

DS 6 : CENTRALE MP 2017 M2

PSI 1 2025/2026

samedi 07 mars 2026

PARTIE 1 : EXEMPLES DE DÉCOMPOSABILITÉ

1.1 ($\implies$) Si $X \sim X'$, comme $X(\Omega) = X'(\Omega') \subset \mathbb{N}$ par hypothèse, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}'(X' = k)$ et ainsi, pour tout réel t pour lesquels ces séries convergent absolument (les ensembles de définition sont les mêmes), on a $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X' = k)t^k = G_{X'}(t)$ donc $G_X = G_{X'}$.

($\impliedby$) Si $G_X = G_{X'}$, comme le rayon de convergence commun des ces deux séries étant $R_X = R_{X'} \geq 1$, on peut identifier les coefficients de ces deux séries entières par unicité, et obtenir $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X' = k)$ donc les supports de ces deux variables aléatoires sont les mêmes (et inclus dans $\mathbb{N}$) et $X \sim X'$.

Par conséquent, pour deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, $X \sim X' \iff G_X = G_{X'}$.

1.2 Pour t convenable, par théorème de transfert, $\mathbb{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \mathbb{P}(X = k) = G_X(t)$. Comme $X \sim Y + Z$, $\mathbb{E}(t^X) = \mathbb{E}(t^{Y+Z}) = \mathbb{E}(t^Y t^Z)$ d'après 1.1. De plus, comme Y et Z sont indépendantes, il en est de même de t^Y et t^Z par théorème donc, d'après le cours, $\mathbb{E}(t^Y t^Z) = \mathbb{E}(t^Y) \mathbb{E}(t^Z)$ et on a bien $G_X = G_Y G_Z$ si $X \sim Y + Z$.

1.3 ($\implies$) Si $n \geq 2$, d'après le théorème admis (T), on peut trouver des variables $X_1, \dots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé Ω' , indépendantes et de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On sait d'après le cours que $S = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ donc que $X \sim S$. On pouvait aussi le prouver avec 1.2 car, par récurrence, $G_S = \prod_{i=1}^n G_{X_i}$ donc $G_S(t) = (1 - p + pt)^n = G_X(t)$ et utiliser la question 1.1 pour avoir aussi $X \sim S$. En posant $Y = X_1 + \dots + X_{n-1}$ et $Z = X_n$ (on le peut car $n \geq 2$), on a $X \sim Y + Z$. Par le lemme des coalitions, les variables aléatoires Y, Z sont indépendantes et non presque sûrement constantes car, comme ci-dessus, $Y \sim \mathcal{B}(n-1, p)$ et $Z \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0; 1[$: X est donc décomposable.

($\impliedby$) Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, d'après le cours, $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = (pt + (1-p))^n$ donc G_X est une fonction polynomiale de degré n . Si on avait $X \subset Y + Z$ avec Y, Z à valeurs dans $\mathbb{N}$ et non presque sûrement constantes définies sur un univers Ω' , alors $(Y + Z)(\Omega') = X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et, comme Y, Z sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, on aurait $Y(\Omega') \subset \llbracket 0; n \rrbracket$ et $Z(\Omega') \subset \llbracket 0; n \rrbracket$ ce qui montre que l'égalité $G_X = G_Y G_Z$ de la question 1.2 est une égalité entre deux polynômes polynômes. Comme Y, Z ne sont pas presque sûrement constantes par hypothèse, $\deg(G_Y) \geq 1$ et $\deg(G_Z) \geq 1$. Ainsi $\deg(G_X) = \deg(G_Y) + \deg(G_Z) = n \geq 2$.

Par double implication, on peut conclure que $X \rightarrow \mathcal{B}(n, p)$ est décomposable si et seulement si $n \geq 2$.

1.4.1 Si on suppose que $A = UV$ avec $(U, V) \in (\mathbb{R}_+[X])^2$ où ni U ni V ne sont constants, on peut supposer par symétrie des rôles joués par U et V que $\deg(U) \leq \deg(V)$. On peut aussi les supposer unitaires sans perte de généralité quitte à les multiplier par des constantes non nulles car A est lui-même unitaires. Deux cas :
 $\deg(U) = 1$ $A = X^4 + 2X + 1 = X^4 + (a + c')X^3 + (b' + ac')X^2 + (a' + ab')X + aa'$ si on écrit $U = X + a$ et $V = X^3 + c'X^2 + b'X + a'$ donc, comme a, c' sont positifs, $a = c' = 0$, ce qui contredit $aa' = 1$.

$\deg(U) = 2$ $A = X^4 + 2X + 1 = X^4 + (b+b')X^3 + (a+bb'+a')X^2 + (ab'+a'b)X + aa'$ si on écrit $U = X^2 + bX + a$ et $V = X^2 + b'X + a'$ donc, comme b, b' sont positifs, on a $b = b' = 0$, de même $a = a' = 0$ car a, a' positifs, ce qui contredit $aa' = 1$.

On conclut ce raisonnement par l'absurde, $(A = UV \text{ et } (U, V) \in (\mathbb{R}_+[X])^2) \implies (U \text{ ou } V \text{ est constant}).$

1.4.2 Comme $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$, il existe d'après le cours une variable aléatoire Y telle que $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\} \subset \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{4}$. On a alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_Y(t) = \frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} = \frac{(1+t)^2}{4}$. On a en fait $Y \sim \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$ et on a vu en question 1.3 que Y est décomposable. Posons $C = Y^2$, alors C est telle que $C(\Omega) = \{0, 1, 4\}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_C(t) = \mathbb{E}(t^C) = \mathbb{E}(t^{Y^2}) = \sum_{k=0}^2 \mathbb{P}(Y = k)t^{k^2} = \frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{t^4}{4} = \frac{A(t)}{4}$ par théorème de transfert. Si C était décomposable, comme en question 1.3, on pourrait écrire $G_C = G_V G_W$ avec des variables aléatoires V, W à valeurs dans $\mathbb{N}$, non presque sûrement constantes telles que $C = V + W$. Or on vient de voir qu'il est impossible d'avoir $A = 4G_C$ comme produit des deux polynômes non constants à coefficients positifs $4G_V$ et G_W . Ainsi, C n'est pas décomposable.

