

DS 6.1 : extrait de X-ENS 2022 MP Maths B

PSI 1 2025/2026

samedi 07 mars 2026

PARTIE 1 : DÉVELOPPEMENT EULÉRIEN

1.1 Propriétés

1.1.1 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors $\frac{1}{x}$ est bien défini et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$ est bien défini.

De plus, $\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = \frac{2x}{x^2 - n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc, par comparaison, comme la série de RIEMANN $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$

converge car $2 > 1$, $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right)$ converge donc $g(x)$ est bien défini.

1.1.2 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a bien $-x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et

$$g(-x) = \frac{1}{-x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{-x+n} + \frac{1}{-x-n} \right) = -\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) = -g(x),$$

ce qui prouve que g est impaire. De plus f est impaire par produit car $\cos$ est paire et $\sin$ est impaire ainsi, comme l'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est stable par combinaison linéaire, par différence,

$D = f - g$ est aussi impaire. Ainsi, les fonctions g sont D sont impaires.

1.1.3 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a bien $x+1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $x-1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ce qui rend possible la 1-périodicité des fonctions citées. On remarque que

$$f(x+1) = \pi \frac{\cos(\pi(x+1))}{\sin(\pi(x+1))} = \pi \frac{\cos(\pi x + \pi)}{\sin(\pi x + \pi)} = \pi \frac{-\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} = f(x)$$

donc f est 1-périodique. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en définissant pour $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ par les sommes partielles

$$S_n(y) = \frac{1}{y} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{y+k} + \frac{1}{y-k} \right), \text{ on a}$$

$$S_n(x+1) = \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x+1+k} + \frac{1}{x+1-k} \right) = \frac{1}{x} + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{x+j} + \frac{1}{x-j} \right) \right) + \frac{1}{x+n+1} + \frac{1}{x+n}$$

après réorganisation et changements d'indices. Comme $g(x+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x+1)$, $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1}(x)$ et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x+n+1} + \frac{1}{x+n} \right) = 0$, en passant à la limite ci-dessus, on obtient $g(x+1) = g(x)$. Par structure

d'espace vectoriel des fonctions 1-périodiques sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, les fonctions g puis $D = f - g$ sont 1-périodiques.

1.1.4 Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\sin(x) \neq 0$ donc, par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur le domaine, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Posons $u_0 : x \mapsto \frac{1}{x}$

et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = x \mapsto \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$.

(H₁) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue sur $]0; 1[$.

(H₂) Soit $[a; b] \subset]0; 1[$, alors u_0 et u_1 sont continues sur le segment $[a; b]$ donc y sont bornées par le théorème des bornes atteintes. De plus, si $n \geq 2$ et $x \in [a; b]$, alors $|u_n(x)| = \frac{2x}{(n-x)(n+x)} \leq \frac{2}{n(n-1)}$ car $n+x \geq n$ et $n-x \geq n-1$ donc $\|u_n\|_{\infty, [a; b]} \leq \frac{2}{n(n-1)}$. Comme $\sum_{n \geq 2} \frac{2}{n(n-1)}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN car $\frac{2}{n(n-1)} \sim_{+\infty} \frac{2}{n^2}$, $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur $[a; b]$.

D'après le théorème de continuité des séries de fonctions, $g = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur $]0; 1[$. Or la fonction

g est 1-périodique d'après 1.1.3 donc $\boxed{g, \text{ et par différence, } D = f - g \text{ sont continues sur } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.}$

1.2 Équations fonctionnelles

1.2.1 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors on constate que $\frac{x}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $\frac{x+1}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ car si on avait $\frac{x}{2} = n \in \mathbb{Z}$, on aurait $x = 2n \in \mathbb{Z}$ et si on avait $\frac{x+1}{2} = m \in \mathbb{Z}$, on aurait $x = 2m - 1 \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $f(x)$, $f\left(\frac{x}{2}\right)$ et $f\left(\frac{1+x}{2}\right)$ sont bien définis. De plus $\cos\left(\pi \frac{1+x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ et $\sin\left(\pi \frac{1+x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ donc

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right) = \pi \frac{-\cos^2(\pi x/2) + \sin^2(\pi x/2)}{\sin(\pi x/2) [-\cos(\pi x/2)]} = 2\pi \frac{\cos^2(\pi x/2) - \sin^2(\pi x/2)}{2 \sin(\pi x/2) \cos(\pi x/2)} = 2f(x)$$

car $\cos^2(\pi x/2) - \sin^2(\pi x/2) = \cos(\pi x)$ et $2 \sin(\pi x/2) \cos(\pi x/2) = \sin(\pi x)$ grâce aux formules de trigonométrie.

Ainsi, on a bien l'équation fonctionnelle vérifiée par f suivante :

$$\boxed{f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2f(x).}$$

1.2.2 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors comme à la question précédente, $g(x)$, $g\left(\frac{x}{2}\right)$ et $g\left(\frac{1+x}{2}\right)$ sont bien définis. Avec la notation de la somme partielle introduite en question 1.1.3, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} S_n\left(\frac{x}{2}\right) + S_n\left(\frac{1+x}{2}\right) &= \frac{1}{x/2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(x/2)+k} + \frac{1}{(x/2)-k} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(x+1)/2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{((x+1)/2)+k} + \frac{1}{((x+1)/2)-k} \right) \\ &= \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{x+2k} + \frac{2}{x-2k} + \frac{2}{x+2k+1} + \frac{2}{x-(2k-1)} \right) \\ &= \frac{2}{x} + \sum_{\substack{k=1 \\ \text{k pair}}}^{2n} \left(\frac{2}{x+k} + \frac{2}{x-k} \right) + \sum_{\substack{k=1 \\ \text{k impair}}}^{2n} \left(\frac{2}{x+k} + \frac{2}{x-k} \right) + \frac{2}{x+2n+1} \\ &= 2 \left[\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{1}{x+k} + \frac{1}{x-k} \right) \right] + \frac{2}{x+2n+1} \\ &= 2 S_{2n}(x) + \frac{2}{x+2n+1}. \end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n\left(\frac{x}{2}\right) = g\left(\frac{x}{2}\right)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n\left(\frac{x+1}{2}\right) = g\left(\frac{x+1}{2}\right)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n}(x) = g(x)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+2n+1} = 0$,

donc en passant à la limite ci-dessus, on obtient

$$\boxed{g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2g(x).}$$

1.3 Le développement

1.3.1 Avec les notations de la question 1.1.4,

(H₁) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $] -1; 1[$.

(H₂) Soit $[-a; a] \subset] -1; 1[$ avec $a \in]0; 1[$, alors u_1 est continue sur le segment $[-a; a]$ donc u_1 est bornée sur $[-a; a]$ par le théorème des bornes atteintes. De plus, si $n \geq 2$ et $x \in [-a; a]$, on peut majorer $|u_n(x)| = \frac{2x}{(n-x)(n+x)} \leq \frac{2}{(n-1)^2}$ car $n+x \geq n-1$ et $n-x \geq n-1$ donc $\|u_n\|_{\infty, [-a; a]} \leq \frac{2}{(n-1)^2}$.

