

PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 20

PSI 1 2025-2026

du lundi 09/03 au vendredi 13/03

1 Topologie des evn : voir programme précédent

2 Limites et applications continues : voir programme précédent

3 Applications linéaires, bilinéaires et polynomiales :

- hors programme : en dimension quelconque, caractérisation d'une application linéaire continue (bornée sur la sphère unité $S(0,1)$ ou la boule unité fermée $B_f(0,1)$) ;
- hors programme : définition de la norme subordonnée d'une application linéaire continue, exemples ;
- toute application linéaire en dimension finie est continue car lipschitzienne ;
- hors programme : la norme $||| \cdot |||$ est une norme d'algèbre dans $\mathcal{L}(E)$ en dimension finie ;
- toute application bilinéaire en dimensions finies est continue ($||B(x,y)|| \leq k||x|| \times ||y||$), exemples ;
- toute application multilinéaire en dimensions finies est aussi continue ;
- définition des fonctions polynomiales sur $\mathbb{K}^p$ et continuité ;

4 Groupes orthogonaux : soit E un espace euclidien

- $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie vectorielle ou un automorphisme orthogonal s'il conserve le produit scalaire, mais aussi les normes, les bases orthonormées ; notation $O(E)$;
- $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$; symétries orthogonales ; réflexions ;
- un sous-espace F est stable par $u \in O(E)$ si et seulement si $F^\perp$ l'est aussi ;
- $O_n(\mathbb{R})$ (ou $O(n)$) sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales, caractérisation pratique, sous-groupe des matrices orthogonales de déterminant 1 noté $SO_n(\mathbb{R})$;
- si $\mathcal{B}$ est une B.O.N. de E , $u \in O(E)$ si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$;
- décomposition QR d'une matrice inversible avec l'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT ;
- si $u \in O(E)$, on a $\det(u) = \pm 1$; $SO(E)$ sous-groupe des isométries directes (rotations) ;

5 Isométries du plan et de l'espace :

- orientation d'un espace euclidien ; produit mixte en dimension quelconque ;
- en dimension 2 ou 3, interprétation comme aire du parallélogramme ou volume du parallélépipède ;
- produit vectoriel dans un espace euclidien orienté ; propriétés et relations dans une B.O.N.D. ;
- matrices de $O_2(\mathbb{R})$; $SO_2(\mathbb{R})$ contient les matrices de rotation et est commutatif ;
- rotations du plan, réflexions, groupe $O(E)$ si $\dim(E) = 2$; classification complète des isométries du plan : dimension des sous-espaces propres associés à 1 et -1 et nombre de réflexions pour l'engendrer ;

QUESTIONS DE COURS :

- 1 définir un vecteur intérieur et un vecteur adhérent à une partie (déf 12.12 et 12.13)
- 2 énoncer le théorème de caractérisation séquentielle des fermés (th. 12.13)
- 3 énoncer le th. des bornes atteintes pour f continue sur un fermé borné en dimension finie (th. 12.25)
- 4 définir une isométrie vectorielle (déf. 13.1)
- 5 énoncer le théorème de caractérisation des isométries (th. 13.1)
- 6 énoncer le théorème de caractérisation des matrices orthogonales (prop. 13.5)
- 7 énoncer les propriétés du produit vectoriel en dimension 3 (prop. 13.12 et 13.13)
- 8 énoncer la forme des matrices de $O(2)$ et la structure de $O(2)$ et $SO(2)$ (prop. 13.14 et 13.15)
- 9 prouver la propriété de stabilité de l'orthogonal par une isométrie (prop. 13.3)
- 10 prouver que $u \in O(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O(n)$ si $\mathcal{B}$ bon (th. 13.6)
- 11 prouver que si $A \in SO(n)$ et si n impair, alors 1 est valeur propre de A (rem. 13.11)

Prévision pour la prochaine semaine : fin des khôlles !!!!!