On vient de voir un exemple de variable aléatoire Y décomposable telle que Y^2 n'est pas décomposable.

PARTIE 2 : VARIABLES UNIFORMES

2.1.1

2.1.2

2.1.3

2.2.1

2.2.2

2.2.3

2.2.4

2.2.5

PARTIE 3 : VARIABLES BORNÉES

3.1 Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver m variables indépendantes $X_{m,1}, \dots, X_{m,m}$ toutes constantes égales à $\frac{a}{m}$ d'après le théorème (T). La variable aléatoire $X_{m,1} + \dots + X_{m,m}$ est alors constante égale à a et a donc même loi que X . Ainsi, $\text{une variable aléatoire constante est infiniment divisible.}$

3.2.1 On a l'inclusion $\bigcap_{i=1}^n \left(X_i > \frac{M}{n}\right) \subset (X_1 + \dots + X_n > M)$ donc, en passant aux probabilités et par indépendance de $X_1, \dots, X_n$ qui sont définies sur $(\mathcal{A}', \mathbb{P}')$, on a $\prod_{i=1}^n \mathbb{P}'\left(X_i > \frac{M}{n}\right) \leq \mathbb{P}'(X_1 + \dots + X_n > M)$. Comme on a $X \sim X_1 + \dots + X_n$, le membre de droite vaut $\mathbb{P}'(X_1 + \dots + X_n > M) = \mathbb{P}(X > M)$ et on sait que $\mathbb{P}(X > M) = 0$ par hypothèse car $(X > M) = \emptyset$. On a donc $0 \leq \prod_{i=1}^n \mathbb{P}'\left(X_i > \frac{M}{n}\right) \leq 0$ donc $\prod_{i=1}^n \mathbb{P}'\left(X_i > \frac{M}{n}\right) = 0$ ce qui

justifie qu'il existe $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $\mathbb{P}'\left(X_i > \frac{M}{n}\right) = 0$. Comme $X_1, \dots, X_n$ ont même loi, on en déduit que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}'\left(X_i > \frac{M}{n}\right) = 0 \text{ donc } \mathbb{P}'\left(X_i \leq \frac{M}{n}\right) = 1 : \quad \boxed{\text{l'évènement } \left(X_i \leq \frac{M}{n}\right) \text{ est presque sûr.}}$$

De même, $\bigcap_{i=1}^n \left(X_i < -\frac{M}{n}\right) \subset (X_1 + \dots + X_n < -M)$ et, comme avant, $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}'\left(X_i < -\frac{M}{n}\right) = 0$.

Comme $\left(|X_i| > \frac{M}{n}\right) = \left(X_i > \frac{M}{n}\right) \sqcup \left(X_i < -\frac{M}{n}\right)$, on a $\mathbb{P}'\left(|X_i| > \frac{M}{n}\right) = \mathbb{P}'\left(X_i > \frac{M}{n}\right) + \mathbb{P}'\left(X_i < -\frac{M}{n}\right) = 0$

(événements incompatibles). Par conséquent,
$$\boxed{\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \mathbb{P}'\left(|X_i| \leq \frac{M}{n}\right) = 1.}$$

3.2.2 Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, X_i est presque sûrement à valeurs dans $\left[-\frac{M}{n}; \frac{M}{n}\right]$ donc X_i^2 est presque sûrement à valeurs dans $\left[0; \frac{M^2}{n^2}\right]$. Par croissance de l'espérance, $\mathbb{E}(X_i^2) \leq \frac{M^2}{n^2}$. Or $\mathbb{V}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 \leq \mathbb{E}(X_i^2)$, donc $\mathbb{V}(X_i) \leq \frac{M^2}{n^2}$. D'après le cours, $\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n)$ car les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes. Avec les inégalités précédentes $\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) \leq \frac{M^2}{n}$. Comme X et

$X_1 + \dots + X_n$ ont même loi,
$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) \leq \frac{M^2}{n}.}$$

3.2.3 C'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = 0$ et la variable aléatoire positive $(X - \mathbb{E}(X))^2$ étant d'espérance nulle, elle est presque sûrement nulle donc X vaut presque sûrement $\mathbb{E}(X)$ donc
$$\boxed{X \text{ est presque sûrement constante.}}$$

PARTIE 4 : BINOMIALES ET POISSON

4.1 Une variable aléatoire binomiale est bornée (puisque finie). La partie 3 montre qu'elle n'est infiniment divisible que si elle est constante. Ainsi,
$$\boxed{\text{si } X \sim \mathcal{B}(n, p) \text{ avec } p \in]0; 1[, X \text{ n'est pas infiniment divisible.}}$$

4.2 On a $G_{X_1+X_2} = G_{X_1} G_{X_2}$ directement avec 1.2. Si $G_{X_1+\dots+X_k} = \prod_{i=1}^k G_{X_i}$ pour un entier $k \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$, comme $X_1 + \dots + X_k$ et X_{k+1} sont indépendants par le lemme des coalitions, toujours d'après la question 1.2, il vient $G_{X_1+\dots+X_{k+1}} = G_{X_1+\dots+X_k} G_{X_{k+1}}$ puis $G_{X_1+\dots+X_{k+1}} = \left(\prod_{i=1}^k G_{X_i}\right) G_{X_{k+1}} = G_{X_1+\dots+X_k} = \prod_{i=1}^{k+1} G_{X_i}$ en appliquant l'hypothèse de récurrence. Par principe de récurrence finie, on a donc $G_{X_1+\dots+X_n} = \prod_{i=1}^n G_{X_i}$. On sait d'après le cours que si $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\forall t \in \mathbb{R}, G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}$. Ainsi, avec la relation précédente, $\forall t \in \mathbb{R}, G_{X_1+\dots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i(t-1)} = e^{(\lambda_1+\dots+\lambda_n)(t-1)}$. On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi de POISSON de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ et avec 1.1,
$$\boxed{X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n).}$$