Comme la série de RIEMANN $\sum_{n \geq 2} \frac{2}{(n-1)^2}$ converge, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $[-a; a]$.

Comme tout segment de $] -1; 1[$ est inclus dans un segment du type $[-a; a]$ avec $a \in]0; 1[$, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, $h = g - u_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue sur $] -1; 1[$ et $h(0) = 0$ car h est impaire comme g et u_0 . Par conséquent, $g(x) = u_0(x) + h(x) = \frac{1}{x} + o(1)$ car $h(x) = h(0) + o(1) = o(1)$.

Pour $x \in] -1; 1[\setminus \{0\}$,

$$D(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \frac{1}{x} - h(x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x} - h(x) = \frac{x\pi \cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x \sin(\pi x)} - h(x).$$

Avec les développements limités en 0, on a $x\pi \cos(\pi x) - \sin(\pi x) = \pi x(1 - O(x^2)) - (\pi x + O(x^3)) = O(x^2)$ et $x \sin(\pi x) \sim \pi x^2$ donc, en divisant les deux, $\frac{x\pi \cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x \sin(\pi x)} = o(1)$. Ainsi, $D(x) = f(x) - g(x) = o(1)$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0} D(x) = 0$ ce qui permet le prolongement par continuité de D en $\tilde{D}$ en 0 avec la valeur $\tilde{D}(0) = 0$.

Comme D est définie, 1-périodique et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ d'après les questions précédentes, et se prolonge par continuité en 0 avec $\tilde{D}(0)$, elle se prolonge par continuité en tout entier n avec $\tilde{D}(n) = \tilde{D}(0) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}$

et la fonction D se prolonge par continuité en $\tilde{D}$ continue sur $\mathbb{R}$ s'annulant en tous les entiers relatifs.

1.3.2 Comme $\tilde{D}$ est continue sur le segment $[0; 1]$, le théorème des bornes atteintes nous permet d'affirmer que $\tilde{D}$ est bornée sur $[0; 1]$ et qu'elle y atteint ses bornes, notamment sa borne supérieure, qui est donc un maximum, d'où l'existence de

$$\alpha \in [0; 1] \text{ tel que } \tilde{D}(\alpha) = M = \sup_{t \in [0; 1]} \tilde{D}(t) = \max_{t \in [0; 1]} \tilde{D}(t).$$

1.3.3 Avec les questions 1.2.1 et 1.2.2, par différence, on a $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $D\left(\frac{x}{2}\right) + D\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2D(x)$. Comme D se prolonge en $\tilde{D}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ et que tout réel est la limite d'une suite de réels dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a aussi (par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ en fait), $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tilde{D}\left(\frac{x}{2}\right) + \tilde{D}\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\tilde{D}(x)$ (1).

Initialisation : pour $n = 0$, on a bien $\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^0}\right) = \tilde{D}(\alpha) = M$ d'après 1.3.2.

Hérédité : soit un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = M$. Avec la relation (1) appliquée au réel $x = \frac{\alpha}{2^n}$, on a $\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) + \tilde{D}\left(\frac{\alpha+2^n}{2^{n+1}}\right) = 2\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = 2M$. Comme $\frac{\alpha}{2^{n+1}}$ et $\frac{\alpha+2^n}{2^{n+1}}$ sont dans $[0; 1]$, on a donc $\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \leq M$ et $\tilde{D}\left(\frac{\alpha+2^n}{2^{n+1}}\right) \leq M$. Or $\left(M - \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\right) + \left(M - \tilde{D}\left(\frac{\alpha+2^n}{2^{n+1}}\right)\right) = 0$, et une somme de deux quantités positives ne peut être nulle que si elles sont toutes les deux nulles, d'où $\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) = M$ et $\tilde{D}\left(\frac{\alpha+2^n}{2^{n+1}}\right) = M$.

Par principe de récurrence, on a établi que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = M.$$

1.3.4 Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0$ et que $\tilde{D}$ est continue en 0, par caractérisation séquentielle de la continuité,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = \tilde{D}(0) = 0. \text{ Or } \forall n \in \mathbb{N}, \tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = M \text{ donc, par unicité de la limite, } M = 0.$$

Ainsi, la fonction $\tilde{D}$ est négative sur $[0; 1]$ car $\max_{t \in [0; 1]} \tilde{D}(t) = 0$. Mais comme elle est 1-périodique, $\tilde{D}$ est donc

négative sur $\mathbb{R}$. Enfin, comme elle est impaire, elle est aussi positive sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{D}(x) = -\tilde{D}(-x) \geq 0$, ce qui montre que $\tilde{D}$ est nulle sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, D(x) = f(x) - g(x) = 0$ donc $f(x) = g(x)$

ce qui, en multipliant par x , se transforme en

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \pi x \cotan(\pi x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 - n^2}.$$

PARTIE 2 : BERNOULLI ET EULER

2.1 Développement en série entière

2.1.1 Soit $x \in]-2\pi; 2\pi[$, la famille $\left(\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k}\right)_{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est composée de réels positifs donc sa somme S

appartenant à $[0; +\infty]$ se calcule avec la formule de FUBINI et vaut $S = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k}\right)$. Or, pour tout

entier $n \geq 1, \frac{x}{2\pi n} \in]-1; 1[$ donc la série géométrique $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k}$ converge et on a $S = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2}$.

Comme $\alpha_n = \frac{\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et que la série de RIEMANN $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, par comparaison, $\sum_{n \geq 1} \alpha_n$

converge ce qui assure que $S < +\infty$ donc que

$$\text{la famille } \left(\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k}\right)_{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2} \text{ est sommable.}$$

2.1.2 Soit $x \in]-2\pi; 2\pi[\setminus \{0\}$, en posant $y = \frac{x}{2\pi}$, on a $y \in]-1; 1[\setminus \{0\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ donc, d'après 1.3.4,

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^2}{y^2 - n^2} = \pi y \cotan(\pi y) = \frac{x}{2} \cotan\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}{\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 - n^2} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2}.$$

En reprenant le calcul de la question précédente, toujours avec la formule de FUBINI, on a

$$\frac{x}{2} \cotan\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2}{1 - \left(\frac{x}{2\pi n}\right)^2} = 1 - 2S = 1 - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k}\right).$$

Or, pour $k \in \mathbb{N}^*$, il vient $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{2\pi n}\right)^{2k} = \frac{x^{2k}}{2^{2k}\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{\zeta(2k)x^{2k}}{2^{2k}\pi^{2k}}$ par définition de la fonction ζ de

RIEMANN car $2k > 1$. On en conclut que

$$\forall x \in]-2\pi; 2\pi[\setminus \{0\}, \frac{x}{2} \cotan\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)x^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}}.$$

2.1.3 Soit $x \in]-2\pi; 2\pi[\setminus \{0\}$, alors $e^{ix} - 1 = e^{ix/2}(e^{ix/2} - e^{-ix/2}) = 2i \sin(x/2)e^{ix/2}$ avec les formules d'EULER et $e^{ix} \neq 1$ d'où

$$\frac{ix}{e^{ix} - 1} = \frac{ixe^{-ix/2}}{2i \sin(x/2)} = \frac{x(\cos(x/2) - i \sin(x/2))}{2 \sin(x/2)} = \frac{x}{2} \cotan\left(\frac{x}{2}\right) - i \frac{x}{2}.$$

