \pi[$  ouvert alors que  $f(V) = ]0; 1]$  ne l'est pas.

**4.1** Vrai :  $h$  est continue car linéaire et  $E$  de dimension finie donc  $g \circ h$  continue par composée **4.2** Faux :  $k$  linéaire mais  $F$  pas forcément de dimension finie donc  $k$  pas forcément continue **4.3** Vrai :  $k \circ h$  linéaire par composée et  $E$  de dimension finie **4.4** Faux :  $h \circ k \in \mathcal{L}(F)$  et  $F$  pas forcément de dimension finie.

**Énoncé** Soit  $(E, \| \cdot \|)$  un espace vectoriel normé,  $a$  un vecteur de  $E$  et  $A$  une partie de  $E$  :

- $a$  est adhérent à  $A$  si et seulement s'il existe  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  telle que  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .
- $A$  est fermée si et seulement si toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  convergente vérifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \in A$ .

**Preuve** Si  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in E$ , on pose  $N_\infty(x) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ .  $N_\infty$  est une norme sur  $E$  de dimension finie,  $N_\infty$  et  $\| \cdot \|_E$  sont équivalentes :  $\exists \beta > 0, N_\infty \leq \beta \| \cdot \|_E$ . Par linéarité de  $f$  et inégalité triangulaire :  

$$\|f(x)\|_F = \left\| f\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) \right\|_F = \left\| \sum_{k=1}^n x_k f(e_k) \right\|_F \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \|f(e_k)\|_F \leq \left(\sum_{k=1}^n \|f(e_k)\|_F\right) N_\infty(x) \leq K \|x\|_E$$
en posant  $K = \sum_{k=1}^n \|f(e_k)\|_F$ , on a  $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq K \|x\|_E$  et  $f$  est  $K$ -lipschitzienne.

**Exercice 1** • L'ensemble  $A$  est convexe car si  $(P, Q) \in A^2$  et  $t \in [0; 1]$ , on a la double inégalité suivante

$$0 = t \times 0 + (1-t) \times 0 \leq \int_0^1 (tP(x) + (1-t)Q(x)) dx \leq 1 = t \times 1 + (1-t) \times 1.$$

- $A$  n'est pas bornée car si on prend par exemple la norme  $N(P) = |a| + |b| + |c|$  pour  $P = aX^2 + bX + c$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = 2nX - n \in A$  car  $\int_0^1 (2nx - n) dx = 0$  alors que  $N(P_n) = 3n \rightarrow +\infty$ .
- Si  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  converge vers  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  pour la norme infinie (par exemple), alors ceci implique la convergence uniforme sur un segment de  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $P$  donc  $0 \leq \int_0^1 P(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(t) dt \leq 1$  par passage à la limite dans une inégalité large. Ainsi,  $P \in A$  et  $A$  est fermé.
- $A$  n'est pas ouverte car si  $P = 0 \in A$ , pour tout réel  $r > 0$ , la boule  $B(P, r)$  (pour la norme  $N$  par exemple) n'est pas incluse dans  $A$  puisqu'elle contient le polynôme  $P = -\frac{r}{2}$  et que  $\int_0^1 P(x) dx = -\frac{r}{2} \notin [0; 1]$ .

**Exercice 2** a.  $\text{tr}(A)^2 \leq n \text{tr}(A^T A) \iff |(A|I_n)| = |\text{tr}(A)| = |\text{tr}(A^T)| \leq \sqrt{(A|A)} \sqrt{(I_n|I_n)} = \sqrt{n \text{tr}(A^T A)}$

est l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ appliquée au couple  $(A, I_n)$  pour le produit scalaire canonique dans  $E$ .

b.  $\text{tr}$  est linéaire en dimension finie donc lipschitzienne donc continue.

c. D'après l'inégalité précédente :  $\forall A \in E, |\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|_2$  donc  $\| \text{tr} \| \leq \sqrt{n}$ . S'il existait  $k < \sqrt{n}$  telle que  $\text{tr}$  était  $k$ -lip., on aurait  $|\text{tr}(I_n)| \leq k \|I_n\|_2 \iff n \leq k\sqrt{n}$  ce qui est absurde. Ainsi  $\| \text{tr} \| = \sqrt{n}$ .