4.3 On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver m variables indépendantes $X_{m,i}$ suivant la loi de POISSON de paramètre $\frac{\lambda}{m}$ d'après le théorème (T). On a alors $X \sim X_{m,1} + \dots + X_{m,m}$ d'après la question précédente car $\lambda = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda}{m}$. Ainsi,
$$\boxed{\text{si } X \sim \mathcal{P}(\lambda) \text{ avec } \lambda > 0, \text{ alors } X \text{ est infiniment divisible.}}$$

4.4 Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont infiniment divisibles d'après la question précédente, et avec des notations similaires, pour tout entier $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, si $X_i \sim X_{i,m,1} + \dots + X_{i,m,m}$, on a aussi clairement $iX_i \sim i(X_{i,m,1} + \dots + X_{i,m,m}) = iX_{i,m,1} + \dots + iX_{i,m,m}$ avec $iX_{i,m,1}, \dots, iX_{i,m,m}$ indépendantes donc iX_i est aussi infiniment divisible. Pour conclure, il suffit donc de montrer qu'une somme de variables indépendantes et infiniment divisibles est infiniment divisible. Commençons par deux variables.

Initialisation : soit X et Y infiniment divisibles et indépendantes. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, il existe des décompositions $X \sim X_1 + \dots + X_m$ et $Y \sim Y_1 + \dots + Y_m$ où $X_1, \dots, X_m$ sont indépendantes de même loi et $Y_1, \dots, Y_m$ sont aussi indépendantes de même loi. D'après la question 1.2 et son extension de la question 4.2, $G_X = (G_{X_1})^m$ et $G_Y = (G_{Y_1})^m$ car $X_1, \dots, X_m$ ont même loi et $Y_1, \dots, Y_m$ aussi.

On sait avec 1.2 que $G_{X+Y} = G_X G_Y$ car X, Y indépendantes donc $G_{X+Y} = (G_{X_1} G_{Y_1})^m$. Comme G_{X_1} et G_{Y_1} sont développables en série entière par construction avec un rayon de convergence supérieur à 1 d'après le cours et avec des coefficients positifs car ce sont respectivement $\mathbb{P}(X_1 = k)$ et $\mathbb{P}(Y_1 = k)$, par produit de CAUCHY, la fonction $G_{X_1} G_{Y_1}$ est aussi développable en série entière avec un rayon de convergence supérieur

à 1 et les coefficients de son développement $G_{X_1}(t)G_{Y_1}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ (1) sont des termes positifs car $a_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(Y_1 = n - k)$. L'égalité (1) est valable pour $t \in [-1; 1]$ car il y a convergence absolue de $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X_1 = k) t^k$ et $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Y_1 = k) t^k$ pour $t \in [-1; 1]$. Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = G_{X_1}(1)G_{Y_1}(1) = 1 \times 1 = 1$ donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une distribution de probabilité et, d'après le cours ou le théorème (T) avec $m = 1$, il existe une variable aléatoire Z telle que $\forall t \in [-1; 1], G_Z(t) = G_{X_1}(t)G_{Y_1}(t)$. Toujours d'après le théorème (T), on peut trouver m variables aléatoires indépendantes $Z_1, \dots, Z_m$ de même loi que Z . La variable aléatoire $Z_1 + \dots + Z_m$ a pour fonction génératrice $G_{Z_1 + \dots + Z_m}^m = G_Z^m = (G_{X_1})^m (G_{Y_1})^m = G_X G_Y = G_{X+Y}$ d'après 1.2 car $Z_1, \dots, Z_m$ sont indépendantes et X, Y aussi. On en déduit avec 1.1 que $X + Y \sim Z_1 + \dots + Z_m$. Par conséquent, puisque ceci est vrai pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $X + Y$ est infiniment divisible.

Hérédité : si on a montré que la somme de $k \geq 2$ variables aléatoires indépendantes infiniment divisibles en est encore une, soit $X_1, \dots, X_{k+1}$ des variables aléatoires infiniment divisibles. Par hypothèse de récurrence, $X_1 + \dots + X_k$ en est encore une et $X_1 + \dots + X_k$ et X_{k+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions et, d'après l'initialisation, $(X_1 + \dots + X_k) + X_{k+1}$ est aussi infiniment divisible.

Par principe de récurrence, toute somme de variables aléatoires indépendantes et toutes infiniment divisibles

est encore une variable aléatoire infiniment divisible. Par conséquent, $\sum_{i=1}^n iX_i$ est infiniment divisible.

PARTIE 5 : SÉRIE DE VARIABLES ENTIÈRES

5.1.1 Pour A, B dans $\mathcal{A}$, comme $A = (A \cap \overline{B}) \sqcup (A \cap B)$ (incompatibles) et $B = (\overline{A} \cap B) \sqcup (A \cap B)$ (incompatibles), $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)$. En soustrayant, $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) - \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.

Par inégalité triangulaire, on obtient bien $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2, |\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.

5.1.2 Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $|\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| \leq \mathbb{P}(X = n, Y \neq n) + \mathbb{P}(X \neq n, Y = n)$ en prenant $A = (X = n)$ et $B = (Y = n)$ dans **5.1.1**. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| \leq \mathbb{P}(X \neq n)$ et que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n)$ converge

(sa somme vaut 1 car $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ par hypothèse), par comparaison, $\sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)|$ converge.

On somme ces inégalités et $\sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(X = n, Y \neq n) + \mathbb{P}(X \neq n, Y = n))$. Or

$(X \neq Y) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X = n, Y \neq n)$ (incompatibles) donc, par σ -additivité, $\mathbb{P}(X \neq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n, Y \neq n)$. De

même, $(X \neq Y) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (Y = n, X \neq n)$ donc $\mathbb{P}(X \neq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n, X \neq n)$. Par conséquent, l'inégalité

ci-dessus devient $\sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| \leq 2\mathbb{P}(X \neq Y)$.