En utilisant la relation de la question précédente, on en déduit que $\frac{ix}{e^{ix} - 1} = 1 - \frac{ix}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)x^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}}.$

2.1.4 Comme $i^2 = -1$, pour $x \in]-2\pi; 2\pi[\setminus \{0\}$, on a $ix = (e^{ix} - 1) \times \left(1 - \frac{ix}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \zeta(2k)(ix)^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\right)$ d'après la question précédente. Cette relation est aussi vraie pour $x = 0$ car $e^{i0} - 1 = 0$. Par conséquent,

$$\forall x \in]-2\pi; 2\pi[, \quad ix = (e^{ix} - 1) \times \left(1 - \frac{ix}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \zeta(2k)(ix)^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}}\right).$$

Avec la définition à venir des nombres de BERNOULLI, la série entière

$$\sum_{k \geq 0} \frac{b_k}{k!} z^k = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1} \zeta(2k) z^{2k}}{2^{2k-1} \pi^{2k}}$$

de la variable complexe converge pour des imaginaires purs $z = ix$ tels que $|x| < 2\pi$ donc son rayon de convergence R vérifie $R \geq 2\pi$. On note B sa fonction somme $B : B(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in B(0, R), \quad B(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k!} z^k = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \zeta(2k) z^{2k}}{2^{2k-1} \pi^{2k}}.$$

On sait que $\forall z \in \mathbb{C}, e^z - 1 = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\right) - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ et le rayon de convergence R' de $\sum_{k \geq 1} \frac{z^k}{k!}$ vaut $R' = +\infty$.

Par produit de CAUCHY, comme $\min(R, R') = R$, il existe une suite de coefficients $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que

$\forall z \in B(0, R), (e^z - 1)B(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$ (1). En particulier, en prenant $z = ix$ et $x \in]-2\pi; 2\pi[$, on a bien

$|z| < R$ donc $(e^{ix} - 1)B(ix) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (ix)^k = ix$ d'après ce qui précède. Comme $2\pi > 0$, en identifiant les

coefficients du développement en série entière dans l'égalité $\forall x \in]-2\pi; 2\pi[, \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (ix)^k = ix$, on a $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ et $\forall k \geq 2, c_k = 0$. Par conséquent, en revenant à la relation (1) avec ces valeurs de c_k , on a la relation

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 2\pi$, on a $z = (e^z - 1) \times \left(1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \zeta(2k) z^{2k}}{2^{2k-1} \pi^{2k}}\right).$

2.2 Calcul des valeurs de ζ en les nombres pairs en fonction des nombres de BERNOULLI

2.2.1 Comme $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto e^x - 1$ sont classiquement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que g ne s'annule qu'en 0, par quotient $h = \frac{f}{g}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. D'après la question précédente en prenant $z = x$,

$$\forall x \in]-2\pi; 2\pi[, \quad h(x) = B(x) = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \zeta(2k) x^{2k}}{2^{2k-1} \pi^{2k}}$$

(qui marche même avec $x = 0$ car $h(0) = 1$) donc h est développable en série entière sur $] - 2\pi; 2\pi[$ et y est donc de classe C^∞ d'après le cours.

Enfin, comme tout réel est intérieur aux intervalles $\mathbb{R}_+^*$, $] -2\pi; 2\pi[$ ou $\mathbb{R}_+^*$, h est de classe C^∞ au voisinage de tout réel, h est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Comme h est développable en série entière sur $] -2\pi; 2\pi[$, d'après le cours, $\forall x \in] -2\pi; 2\pi[$, $h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k$ qu'on peut identifier, par unicité du développement en série entière, avec $h(x) = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \zeta(2k) x^{2k}}{2^{2k-1} \pi^{2k}}$,

ce qui donne $h(0) = 1$, $h'(0) = -\frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h^{(2n+1)}(0) = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, h^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{\pi^{2n} 2^{2n-1}} \zeta(2n).$$

2.2.2 La relation de 2.1.4 s'écrit, pour $z = x \in] -2\pi; 2\pi[$, $x = (e^x - 1) \times \left(1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \zeta(2k) x^{2k}}{2^{2k-1} \pi^{2k}}\right)$ ou

$$\forall x \in] -2\pi; 2\pi[, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n\right) = x$$

en posant $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{1}{n!}$ pour $n \geq 1$ et par définition des nombres de BERNOULLI. Par produit de CAUCHY sur $] -2\pi; 2\pi[$, comme $R \geq 2\pi$, on a

$$\forall x \in] -2\pi; 2\pi[, \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^p a_{p-k} \frac{b_k}{k!}\right) x^p = x.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, $a_0 b_0 = 0$ (normal, $a_0 = 0$) et $a_1 b_0 + a_0 b_1 = 1$ (normal, $a_1 = b_0 = 1$ et $a_0 = 0$) et surtout, pour tout entier $p \geq 2$, on obtient $\sum_{k=0}^p a_{p-k} \frac{b_k}{k!} = 0$ qui devient $\sum_{k=0}^{p-1} a_{p-k} \frac{b_k}{k!} = 0$ car $a_0 = 0$ et $a_{p-k} = \frac{1}{(p-k)!}$ si $p-k \geq 1$. Ainsi, $\sum_{k=0}^{p-1} \frac{b_k}{k!(p-k)!} = 0$ et en posant $n = p-1$,

on en déduit bien que $\sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!(n+1-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$

2.2.3 D'après la question précédente comme $2 \geq 1$, $0 = \frac{b_0}{0!.3!} + \frac{b_1}{1!.2!} + \frac{b_2}{2!.1!} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{b_2}{2}$ car $b_0 = 1$ et

$b_1 = -\frac{1}{2}$ donc $b_2 = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ d'où $b_2 = \frac{1}{6}$. Ensuite, $0 = \frac{b_0}{0!.5!} + \frac{b_1}{1!.4!} + \frac{b_2}{2!.3!} + \frac{b_3}{3!.2!} + \frac{b_4}{4!.1!}$ donc

$b_4 = -\frac{b_0}{5} - b_1 - 2b_2 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{-6+15-10}{30}$ d'où $b_4 = -\frac{1}{30}$. Continuons avec $n = 6$ dans 2.2.2

et $0 = \frac{b_0}{0!.7!} + \frac{b_1}{1!.6!} + \frac{b_2}{2!.5!} + \frac{b_4}{4!.3!} + \frac{b_6}{6!.1!}$ donc $b_6 = -\frac{b_0}{7} - b_1 - 3b_2 - 5b_4 = -\frac{1}{7} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ d'où $b_6 = \frac{1}{42}$.

Comme on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n)!} b_{2n}$ par définition des nombres de BERNOULLI, on en

déduit les trois valeurs $\zeta(2) = \frac{(-1)^0 2^1 \pi^2}{2!} b_2 = \frac{\pi^2}{6}$ puis $\zeta(4) = \frac{(-1)^1 2^3 \pi^4}{4!} b_4 = +\frac{\pi^4}{3! \times 15}$ d'où $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

et $\zeta(6) = \frac{(-1)^2 2^5 \pi^6}{6!} b_6 = \frac{2^5 \pi^6}{6! \times 7 \times 6} = \frac{\pi^6}{1 \times 1 \times 3 \times 1 \times 5 \times 3 \times 7 \times 3}$ d'où $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.

