

DM 10 : RAYON SPECTRAL

PSI 1 2025/2026

pour le vendredi 13 mars 2026

Tout vecteur $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{K}^n$ est identifié à un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que l'élément de la i -ième ligne de X soit x_i . Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ aussi bien que le vecteur de $\mathbb{K}^n$ qui lui est associé.

Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = (x_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{K}^p$, notons $(AX)_i$ le coefficient en i -ième ligne de AX .

On appelle rayon spectral de A le réel $\rho(A)$ défini par $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$.

Classiquement, on note N_∞ la norme définie sur $\mathbb{C}^n$ par : $\forall X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$, $N_\infty(X) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

On appelle norme matricielle une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $N(AB) \leq N(A).N(B)$.

PARTIE 1 : UN EXEMPLE

On considère la matrice $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1 Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 3.
- 2 Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 3 La suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, caractériser géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $B = \lim_{n \rightarrow +\infty} A^n$.
- 4 Calculer $\rho(A)$.

PARTIE 2 : RAYON SPECTRAL COMME LIMITE

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et N une norme quelconque sur $\mathbb{C}^n$. On pose $M_A = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

- 1 Montrer que l'application $\psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(A) = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$ si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais n'est pas en général une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2 Norme subordonnée

- 2.1 Montrer qu'il existe $C_A \in \mathbb{R}_+$ telle que $\forall X \in \mathbb{C}^n$, $N(AX) \leq C_A N(X)$ en considérant $\theta : X \in \mathbb{C}^n \mapsto AX$.
- 2.2 Montrer que l'ensemble $\left\{ \frac{N(AX)}{N(X)} \mid X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$ possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

On notera dans la suite : $\tilde{N}(A) = \sup_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{N(AX)}{N(X)}$.

3 Propriétés de $\tilde{N}$: soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $X \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

- 3.1 Montrer que $\tilde{N}(A) = 0 \iff A = 0_n$.
- 3.2 Montrer que $\tilde{N}(\lambda A) \leq |\lambda| \tilde{N}(A)$.
- 3.3 En déduire que $\tilde{N}(\lambda A) = |\lambda| \tilde{N}(A)$.

- 3.4** Montrer que $\widetilde{N}(A+B) \leq \widetilde{N}(A) + \widetilde{N}(B)$.
- 3.5** $\forall X \in \mathbb{C}^n$, $N(AX) \leq \widetilde{N}(A)N(X)$.
- 3.6** Déduire de ces résultats que $\widetilde{N}$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

4 Une   quivalence

- 4.1** Montrer que pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, $N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X)$.
- 4.2** Soit i_0 un entier compris entre 1 et n tel que $\sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = M_A$. En considérant le vecteur Y de $\mathbb{C}^n$ de composantes y_j définies par :

$$y_j = \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} \text{ si } a_{i_0,j} \neq 0 \text{ et } y_j = 1 \text{ si } a_{i_0,j} = 0,$$

montrer que $M_A \leq \widetilde{N}_\infty(A)$ et en déduire que $\widetilde{N}_\infty(A) = M_A$.

- 5** En considérant un complexe λ de $\text{Sp}(A)$, montrer que $\rho(A) \leq \widetilde{N}(A)$.

- 6** Montrer que si $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0_n$, alors $\rho(A) < 1$.

Indication : on pourra commencer par montrer que $\lambda \in \text{Sp}(A) \implies \lambda^k \in \text{Sp}(A^k)$.

Dans toute la suite du problème, on admettra que, réciproquement, si $\rho(A) < 1$, alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0_n$.

- 7 Une limite** Soit $\varepsilon > 0$ et $A_\varepsilon = \frac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$.

- 7.1** Montrer que pour tout k entier naturel non nul : $\rho(A) \leq [\widetilde{N}(A^k)]^{1/k}$.
- 7.2** Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on a $\rho(\alpha A) = |\alpha|\rho(A)$.
- 7.3** Vérifier que $\rho(A_\varepsilon) < 1$ et en déduire que $\exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(k \geq k_\varepsilon \implies \widetilde{N}(A^k) \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k)$.
- 7.4** En déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} [\widetilde{N}(A^k)]^{1/k} = \rho(A)$.

PARTIE 3 : CROISSANCE DU RAYON SPECTRAL

Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est dite *positive* (resp. *strictement positive*) et on note $A \geq 0$ (resp. $A > 0$) si et seulement si tous ses coefficients sont positifs ou nuls (resp. strictement positifs). Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note $A \geq B$ (resp. $A \leq B$, $A > B$, $A < B$) si et seulement si $A - B \geq 0$ (resp. $B - A \geq 0$, $A - B > 0$, $B - A > 0$).

Notons que grâce à l'identification de $\mathbb{R}^n$ (ligne) et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (colonne), on pourra parler de vecteur de $\mathbb{R}^n$ positif ou strictement positif.

- 1** Donner un exemple de A montrant que les conditions $A \geq 0$ et $A \neq 0$ n'impliquent pas nécessairement $A > 0$.

- 2 Stricte croissance** A, B, A', B' désignent des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 2.1** Montrer que si $0 \leq A \leq B$ et $0 \leq A' \leq B'$, alors $0 \leq AA' \leq BB'$.
- 2.2** Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq A^k \leq B^k$.
- 2.3** Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors $\widetilde{N}_\infty(A) \leq \widetilde{N}_\infty(B)$.
- 2.4** Montrer que si $0 \leq A \leq B$, alors $\rho(A) \leq \rho(B)$.
- 2.5** Montrer que si $0 \leq A < B$, il existe $c \in]0; 1[$ tel que $A \leq cB$ et en déduire $\rho(A) < \rho(B)$.