Pour $t \in [-1; 1]$, on a $|\mathbb{P}(X = n)t^n - \mathbb{P}(Y = n)t^n| \leq |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)|$ et $\sum_{n \geq 0} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)|$ converge ainsi, par comparaison, $\sum_{n \geq 0} (\mathbb{P}(X = n)t^n - \mathbb{P}(Y = n)t^n)$ converge absolument et, par définition de

$$G_X \text{ et } G_Y, \quad \forall t \in [-1; 1], \quad |G_X(t) - G_Y(t)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| t^n \leq 2\mathbb{P}(X \neq Y).$$

5.2.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in Z_{n+1}$, il existe donc un entier $i \geq n+1$ tel que $U_i(\omega) \neq 0$. Comme i vérifie $i \geq n$ et qu'on a $U_i(\omega) \neq 0$, il vient $\omega \in Z_n$ donc $Z_{n+1} \subset Z_n$. Ainsi, $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion.

Comme $Z_n = \bigcup_{i=n}^{+\infty} (U_i \neq 0)$, par formule de sous-additivité, on a $\mathbb{P}(Z_n) \leq \sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(U_i \neq 0)$. Comme la série

$\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(U_i \neq 0)$ converge par hypothèse, $\sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(U_i \neq 0)$ est le reste d'ordre $n-1$ de cette série convergente et,

à ce titre, tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par encadrement, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n) = 0$.

5.2.2 Par continuité décroissante, d'après **5.2.1**, $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} Z_k\right)$.

Or $\left(\omega \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} Z_k\right) \iff (\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists i \geq k, U_i(\omega) \neq 0) \iff (\{i \in \mathbb{N}^* \mid U_i(\omega) \neq 0\} \text{ est infini})$ (aussi loin qu'on regarde -au delà de k -, on trouve toujours un indice $i \geq k$ tel que $U_i(\omega) \neq 0$). Tout ceci prouve que

$\mathbb{P}(\{i \in \mathbb{N}^* \mid U_i \neq 0\} \text{ est infini}) = 0$. Autrement dit $\{i \in \mathbb{N}^* \mid U_i \neq 0\}$ est presque sûrement fini.

5.2.3 Notons $C = \left\{ \omega \in \Omega \mid \text{il existe un nombre fini de } i \text{ pour lesquels } U_i(\omega) \neq 0 \right\}$. Si $\omega \in C$ alors $S(\omega)$ existe (comme une somme finie de termes non nuls, tous les autres étant nuls). S est ainsi définie au moins sur

C qui est de probabilité 1 d'après **5.2.2** donc S est définie presque sûrement. Avec la question **5.1.2**, on

a $\forall t \in [-1; 1], |G_{S_n}(t) - G_S(t)| \leq 2\mathbb{P}(S_n \neq S)$. On en déduit que $\|G_{S_n} - G_S\|_{\infty, [-1; 1]} \leq 2\mathbb{P}(S_n \neq S)$. Or

$\omega \in C \iff (\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall i \geq n, U_i(\omega) = 0) \iff (\exists n \in \mathbb{N}^*, S_n(\omega) = S(\omega))$ de sorte que $C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (S_n = S)$.

Comme les U_i sont à valeurs positives, dès que $S_n = S$, on a aussi $S_{n+1} = S$ d'où la croissance de la

suite $((S_n = S))_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour l'inclusion donc la suite $((S_n \neq S))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion. Par continuité décroissante, comme $\overline{C} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (S_n \neq S)$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n \neq S) = \mathbb{P}(\overline{C}) = 0$ donc, par définition de la convergence uniforme, $(G_{S_n})_{n \geq 1}$ converge uniformément vers G_S sur $[-1; 1]$.

5.3.1 Comme $0 \leq \mathbb{P}(X_i \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - e^{-\lambda_i} \leq \lambda_i$ par concavité de la fonction $f : x \mapsto 1 - e^{-x}$, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(X_i \neq 0)$ converge.

5.3.2 On est dans le cadre de la question 5.2.3 avec X_i à la place de U_i et la condition $\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(X_i \neq 0)$ converge est respectée avec 5.3.1, la variable aléatoire $Y = \sum_{i=1}^{+\infty} X_i$ est donc définie presque sûrement d'après 5.2.3. La fonction génératrice G_Y est la limite uniforme sur $[-1; 1]$ de $(G_{S_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ avec 5.2.3. Par indépendance de $X_1, \dots, X_n$, $G_{S_n} = G_{X_1 + \dots + X_n} = G_{X_1} \dots G_{X_n} : t \mapsto \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i(t-1)} = \exp\left((t-1) \sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$. Ainsi, $\forall t \in [-1; 1]$, $G_Y(t) = \exp\left((t-1) \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i\right)$. On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de POISSON et, d'après la question 1.1, $Y = \sum_{i=1}^{+\infty} X_i \sim \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i\right)$.