2.3 On a vu en 2.1.4 que $R \geq 2\pi$. Si on avait $R > 2\pi$, la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{b_n i^n}{n!} x^n$ aurait aussi pour rayon $R > 2\pi$ car la suite $\left(\frac{b_n i^n}{n!}\right)_{n \geq 0}$ est bornée si et seulement si la suite $\left(\frac{b_n}{n!}\right)_{n \geq 0}$ l'est, ce qui montrerait d'après le cours que la fonction somme $A : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n i^n}{n!} x^n$ serait continue (et même de classe C^∞) sur $[-2\pi; 2\pi] \subset]-R; R[$. Or on sait depuis la question 2.1.4 que $\forall x \in]-2\pi; 2\pi[, A(x) = \frac{ix}{e^{ix} - 1}$. Mais ceci est impossible car la fonction $x \mapsto \frac{ix}{e^{ix} - 1}$ n'admet pas de limite finie quand x tend vers $2\pi^-$ (par exemple) puisque $\lim_{x \rightarrow (2\pi)^-} (e^{ix} - 1) = 0$. On conclut ce raisonnement par l'absurde, et **$R = 2\pi$.**

DS 6.2 : X-ENS 2018 PC

PSI 1 2025/2026

samedi 07 mars 2026

PARTIE 1 : CAS PARTICULIERS

1.1 En identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$, $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ étant un n^2 -uplet de ± 1 , $\text{card}(\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})) = 2^{n^2}$.

Comme il ne contient pas la matrice nulle, $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1.2 Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$, $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{-1, 1\}^n$ et $Y = (y_j)_{1 \leq j \leq n} \in \{-1, 1\}^n$. Alors $X^T A Y = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n x_i a_{i,j} y_j \right)$ est un entier relatif comme somme d'entiers relatifs, par inégalité triangulaire, $|X^T A Y| \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |x_i a_{i,j} y_j| \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n 1 \right) \text{ car } \forall (i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, x_i, y_j, a_{i,j} \in \{-1, 1\} : S(A) \subset \llbracket -n^2; n^2 \rrbracket$.

Pour tout $(X, Y) \in (\{-1, 1\}^n)^2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$, notons $E = \{(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \mid x_i a_{i,j} y_j = 1\}$, $e = \text{card}(E)$, $F = \{(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \mid x_i a_{i,j} y_j = -1\}$ et $f = \text{card}(F)$. Il est clair que (E, F) forme une partition de $\llbracket 1; n \rrbracket^2$ donc $e + f = n^2$. De plus, on a vu ci-dessus que $X^T A Y = e - f$ donc $X^T A Y = n^2 - 2f$ a la même parité que n^2 d'où $S(A) \subset \{n^2 - 2f \mid f \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$ strictement inclus dans $\llbracket -n^2; n^2 \rrbracket$ (par exemple, $n^2 - 1 \notin S(A)$).

Enfin, si $k \in S(A)$, alors il existe $(X, Y) \in (\{-1, 1\}^n)^2$ tels que $k = X^T A Y$ et, en prenant $X' = -X \in \{-1, 1\}^n$, on a $X'^T A Y = -X^T A Y = -k \in S(A)$, donc $S(A)$ est bien un ensemble symétrique par rapport à 0.

1.3 Si $k \in S(B)$, alors il existe par définition $(X, Y) \in (\{-1, 1\}^n)^2$ tels que $k = X^T B Y$. En posant $X' = CX$ et $Y' = DY$, X' et Y' sont dans $\{-1, 1\}^n$, car l'ensemble $\{-1, 1\}$ est stable par multiplication, on en déduit que $k \in S(A)$ car $(X')^T A Y' = (CX)^T A (DY) = X^T C^T A D Y = X^T C A D Y = X^T B Y = k$. Par conséquent, $S(B) \subset S(A)$. Comme $C^2 = I$ et $D^2 = I$, les matrices C et D sont leur propre inverse. Puisque $B = CAD$, on a donc $CBD = C^2 A D^2 = A$. D'après ce qui précède, on a donc aussi $S(A) \subset S(B)$. Par double inclusion, si $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})^2$ et s'il existe des matrices diagonales C et D ne contenant que des 1 et des -1 sur la diagonale, telles que $B = CAD$, on a $S(A) = S(B)$.

1.4 Soit $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$ dans $\{-1, 1\}^2$. Alors $X^T I Y = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2 = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$. Comme $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \{-2, 0, 2\}^2$, on a $X^T I Y \in \{-4, 0, 4\} : S(I) \subset \{-4, 0, 4\}$. De plus, pour $X = (1, 1)$ et $Y = (1, 1)$, il vient $X^T I Y = 4$, donc $4 \in S(I)$. Pour $X = (-1, 1)$ et $Y = (1, 1)$, $X^T I Y = 0$ donc $0 \in S(I)$. Enfin, $S(I)$ est un ensemble symétrique par rapport à 0, donc $-4 \in S(I)$. Au final, on a $S(I) = \{-4, 0, 4\}$. De même, $X^T J Y = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2 = \underbrace{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)}_{\in \{-4, 0, 4\}} - \underbrace{2x_2 y_2}_{\in \{-2, 2\}}$ donc $X^T J Y \in \{-6, -2, 2, 6\}$, ainsi $S(J) \subset \{-6, -2, 2, 6\}$. De plus, d'après la question 1.2, on a $S(J) \subset \llbracket -4; 4 \rrbracket$ donc $S(J) \subset \{-2, 2\}$. Or $2 \in S(J)$ en prenant $X = (1, 1)$ et $Y = (1, 1)$, donc $-2 \in S(J)$ par symétrie. Par conséquent, $S(J) = \{-2, 2\}$.

En choisissant judicieusement C et D , on peut, en effectuant le produit CAD , multiplier les lignes et les colonnes de A par 1 ou -1 de toutes les manières possibles. Par exemple, en prenant $D = \text{diag}(-1, 1)$ et $C = \text{diag}(1, -1)$, on multiplie la deuxième ligne de A et la première colonne par -1 en calculant CAD . De plus, ces opérations laissent $S(A)$ inchangé d'après la question 1.3.

- Les matrices qui contiennent exactement 0, 2 ou 4 fois le chiffre 1 s'obtiennent en partant de I et vérifient $S(A) = S(I) = \{-4, 0, 4\}$. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1, 1) \times I \times \text{diag}(-1, 1)$.
- Les matrices qui contiennent exactement 1 ou 3 fois le chiffre 1 s'obtiennent en partant de J et vérifient $S(A) = S(J) = \{-2, 2\}$. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, -1) \times J \times \text{diag}(1, -1)$.

Au final, on n'a que deux choix si $n = 2$ et $A \in \mathcal{M}_2(\{-1, 1\})$, c'est $\boxed{S(A) = \{-4, 0, 4\} \text{ ou } S(A) = \{-2, 2\}}$.

1.5 On peut penser à tourner ces implications dans les deux sens. Commençons dans le sens direct :

- (i) $\implies$ (ii) Pour $(X, Y) \in (\{-1, 1\})^2$ avec $X^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ et $Y^T = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$, la matrice $X^T A Y$ s'obtient à partir de A en multipliant les lignes L_i de A par x_i et les colonnes C_j par y_j (à gauche on modifie les lignes, et à droite les colonnes). Ainsi, si $n^2 \in S(A)$, avec les notations de 1.2, cela signifie que $f = 0$: il n'y a pas de -1 , donc que des 1, dans tous les termes $a_{i,j}x_iy_j$. Ainsi, en notant $D = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ et $D' = \text{diag}(y_1, \dots, y_n)$, on a $DAD' = (a_{i,j}x_iy_j)_{1 \leq i,j \leq n} = J = (1)_{1 \leq i,j \leq n}$. Comme $J = UU^T$ avec $U^T = (1 \ \dots \ 1)$, $D = D^{-1}$ et $D' = D'^{-1}$, cela donne $A = DUU^TD' = XY^T$ (faire le calcul matriciel).
- (ii) $\implies$ (iii) Si $A = XY^T$ avec $(X, Y) \in (\{-1, 1\})^2$, les colonnes de A sont les $y_j X \neq 0$, d'où $\text{rg}(A) = 1$.
- (iii) $\implies$ (i) Si $\text{rg}(A) = 1$, comme toutes les colonnes de A sont non nulles, il existe, pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, un entier $y_i = \pm 1$ tel que $C_i = y_i C_1$ (avec $y_1 = 1$). En notant Y le vecteur colonne tel que $Y^T = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$, la matrice AY est la matrice colonne contenant nC_1 puisque $\sum_{j=1}^n y_j^2 = n$. Par conséquent, en notant $X = C_1 \in \{-1, 1\}^n$, $X^T A Y = nC_1^T C_1 = n\|C_1\|^2 = n^2 \in S(A)$.

Mais on pouvait aussi bien sûr le faire dans le sens inverse :

- (iii) $\implies$ (ii) Si A est de rang 1, en notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A , comme $C_1 \neq 0$, les autres colonnes sont multiples de C_1 et il existe donc, pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, un entier $y_i = \frac{a_{1,i}}{a_{1,1}} = \pm 1$ tel que $C_i = y_i C_1$ (avec $y_1 = 1$ bien sûr). Ainsi $A = C_1 \times (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$ et, en notant X et Y les deux vecteurs colonnes de $\{-1, 1\}^n$ tels que $X = C_1$ et $Y^T = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$, alors $A = XY^T$.
- (ii) $\implies$ (i) Si $A = XY^T$ avec $(X, Y) \in (\{-1, 1\})^2$, alors $X^T A Y = X^T (XY^T) Y = (X^T X)(Y^T Y) = \|X\|^2 \|Y\|^2 = n^2 \in S(A)$.
- (i) $\implies$ (iii) Si $n^2 \in S(A)$, alors il existe deux vecteurs colonnes X et Y de $\{-1, 1\}^n$ tels que $X^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ et $Y^T = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$ et $n^2 = X^T A Y = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j \right)$. Or, pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $x_i a_{i,j} y_j \in \{-1, 1\}$, donc la condition $n^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j \right)$ se traduit par $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $a_{i,j} x_i y_j = 1$ (somme de n^2 termes, chaque terme valant au plus 1). Par suite, comme $(x_i, a_{i,j}, y_j) \in \{-1, 1\}^3$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, on en déduit que $x_i y_j = a_{i,j}$. On a donc, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $y_j X = C_j$ (colonne j de A) donc toutes les colonnes de A sont multiples de X . Comme $A \neq 0$, on a bien $\text{rg}(A) = 1$.

On a bien montré l'équivalence : $\boxed{n^2 \in S(A) \iff (\exists (X, Y) \in (\{-1, 1\}^n)^2, A = XY^T) \iff \text{rg}(A) = 1.}$

1.6 Les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ vérifiant $n^2 \in S(A)$ sont exactement celles de rang 1 d'après la question 1.5.

Pour les dénombrer, on établit un protocole de choix bijectif :

- On choisit la première colonne C_1 de A : 2^n choix (n cases de ± 1).
- Pour $j \in \llbracket 2; n \rrbracket$, on choisit le terme en case $(1, j)$, les autres termes de la colonne j de A s'en déduisent puisque $C_j = \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}} C_1$: cela fait 2 choix pour chaque colonne donc 2^{n-1} choix (ils sont indépendants).

Il y a donc 2^{2n-1} telles matrices, donc $\boxed{\text{la proportion cherchée est } \frac{2^{2n-1}}{2^{n^2}} = \frac{1}{2^{n^2-2n+1}} = \frac{1}{2^{(n-1)^2}}.}$

PARTIE 2 : MAJORATION

2.1 La variable aléatoire U_1 est finie, de même que $e^{\lambda U_1}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, donc $e^{\lambda U_1}$ admet une espérance finie et, d'après le théorème de transfert, avec la loi de U_1 donnée par l'énoncé, on obtient

$$\mathbb{E}[e^{\lambda U_1}] = e^{-\lambda} \mathbb{P}(U_1 = -1) + e^{\lambda} \mathbb{P}(U_1 = 1) = \frac{1}{2}(e^{-\lambda} + e^{\lambda}) = \text{ch}(\lambda).$$

Ainsi, $\varphi(\lambda) = \ln(\text{ch}(\lambda))$ et φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi'(\lambda) = \frac{\text{sh}(\lambda)}{\text{ch}(\lambda)} = \text{th}(\lambda)$ et $\varphi''(\lambda) = 1 - \text{th}(\lambda)^2$.

On pose $\psi : t \mapsto \varphi(t) - \frac{t^2}{2}$, ψ est aussi, par opérations, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on dérive deux fois : $\psi'(t) = \text{th}(t) - t$, $\psi''(t) = -\text{th}^2(t) \leq 0$. Ainsi, ψ' est décroissante sur $\mathbb{R}$, comme $\psi'(0) = 0$, ψ' est positive sur $\mathbb{R}_-$ et négative sur $\mathbb{R}_+$ d'où ψ est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, ψ maximale en 0 où elle vaut $\psi(0) = \ln(\text{ch}(0)) = 0$. ψ est donc négative sur $\mathbb{R}$ donc

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda) = \mathbb{E}[e^{\lambda U_1}] \leq \frac{\lambda^2}{2}.$$

On pouvait aussi, comme on l'a vu cette année, comparer $\mathbb{E}[e^{\lambda U_1}] = \text{ch}(\lambda)$ et $\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$ en passant par les séries entières. En effet, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(2n)!} \leq \frac{1}{2^n n!}$ car $\frac{(2n)!}{n!} = (n+1) \times \dots \times (2n) \geq 2 \times \dots \times 2 = 2^n$ pour $n \geq 1$ et $0! = 2^0 0! = 1$, il vient

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{ch}(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{2^n n!},$$

et on utilise ensuite la croissante de la fonction $\ln$ pour retrouver le résultat.