5.3.3 Comme $\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(X_i \neq 0)$ converge d'après la question 5.3.1, $\{i \in \mathbb{N}^* \mid U_i \neq 0\}$ est presque sûrement fini donc $\{i \in \mathbb{N}^* \mid iU_i \neq 0\}$ est presque sûrement fini. Ainsi, la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^{+\infty} iX_i$ est définie presque sûrement (somme finie de termes presque sûrement). Comme $(iX_i)(\Omega) \subset i\mathbb{N}$, pour $t \in [-1; 1]$, on a $G_{iX_i}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(iX_i = ik)t^{ik} = G_{X_i}(t^i) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_i = k)t^{ik} = G_{X_i}(t^i)$ puis, par indépendance de $X_1, 2X_2, \dots, nX_n$, $G_{T_n}(t) = \prod_{i=1}^n G_{iX_i}(t) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i(t^i-1)} = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \times \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i t^i\right) > 0$. La fonction génératrice G_X est la limite uniforme de la suite $(G_{T_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $T_n = \sum_{i=1}^n iX_i$ d'après 5.2.3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, comme T_n est infiniment divisible d'après la question 4.4, il existe des variables $Y_{n,1}, \dots, Y_{n,m}$ indépendantes de même loi telles que $T_n \sim Y_{n,1} + \dots + Y_{n,m}$. On a alors $\forall t \in [-1; 1]$, $G_{T_n}(t) = G_{Y_{n,1}}(t)^m > 0$. Comme $G_{Y_{n,1}}$ garde un signe constant sur son ensemble de définition et que $G_{Y_{n,1}}(1) = 1 > 0$, la fonction $G_{Y_{n,1}}$ est strictement positive sur son ensemble de définition, donc au moins sur $[-1; 1]$, et on a donc $\forall t \in [-1; 1]$, $G_{Y_{n,1}}(t) = G_{T_n}(t)^{1/m}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_{Y_{n,1}}(t) = G_X(t)^{1/m}$ par continuité de $t \mapsto t^{1/m}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En posant $F(t) = G_X(t)^{1/m}$, on a alors $G_X(t) = F(t)^m$. On pourra conclure comme en 4.4 si on montre que $F : t \mapsto \exp\left(-\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda_i}{m} t^i\right) \times \exp\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda_i}{m} t^i\right)$ est la fonction génératrice d'une variable aléatoire en reprenant le calcul de la question en travaillant avec $\mu_i = \frac{\lambda_i}{m}$ au lieu de λ_i . D'après le théorème (T), il existe des variables aléatoires indépendantes de même loi (ici la loi est $\mathcal{G}\left(\frac{\lambda_i}{m}\right)$) $Z_{m,1}, \dots, Z_{m,m}$ telle que $\forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket$, $G_{Z_{m,i}} = F$

de sorte que $G_{Z_{m,1}+\dots+Z_{m,m}} = \prod_{i=1}^m G_{Z_{m,i}} = F^m = G_X$ et on a $X \sim \sum_{i=1}^m Z_{m,i}$ d'après 1.1. Comme ceci est vrai

pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, par définition, $\sum_{i=1}^{+\infty} iX_i$ est infiniment divisible.

PARTIE 6 : SÉRIE ENTIÈRE AUXILIAIRE

6.1 Analyse : si la suite $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ convient, on a nécessairement $\lambda_1 = \frac{\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(X=0)}$ (pour $k=1$) et, pour tout entier

$k \geq 2$, $\lambda_k = \frac{1}{k\mathbb{P}(X=0)} \left(k\mathbb{P}(X=k) - \sum_{j=1}^{k-1} j\lambda_j \mathbb{P}(X=k-j) \right)$ d'après la relation de l'énoncé ; ceci existe car $k\mathbb{P}(X=0) > 0$ par hypothèse. Voilà pour l'unicité !

Synthèse : on peut définir la suite $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ par son premier terme $\lambda_1 = \frac{\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(X=0)}$ et la relation de récurrence

$\lambda_k = \frac{1}{k\mathbb{P}(X=0)} \left(k\mathbb{P}(X=k) - \sum_{j=1}^{k-1} j\lambda_j \mathbb{P}(X=k-j) \right)$ (R) pour tout $k \geq 2$ car cette dernière relation ne fait intervenir que les valeurs $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ déjà définies. La relation (R) et la définition de λ_1 peuvent aussi s'écrire $\forall k \geq 1, k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{j=1}^k j\lambda_j \mathbb{P}(X=k-j)$ (même valable pour $k=0$). Voilà pour l'existence !

Il existe bien une unique suite réelle $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ telle que, $\forall k \in \mathbb{N}^*, k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{j=1}^k j\lambda_j \mathbb{P}(X=k-j)$.

6.2 Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a $k\lambda_k \mathbb{P}(X=0) = k\mathbb{P}(X=k) - \sum_{j=1}^{k-1} j\lambda_j \mathbb{P}(X=k-j)$ et on passe en valeur absolue, puis on

utilise l'inégalité triangulaire, ce qui donne $\forall k \geq 1, k|\lambda_k| \mathbb{P}(X=0) \leq k\mathbb{P}(X=k) + \sum_{j=1}^{k-1} j|\lambda_j| \mathbb{P}(X=k-j)$.

Mais comme $\forall j \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket, j \leq k$, on obtient $\forall k \geq 1, |\lambda_k| \mathbb{P}(X=0) \leq \mathbb{P}(X=k) + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j| \mathbb{P}(X=k-j)$. En remarquant que $\mathbb{P}(X=i) + \mathbb{P}(X=0) \leq 1$ si $i \neq 0$ donc $\mathbb{P}(X=i) \leq 1 - \mathbb{P}(X=0)$ et en reportant ci-dessus,

on en déduit la majoration $\forall k \geq 1, |\lambda_k| \mathbb{P}(X=0) \leq (1 - \mathbb{P}(X=0)) \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j| \right)$.

6.3 On prouve le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : $1 + |\lambda_1| = 1 + \frac{\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(X=0)} \leq \frac{\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(X=0)} \leq \frac{1}{\mathbb{P}(X=0)}$ car $\mathbb{P}(X=1) \leq 1$.

Hérédité : si $1 + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j| \leq \frac{1}{\mathbb{P}(X=0)^{k-1}}$ (H) pour un entier $k \geq 2$, la question précédente et l'hypothèse

de récurrence (H) donnent alors $|\lambda_k| \mathbb{P}(X=0) \leq (1 - \mathbb{P}(X=0)) \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j| \right) \leq \frac{1 - \mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(X=0)^{k-1}}$ (H'). En

sommant (H) et (H') divisée par $\mathbb{P}(X=0) > 0$, on a $1 + \sum_{j=1}^k |\lambda_j| \leq \frac{1}{\mathbb{P}(X=0)^{k-1}} + \frac{1 - \mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(X=0)^k} = \frac{1}{\mathbb{P}(X=0)^k}$.