2.2 Soit $t \in \mathbb{R}$, comme $\exp$ est strictement croissante et $\lambda > 0$, $(S_k \geq t) = (\lambda S_k \geq \lambda t) = (e^{\lambda S_k} \geq e^{\lambda t})$ d'où

l'égalité des probabilités $\mathbb{P}(S_k \geq t) = \mathbb{P}(e^{\lambda S_k} \geq e^{\lambda t})$. Comme $S_k = \sum_{i=1}^k U_i$, S_k admet une espérance finie par somme et, par mutuelle indépendance de $U_1, \dots, U_k$, $\mathbb{E}[e^{\lambda S_k}] = \prod_{i=1}^k \mathbb{E}[e^{\lambda U_i}] = \prod_{i=1}^k e^{\varphi(\lambda)} = e^{k\varphi(\lambda)}$ puisque les U_i suivent la même loi que U_1 . Comme $e^{\lambda S_k}$ est positive et admet une espérance finie, d'après l'inégalité

de MARKOV, comme $e^{\lambda t} > 0$, comme attendu, $\boxed{\mathbb{P}(S_k \geq t) = \mathbb{P}(e^{\lambda S_k} \geq e^{\lambda t}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda S_k}]}{e^{\lambda t}} = \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t).$

2.3 Soit $t > 0$, la majoration de la question précédente est d'autant plus intéressante que le majorant est petit, en les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ pour lesquelles $k\varphi(\lambda) - \lambda t$ est minimale. Or $k\varphi(\lambda) - \lambda t \leq k\frac{\lambda^2}{2} - \lambda t = \theta(\lambda)$ d'après la question 2.1 et $\theta'(\lambda) = k\lambda - t$. θ est donc minimale pour $\lambda = \frac{t}{k} > 0$ en lequel $\theta\left(\frac{t}{k}\right) = -\frac{t^2}{2k}$. D'après 2.2, en prenant $\lambda = \frac{t}{k}$, on trouve donc l'inégalité de Hoeffding, $\mathbb{P}(S_k \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right)$.

Bien sûr, étudier le minimum de la fonction $\alpha : \lambda \mapsto k\varphi(\lambda) - \lambda t = k \ln(\text{ch}(\lambda)) - \lambda t = k \ln\left(\text{ch}(\lambda)e^{\frac{-\lambda t}{k}}\right)$ serait plus précis mais le majorant n'aurait pas une expression aussi simple. En effet, $\alpha'(\lambda) = k \text{th}(\lambda) - t$ donc, comme th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et bijective de $\mathbb{R}$ dans $] -1; 1[$, on considère trois cas :

- si $t \geq k$, α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et, comme $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \text{ch}(\lambda)e^{\frac{-\lambda t}{k}} = -\infty$ car $\text{ch}(\lambda) \sim \frac{e^\lambda}{2}$ donc $\text{ch}(\lambda)e^{\frac{-\lambda t}{k}} \sim \frac{1}{2} \exp\left(\left(1 - \frac{t}{k}\right)\lambda\right)$. En faisant tendre λ vers $+\infty$ dans la majoration précédente, on obtient $\mathbb{P}(S_k \geq t) \leq 0$ donc $\mathbb{P}(S_k \geq t) = 0$ ce qui est évident puisque $S_k(\Omega) \subset \llbracket -k; k \rrbracket$.
- si $t < k$, α est minimale en λ_0 tel que $k \text{th}(\lambda_0) = t$, c'est-à-dire en $\lambda_0 = \text{Argth}\left(\frac{t}{k}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{k+t}{k-t}\right)$.

Ainsi, grâce à 2.2, $\mathbb{P}(S_k \geq t) \leq \exp(k\varphi(\lambda_0) - \lambda_0 t) = \left(1 - \frac{t}{k}\right)^{\frac{t-k}{2}} \left(1 + \frac{t}{k}\right)^{\frac{-t-k}{2}}$ (après calculs).

2.4 Comme C suit une loi uniforme, toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ ont la même probabilité $\lambda > 0$ d'être image de $\omega \in \Omega$ par C . Ainsi, C est surjective et $\text{card}(C(\Omega)) = \text{card}(\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})) = 2^{n^2}$. On peut résumer :

- Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$, $\mathbb{P}(C = M) = \frac{1}{2^{n^2}} = \lambda$.
- Pour $E \subset \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$, $(C \in E) = \bigcup_{M \in E} (C = M)$ (disjoints) donc $\mathbb{P}(C \in E) = \sum_{M \in E} \mathbb{P}(C = M) = \frac{\text{card}(E)}{2^{n^2}}$.

Il est clair que chacune des variables aléatoires $x_i y_j C_{i,j}$ est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ car $\{-1, 1\}$ est stable par produit. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, comme les événements $(x_i y_j C_{i,j} = 1)$ et $(C_{i,j} = x_i y_j)$ sont égaux, on a

$$\mathbb{P}(x_i y_j C_{i,j} = 1) = \mathbb{P}(C_{i,j} = x_i y_j).$$

Or, $E_{i,j} = \{C \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\}) \mid C_{i,j} = x_i y_j\}$ est une partie de $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ de cardinal 2^{n^2-1} car pour chacune des $n^2 - 1$ cases différentes de la case (i, j) , on a le choix (indépendant) de ± 1 dans celle-ci. Ainsi,

$$\mathbb{P}(x_i y_j C_{i,j} = 1) = \frac{\text{card}(E_{i,j})}{2^{n^2}} = \frac{2^{n^2-1}}{2^{n^2}} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(x_i y_j C_{i,j} = -1) = 1 - \mathbb{P}(x_i y_j C_{i,j} = 1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, les variables aléatoires $x_i y_j C_{i,j}$ suivent donc bien la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

- Pour $k \in \llbracket 1; n^2 \rrbracket$ et toute famille des cases $(i_p, j_p)_{1 \leq p \leq k} \in (\llbracket 1; n \rrbracket^2)^k$ formée d'éléments distincts et toute famille correspondante $(\alpha_p)_{1 \leq p \leq k} \in \{-1, 1\}^k$, on a

$$\prod_{p=1}^k \mathbb{P}(x_{i_p} y_{j_p} C_{i_p, j_p} = \alpha_p) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$$

d'une part, et

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^k (x_{i_p} y_{j_p} C_{i_p, j_p} = \alpha_p)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^k (C_{i_p, j_p} = \alpha_p x_{i_p} y_{j_p})\right) = \mathbb{P}(C \in E_k) = \frac{2^{n^2-k}}{2^{n^2}} = \frac{1}{2^k}$$

d'autre part car $E_k = \{C \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\}) \mid \forall p \in \llbracket 1; k \rrbracket, C_{i_p, j_p} = \alpha_p x_{i_p} y_{j_p}\}$ est de cardinal 2^{n^2-k} (car cela correspond au choix d'un ± 1 dans chacune des $n^2 - k$ cases qui ne sont pas les $(i_p, j_p)_{1 \leq p \leq k} \in (\llbracket 1; n \rrbracket^2)^k$).