Par principe de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*, 1 + \sum_{j=1}^k |\lambda_j| \leq \frac{1}{\mathbb{P}(X=0)^k}$.

6.4 Avec **6.2** et **6.3**, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $|\lambda_k| \mathbb{P}(X=0)^k \leq \mathbb{P}(X=0)^k \sum_{j=1}^k |\lambda_j| \leq 1$ donc la suite $(\lambda_k \mathbb{P}(X=0)^k)$ est bornée.

Par définition du rayon de convergence, $\sum_{k \geq 1} \lambda_k t^k$ est de rayon de convergence $\rho(X) \geq \mathbb{P}(X=0)$.

6.5 Si on note R_X le rayon de convergence de la série entière définissant G_X , et en supposant que $\rho(X) \leq R_X$ (peut-être peut-on le montrer avec les conditions de l'énoncé mais je ne vois pas comment), on a la relation

$$\forall t \in]-\rho(X); \rho(X)[\subset]-R_X; R_X[, \quad G'_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \mathbb{P}(X=n+1) t^n \text{ car on peut dériver terme à terme les}$$

séries entières sur l'intervalle ouvert de convergence et aussi $H'_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \lambda_{n+1} t^n$.

Pour $t \in]-\rho(X); \rho(X)[$, les séries ci-dessus étant absolument convergentes, par produit de CAUCHY, on obtient $H'_X(t) G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n t^n$ avec $\mu_n = \sum_{k=0}^n (k+1) \lambda_{k+1} \mathbb{P}(X=n-k)$. Le changement d'indice $j = k+1$

montre que $\mu_n = \sum_{j=1}^{n+1} j \lambda_j \mathbb{P}(X=n+1-j) = (n+1) \mathbb{P}(X=n+1)$ d'après la relation définissant la suite

$(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$. On a finalement montré que $\forall t \in]-\rho(X); \rho(X)[$, $H'_X(t) G_X(t) = G'_X(t)$. On sait résoudre cette équation différentielle (E) : $y' = H'_X y$ vérifiée par G_X et il existe donc une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$\forall t \in]-\rho(X); \rho(X)[$, $G_X(t) = c \exp(H_X(t))$. Comme $G_X(0) = \mathbb{P}(X=0)$ et $H_X(0) = \ln(\mathbb{P}(X=0))$, on en déduit que $c = 1$, puis que

$$\forall t \in]-\rho(X); \rho(X)[, \quad G_X(t) = \exp(H_X(t)).$$

6.6 Comme $(X+Y=0) = (X=0, Y=0)$ et que les variables aléatoires X, Y sont indépendantes, on obtient

$\mathbb{P}(X+Y=0) = \mathbb{P}(X=0) \mathbb{P}(Y=0) \leq \min(\mathbb{P}(X=0), \mathbb{P}(Y=0)) \leq \min(\rho(X), \rho(Y))$. Pour un réel t tel que $|t| < \mathbb{P}(X=0) \mathbb{P}(Y=0)$, d'après la question **6.5**, comme $\mathbb{P}(X=0) \mathbb{P}(Y=0) \leq \rho(X+Y)$ d'après **6.4**, on a $G_{X+Y}(t) = \exp(H_{X+Y}(t)) = G_X(t) G_Y(t) = \exp(H_X(t) + H_Y(t))$ car X, Y sont indépendantes. Ainsi, par injectivité de $\exp$, on a $H_{X+Y}(t) = H_X(t) + H_Y(t)$. Par unicité des coefficients d'un développement d'une série entière, les coefficients de H_{X+Y} sont la somme de ceux de H_X et de H_Y . On sait d'après le cours qu'on a alors $\rho(X+Y) \geq \min(\rho(X), \rho(Y))$ et que la relation montrée sur $] -\mathbb{P}(X=0) \mathbb{P}(Y=0); \mathbb{P}(X=0) \mathbb{P}(Y=0)[$ est en fait

valable pour $|t| < \min(\rho(X), \rho(Y))$. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, |t| < \min(\rho(X), \rho(Y)) \implies H_{X+Y}(t) = H_X(t) + H_Y(t).$$

PARTIE 7 : VARIABLES ENTIÈRES λ -POSITIVES

7.1 Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et d'après la question **6.1**, comme les λ_j sont positifs par hypothèse, on peut minorer et avoir

$$k \mathbb{P}(X=k) = \sum_{j=1}^k j \lambda_j \mathbb{P}(X=k-j) = k \lambda_k \mathbb{P}(X=0) + \sum_{j=1}^{k-1} j \lambda_j \mathbb{P}(X=k-j) \geq k \lambda_k \mathbb{P}(X=0) \text{ donc, comme}$$

$\mathbb{P}(X=0) > 0$, on a $\lambda_k \leq \frac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X=0)}$. Comme la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X=0)}$ converge (sa somme valant même

$\frac{1 - \mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(X=0)}$ car X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1$), par comparaison de séries à termes

positifs, on peut conclure que la série $\sum_{k \geq 1} \lambda_k$ converge.

7.2 En particulier, le rayon de convergence $\rho(X)$ de $\sum_{k \geq 1} \lambda_k t^k$ vérifie $\rho(X) \geq 1$ car la série converge pour $t = 1$.

Mieux, en notant $v_k : t \mapsto \lambda_k t^k$, on a $\|v_k\|_{\infty, [-1;1]} = \lambda_k$ donc, d'après **7.1**, $\sum_{k \geq 1} v_k$ converge normalement sur $[-1;1]$ ce qui assure la continuité de H_X sur $[-1;1]$ car toutes les fonctions v_k y sont continues. De même, d'après le cours, en notant $u_k : t \mapsto \mathbb{P}(X = k)t^k$, on a $\|u_k\|_{\infty, [-1;1]} = \mathbb{P}(X = k)$ et $\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X = k)$ converge donc $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge aussi normalement sur $[-1;1]$ donc G_X est continue sur $[-1;1]$ car toutes les u_k y sont aussi continues : c'est du cours ! La relation $G_X(t) = \exp(H_X(t))$ de la question **6** valable pour $t \in]-1; 1[\subset]-\rho(X); \rho(X)[$ puisque $\rho(X) \geq 1$ peut donc être prolongée par continuité (aussi de la fonction exponentielle) à $[-1;1]$. On obtient donc $\boxed{\forall t \in [-1;1], G_X(t) = \exp(H_X(t))}$.

La relation, pour $t = 1$, donne $G_X(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1 = \exp(H_X(1)) = \exp\left(\ln(\mathbb{P}(X = 0)) + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k\right)$

donc $\ln(\mathbb{P}(X = 0)) + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k = \ln(1) = 0$ d'où $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k = -\ln(\mathbb{P}(X = 0))}$.

7.3 D'abord, par théorème de transfert, $\forall t \in \mathbb{R}, G_{iX_i}(t) = \mathbb{E}(t^{iX_i}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_i = k)t^{ik} = G_{X_i}(t^i)$ (on sait que

le rayon de convergence de la série définissant X_i suivant une loi de POISSON vaut $+\infty$. Posons $S_n = \sum_{i=1}^n iX_i$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Comme les variables aléatoires $X_1, 2X_2, \dots, nX_n$ sont indépendantes, d'après le cours ou la question **1.2** avec récurrence, $G_{S_n} = \prod_{i=1}^n G_{iX_i} : t \mapsto \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i(t^i-1)} = \exp\left(-\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \times \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i t^i\right)$.

On obtient la fonction génératrice de $S = \sum_{i=1}^{+\infty} iX_i$ sur $[-1;1]$ en passant à la limite (d'après la question **5.2.3**) et ainsi, d'après **7.2** et par définition de H_X , on a

$$\forall t \in [-1;1], G_S(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i\right) \times \exp\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i t^i\right) = \exp(H_X(t)) = G_X(t).$$

On conclut donc avec les questions **1.1** et **7.2** que

$$\boxed{X \sim S = \sum_{i=1}^{+\infty} iX_i.}$$

PARTIE 8 : CARACTÉRISATION

On notera $S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$ qui a la même loi que X . Les variables S et X n'étant pas forcément définies sur le même espace probabilisé, mais ayant même loi, on devrait noter $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}'(S_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$.

Mais comme l'énoncé fait l'abus, comme en question **8.1.2**, on notera $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$ en supposant toutes ces variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé.

8.1.1 Comme la somme de quantités strictement négatives l'est encore, on a $\bigcap_{k=1}^n (X_{n,k} < 0) \subset (S_n < 0)$ d'où,

par indépendance de $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$, on a $0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n (X_{n,k} < 0)\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_{n,k} < 0) \leq \mathbb{P}(S_n < 0) = 0$ car

S_n est presque sûrement positive comme X . Ainsi, $\prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_{n,k} < 0) = 0$. Il existe donc un entier $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel

que $\mathbb{P}(X_{n,k} < 0) = 0$. Comme $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ ont la même loi, $\mathbb{P}(X_{n,1} < 0) = 0$ d'où $\mathbb{P}(X_{n,1} \geq 0) = 1$ ce qui montre que $X_{n,1}$ est presque sûrement positive ou nulle.

8.1.2 D'après 8.1.1, on a $\mathbb{P}(X_{n,1} \geq 0, \dots, X_{n,n} \geq 0) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_{n,k} \geq 0) = (\mathbb{P}(X_{n,1} \geq 0))^n = 1$ par indépendance de $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$. De plus, $\mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}(S_n = 0 | X_{n,1} \geq 0, \dots, X_{n,n} \geq 0) \mathbb{P}(X_{n,1} \geq 0, \dots, X_{n,n} \geq 0)$. Ainsi, $\mathbb{P}(S_n = 0 | X_{n,1} \geq 0, \dots, X_{n,n} \geq 0) = \mathbb{P}(X_{n,1} = 0, \dots, X_{n,n} = 0) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_{n,k} = 0)$ par indépendance de $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ et car la somme de quantités positives est nulle si et seulement si elles sont toutes nulles. En conclusion, $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(S_n = 0) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_{n,k} = 0) = (\mathbb{P}(X_{n,1} = 0))^n$ car $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ suivent la même loi. Cette quantité étant non nulle, aucun des facteurs ne l'est et $\mathbb{P}(X_{n,1} = 0) > 0$.

Ainsi, on a bien établi que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(X_{n,1} = 0) > 0$.

8.1.3 L'événement $(X_{n,1} \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}, X_{n,2} = 0, \dots, X_{n,n} = 0) \subset (S_n \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N})$ est négligeable puisque S_n est presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}$ comme X . Par indépendance de $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$. On en déduit que $\mathbb{P}(X_{n,1} \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}) \prod_{k=2}^n \mathbb{P}(X_{n,k} = 0) = 0$. Or, d'après 8.1.2, on a $\mathbb{P}(X_{n,k} = 0) > 0$ donc $\mathbb{P}(X_{n,1} \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}) = 0$. Mais, comme $\mathbb{R} = \mathbb{R}_-^* \sqcup (\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}) \sqcup \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X_{n,1} \in \mathbb{R}_-^*) + \mathbb{P}(X_{n,1} \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}) + \mathbb{P}(X_{n,1} \in \mathbb{N}) = 1$ car $X_{n,1}$ est réelle. Or d'après la question 8.1.1, $\mathbb{P}(X_{n,1} \in \mathbb{R}_-^*) = 0$ donc $\mathbb{P}(X_{n,1} \in \mathbb{N}) = 1$ ce qui justifie, comme $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ suivent la même loi, que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_{n,i} \in \mathbb{N}) = 1$.

Par conséquent, les variables aléatoires $X_{n,i}$ sont presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}$.