On a donc bien, pour tous ces choix de paramètres,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{p=1}^k (x_{i_p} y_{j_p} C_{i_p, j_p} = \alpha_p)\right) = \prod_{p=1}^k \mathbb{P}(x_{i_p} y_{j_p} C_{i_p, j_p} = \alpha_p)$$

ce qui est la définition de l'indépendance mutuelle de la famille des variables aléatoires $(x_i y_j C_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

2.5 • Remarquons déjà que l'inégalité montrée en 2.3 est encore valable pour $t = 0$, car $\mathbb{P}(S_k \geq 0) \leq 1$ est clair.

• Pour tout $t \geq 0$, pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$M(C(\omega)) \geq tn^{3/2} \iff (\exists (X, Y) \in (\{-1, 1\}^n)^2, X^T C(\omega) Y \geq tn^{3/2}),$$

ce qui se traduit au niveau des évènements par

$$(M(C) \geq tn^{3/2}) = \bigcup_{(X, Y) \in (\{-1, 1\}^n)^2} (X^T C Y \geq tn^{3/2}).$$

Par suite, par la propriété de sous-additivité (il n'y a aucun raison que ces évènements soient incompatibles),

$$\mathbb{P}(M(C) \geq tn^{3/2}) \leq \sum_{(X, Y) \in (\{-1, 1\}^n)^2} \mathbb{P}(X^T C Y \geq tn^{3/2}).$$

• Or, pour $(X, Y) \in (\{-1, 1\}^n)^2$ fixé, $X^T C Y = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2} x_i y_j C_{i,j}$, où les variables $(x_i y_j C_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ sont à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes mutuellement et de loi uniforme d'après la question 2.4. Par conséquent, d'après l'inégalité de Hoeffding, puisque $tn^{3/2} \geq 0$, on obtient la majoration

$$\mathbb{P}(X^T C Y \geq tn^{3/2}) = \mathbb{P}\left(\sum_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2} x_i y_j C_{i,j} \geq tn^{3/2}\right) \leq \exp\left(-\frac{(tn^{3/2})^2}{2n^2}\right) = \exp\left(-\frac{t^2 n}{2}\right).$$

• En ré-injectant ce résultat dans l'inégalité obtenue ci-dessus, on obtient :

$$\mathbb{P}(M(C) \geq tn^{3/2}) \leq \sum_{(X, Y) \in (\{-1, 1\}^n)^2} \mathbb{P}(X^T C Y \geq tn^{3/2}) \leq \sum_{(X, Y) \in (\{-1, 1\}^n)^2} \exp\left(-\frac{t^2 n}{2}\right) = 2^{2n} \exp\left(-\frac{t^2 n}{2}\right)$$

donc $\mathbb{P}(M(C) \geq tn^{3/2}) \leq \exp\left(2n \ln(2) - \frac{t^2 n}{2}\right) = \exp\left(-\left(\frac{t^2}{2} - 2 \ln 2\right)n\right)$ comme attendu.

2.6 Suivons l'indication : soit un réel $\varepsilon > 0$, posons $t = 2\sqrt{\ln(2)} + \varepsilon > 0$, alors grâce à la question précédente :

$$\mathbb{P}(M(C) \geq tn^{3/2}) \leq \exp\left(-\left(\frac{(2\sqrt{\ln(2)} + \varepsilon)^2}{2} - 2 \ln 2\right)n\right) = \exp\left(-\left(2\varepsilon\sqrt{\ln 2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)n\right) < 1$$

car $-2\varepsilon\sqrt{\ln 2} - \frac{\varepsilon^2}{2} < 0$. On en déduit que $\mathbb{P}(M(C) < (2\sqrt{\ln 2} + \varepsilon)n^{3/2}) = 1 - \mathbb{P}(M(C) \geq (2\sqrt{\ln 2} + \varepsilon)n^{3/2}) > 0$ ce qui montre que l'événement $(M(C) < (2\sqrt{\ln 2} + \varepsilon)n^{3/2})$ n'est pas vide.

Il existe donc $\omega \in \Omega$ tel que $M(C(\omega)) < (2\sqrt{\ln 2} + \varepsilon)n^{3/2}$. En notant $A = C(\omega)$, on a donc $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ et $M(A) < (2\sqrt{\ln 2} + \varepsilon)n^{3/2}$. Par définition de $\underline{M}(n)$, on a donc $\underline{M}(n) \leq M(A) < (2\sqrt{\ln 2} + \varepsilon)n^{3/2}$. Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, en faisant tendre ε vers 0 dans cette inégalité stricte, on obtient l'inégalité large souhaitée, à savoir $\underline{M}(n) \leq 2\sqrt{\ln 2} n^{3/2}$.

PARTIE 3 : MINORATION

3.1 Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{-1, 1\}^n$ fixés, on a pour tout $X \in \{-1, 1\}^n$ noté $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et en notant $V = AY = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $v_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}y_j$ par définition du produit matriciel,

$$X^T AY = (X|AY) = (X|V) = \sum_{i=1}^n x_i v_i \quad \text{donc} \quad X^T AY \leq |X^T AY| \leq \sum_{i=1}^n |v_i|$$

par inégalité triangulaire et car $|x_i| = 1$ par définition. Ainsi, la quantité $M = \sum_{i=1}^n |v_i|$ est un majorant de l'ensemble fini $E_Y = \{X^T AY \mid X \in \{-1, 1\}^n\}$. De plus, en définissant le vecteur $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ par $x_i = 1$ si $v_i \geq 0$ et $x_i = -1$ si $v_i < 0$, on a par construction $X \in \{-1, 1\}^n$ et $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $x_i v_i = |v_i|$ ce qui montre que $M = \sum_{i=1}^n |z_i| = \sum_{i=1}^n x_i z_i = X^T AY \in E_Y$. Par conséquent, M est un élément de E_Y qui majore E_Y : c'est donc

le maximum de E_Y d'où, par définition de $g_A(Y)$,

$$g_A(Y) = \max(E_Y) = M = \sum_{i=1}^n |z_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}y_j \right|.$$

3.2 Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ fixé. Comme à la question 2.4 en remplaçant $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}^n$, on montre que puisque Z est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}^n$, alors $(Z_1, \dots, Z_n)$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Comme la famille $(a_{i,1}, \dots, a_{i,n})$ ne contient que des ± 1 , d'après le cours, $(a_{i,1}Z_1, \dots, a_{i,n}Z_n)$ est aussi une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ (car $-Z_i$ a la même loi que Z_i). En posant, pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $B_j = \frac{1 + a_{i,j}Z_j}{2}$, alors $B_j(\Omega) = \{0, 1\}$, puis $\mathbb{P}(B_j = 0) = \mathbb{P}(a_{i,j}Z_j = -1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B_j = 1) = \mathbb{P}(a_{i,j}Z_j = 1) = \frac{1}{2}$ donc B_j est une variable aléatoire suivant la loi de BERNOULLI de paramètre $\frac{1}{2}$. Encore une fois, $(B_1, \dots, B_n)$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de BERNOULLI de paramètre $\frac{1}{2}$ donc, d'après le cours, $S_n = \sum_{j=1}^n B_j$ est une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$. Or, en posant $T_n = \sum_{j=1}^n a_{i,j}Z_j$, comme $a_{i,j}Z_j = 2B_j - 1$, on a $T_n = 2S_n - n$ donc, puisque $S_n(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$, il vient $T_n(\Omega) = \{-n, -n+2, \dots, n-2, n\}$. Comme T_n est finie, elle admet une espérance finie qui, par le théorème de transfert, en notant $h : k \mapsto |2k - n|$, vaut

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}Z_j \right| \right] = \mathbb{E}[|2S_n - n|] = \mathbb{E}[h(S_n)] = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_n = k) |2k - n|$$

ce qui, en se souvenant de la loi binomiale, $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$, devient

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} Z_j \right| \right] = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} |2k - n| = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n - 2k|.$$

Enfin, $g_A(Z) = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} Z_j \right|$ d'après la question 3.1 donc la variable aléatoire $g_A(Z)$ admet une espérance finie comme somme finie de variables aléatoires admettant une espérance et, par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}[g_A(Z)] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} Z_j \right| \right] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n - 2k| \right) = \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n - 2k| \quad \text{car, dans la somme,}$$

ces espérances $\mathbb{E} \left[\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} Z_j \right| \right]$ ne dépendant pas de i .