8.1.4 On a vu en question 8.1.2 que $\mathbb{P}(X_{n,1} = 0)^n = \mathbb{P}(X = 0)$ donc, comme $\mathbb{P}(X = 0) > 0$ par hypothèse, $\mathbb{P}(X_{n,1} = 0) = \sqrt[n]{\mathbb{P}(X = 0)} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(\mathbb{P}(X = 0))\right)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_{n,1} = 0) = e^0 = 1$ car $\exp$ continue.

8.1.5 Soit $i \in \mathbb{N}^*$, comme $(X_{n,i} \in \{0, i\}) = (X_{n,1} = 0) \sqcup (X_{n,1} = i) \subset \Omega$, on a alors $\mathbb{P}(X_{n,1} = i) + \mathbb{P}(X_{n,1} = 0) \leq 1$ donc $0 \leq \mathbb{P}(X_{n,1} = i) \leq 1 - \mathbb{P}(X_{n,1} = 0)$. Par encadrement et 8.1.3, $\forall i \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_{n,1} = i) = 0$.

8.1.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, raisonnons à nouveau par récurrence en notant $T_k = \sum_{i=1}^k X_{n,i}$:

Initialisation : comme $X_{n,1}$ et $X_{n,2}$ ont même loi, $\alpha_n = \rho(X_{n,1}) = \rho(X_{n,2})$ et, avec la question 6.6, on a $H_{X_{n,1}+X_{n,2}} = H_{X_{n,1}} + H_{X_{n,2}} = 2H_n$ sur $] - \alpha_n; \alpha_n[$ par indépendance de $X_{n,1}$ et $X_{n,2}$.

Hérédité : si on a établi que $H_{T_k} = kH_n$ sur $] - \alpha_n; \alpha_n[$ pour un entier $k \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$, par indépendance de $T_k = \sum_{i=1}^k X_{n,i}$ et $X_{n,k+1}$ par le lemme des coalitions, toujours d'après la question 6.6, on a la relation $H_{T_{k+1}} = H_{T_k+X_{n,k+1}} = H_{T_k} + H_{X_{n,k+1}} = kH_n + H_n = (k+1)H_n$ sur $] - \alpha_n; \alpha_n[$.

Par principe de récurrence, $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $H_{T_k} = kH_n$. En particulier, pour $k = n$, on obtient, comme

$X \sim T_n = \sum_{i=1}^n X_{n,i}$, $H_X = nH_n$. On a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*, nH_n = H_X$.

8.1.7 Soit $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on peut identifier les coefficients des séries entières dans la question précédente pour avoir $n\lambda_k(X_{1,n}) = \lambda_k(X)$ où on note $\lambda_k(Y)$ le coefficient λ_k associé à la variable Y . Ainsi, par définition, on a

$$\sum_{j=1}^k j\lambda_j(X) \mathbb{P}(X_{n,1} = k-j) = \sum_{j=1}^k j\lambda_j \mathbb{P}(X_{n,1} = k-j) = n \sum_{j=1}^k j\lambda_j(X_{1,n}) \mathbb{P}(X_{n,1} = k-j) = nk \mathbb{P}(X_{n,1} = k).$$

8.1.8 On fixe $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $j \in \llbracket 1; k-1 \rrbracket$, d'après la question **8.1.5**, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_{n,1} = k-j) = 0$ alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_{n,1} = 0) = 1$ d'après **8.1.4**. Le passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans la relation de la question **8.1.7** donne donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \rightarrow +\infty} n \mathbb{P}(X_{n,1} = k) = \lambda_k.$$

Les λ_k sont donc tous positifs comme limite de quantités positives et $\boxed{X \text{ est } \lambda\text{-positive}}$ par définition.

8.2.1 On vient de montrer au cours des huit dernières questions que si X est infiniment divisible, alors X est λ -positive, c'est-à-dire (i) $\implies$ (ii). L'implication (ii) $\implies$ (i) a été établie à la question **7.3** et l'implication (iii) $\implies$ (i) a été montrée en question **5.3.3** avec le fait que si $X \sim Y$ et Y est infiniment divisible, alors X l'est aussi. On en déduit que $\boxed{\text{les assertions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes}}$ sous la condition que X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$.

8.2.2 Dans le cas d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(X = 0) = 0$. Il existe un plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{P}(X = k) > 0$. La variable aléatoire $Y = X - k$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et vérifie $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = k) > 0$. De plus, $\boxed{X \text{ est infiniment divisible si et seulement si } Y \text{ l'est}}$ en posant, pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, les variables $X_{m,1} = Y_{m,1} + \frac{k}{m}, \dots, X_{m,m} = Y_{m,m} + \frac{k}{m}$. On peut donc appliquer à Y le résultat de la question précédente pour caractériser le fait que X soit infiniment divisible.

8.2.3 Si X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, posons $Y = X - 1$ comme dans **8.2.2** car $\mathbb{P}(X = 1) > 0$. On a donc, par définition, $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = k+1) = p(1-p)^k$, la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ associée à Y est la suite des coefficients du développement en série entière $H_Y(t) = \ln(G_Y(t)) = \ln(p) - \ln(1 - (1-p)t)$ car $\forall t \in \left] -\frac{1}{1-p}; \frac{1}{1-p} \right[$, $G_Y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k)t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} p(1-p)^k t^k = \frac{p}{1 - (1-p)t}$. Or on sait d'après le cours que si $|(1-p)t| < 1$, on a $H_Y(t) = \ln(p) - \ln(1 - (1-p)t) = \ln(p) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^k t^k}{k}$ de sorte qu'en identifiant les coefficients du développement en série entière (par unicité), $\forall k \in \mathbb{N}^*, \lambda_k = \frac{(1-p)^k}{k} \geq 0$. Y est λ -positive donc infiniment divisible d'après **8.2.1** : $\boxed{X = Y + 1 \text{ est infiniment divisible}}$ d'après **8.2.2**.