3.3 Simplification de $\mathbb{E}[g_A(Z)]$

3.3.1 Montrons par récurrence que, pour $m \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a $\sum_{k=0}^m (n-2k) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{m} \quad (\mathcal{H}_m)$.

- Pour $m = 0$, $\sum_{k=0}^m (n-2k) \binom{n}{k} = (n-0) \binom{n}{0} = n = n \binom{n-1}{0}$ donc $\mathcal{H}_0$ est vérifiée.
- Soit $m \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$ tel que $\mathcal{H}_m$ est vraie. Alors

$$\sum_{k=0}^{m+1} (n-2k) \binom{n}{k} = \left(\sum_{k=0}^m (n-2k) \binom{n}{k} \right) + (n-2(m+1)) \binom{n}{m+1} = n \binom{n-1}{m} + (n-2m-2) \binom{n}{m+1}$$

par hypothèse de récurrence donc, en revenant aux factorielles,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} (n-2k) \binom{n}{k} &= n \frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!} + (n-2m-2) \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} \\ &= (m+1) \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} + (n-2m-2) \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} \end{aligned}$$

qui se simplifie en

$$\sum_{k=0}^{m+1} (n-2k) \binom{n}{k} = (n-m-1) \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} = n \frac{(n-1)!}{(m+1)!(n-m-2)!} = n \binom{n-1}{m+1}$$

et on a bien prouvé que $\mathcal{H}_{m+1}$ est vraie.

Par principe de récurrence, on a bien $\forall m \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \sum_{k=0}^m (n-2k) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{m}.$

3.3.2 Séparons les cas n pair et n impair :

- Si n est pair qu'on écrit $n = 2p$, alors $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = p$ et, d'après la question 3.2, on a

$$\mathbb{E}[g_A(Z)] = \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n-2k| = \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} |n-2k| + \frac{n}{2^n} \sum_{k=p+1}^n \binom{n}{k} |n-2k|$$

en découpant en deux compte tenu de la valeur absolue. Ainsi, comme $n - p - 1 = p - 1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g_A(Z)] &= \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} (n - 2k) + \frac{n}{2^n} \sum_{j=0}^{n-p-1} \binom{n}{n-j} |2j - n| && \text{en posant } j = n - k \iff k = n - j, \\
&= \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} (n - 2k) + \frac{n}{2^n} \sum_{j=0}^{p-1} \binom{n}{j} (n - 2j) && \text{car si } j \leq p - 1, \text{ alors } 2j - n \leq 0, \\
&= \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} (n - 2k) + \frac{n}{2^n} \sum_{j=0}^{p-1} \binom{n}{j} (n - 2j) && \text{car } n - 2p = 0, \\
&= 2 \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{k} (n - 2k) && \text{car } j \text{ est une variable muette} \\
&= \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{p} && \text{avec 3.3.1 et } m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 = p - 1. \\
&= \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.
\end{aligned}$$

- Si n est impair qu'on écrit $n = 2p + 1$, alors $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = p$ et, toujours avec 3.2, comme $n - p - 1 = p$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g_A(Z)] &= \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} |n - 2k| + \frac{n}{2^n} \sum_{k=p+1}^n \binom{n}{k} |n - 2k| && \text{en coupant en deux} \\
&= \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} (n - 2k) + \frac{n}{2^n} \sum_{j=0}^{n-p-1} \binom{n}{n-j} |2j - n| && \text{en posant } j = n - k \iff k = n - j, \\
&= \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} (n - 2k) + \frac{n}{2^n} \sum_{j=0}^p \binom{n}{j} (n - 2j) && \text{car si } j \leq n - p - 1, \text{ alors } 2j - n \leq 0, \\
&= 2 \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} (n - 2k) && \text{car } j \text{ est une variable muette} \\
&= \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{p} && \text{avec 3.3.1 et } m = \lfloor n/2 \rfloor = p. \\
&= \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.
\end{aligned}$$

Dans les deux cas, comme souhaité, on a bien $\mathbb{E}[g_A(Z)] = \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

On pouvait plus simplement dire que, puisque si $n = 2k$, on a $\frac{1}{2^n} \binom{n}{k} |2k - n| = 0$, alors, et dans tous les cas pour la parité de n , on a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n - 2k| = \sum_{2k \leq n} \binom{n}{k} (n - 2k) + \sum_{2k \geq n} \binom{n}{k} (2k - n)$$

ce qui, en posant $j = n - k$ dans la seconde somme, donne

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n - 2k| = \sum_{2k \leq n} \binom{n}{k} (n - 2k) + \sum_{2j \leq n} \binom{n}{n-j} (n - 2j)$$

puis, puisque $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$ et que j est une variable muette, grâce à la question précédente,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n - 2k| = 2 \sum_{2k \leq n} \binom{n}{k} (n - 2k) = 2n \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

3.4 Minoration de $\underline{M}(n)$

3.4.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$, alors comme $M(A) = \max(\{g_A(Y) \mid Y \in \{-1, 1\}^n\})$ d'après l'énoncé, la variable aléatoire $g_A(Z)$ vérifie $g_A(Z) \leq M(A)$. En passant à l'espérance, on trouve $\mathbb{E}[g_A(Z)] \leq \mathbb{E}[M(A)] = M(A)$ car l'espérance d'une variable aléatoire constante vaut cette constante. D'après la question précédente, on en déduit donc que $M(A) \geq \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Ainsi, cette constante majore toutes les valeurs de $M(A)$ pour

$$A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\}) \text{ donc, par définition } \underline{M}(n) = \min\{M(A) \mid A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})\} \geq \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \text{ car le}$$

minimum est le plus grand des minorants d'une partie.

3.4.2 On pose $a_n = \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Cette quantité $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ nous fait considérer deux cas :

- Si n est pair, on l'écrit $n = 2p$, $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = p$ et $a_n = a_{2p} = \frac{4p^2}{2^{2p-1}} \binom{2p-1}{p} = \frac{4p^2}{2^{2p-1}} \frac{(2p-1)!}{p!(p-1)!} = \frac{4p^2}{2^{2p}} \frac{(2p)!}{(p!)^2}$ donc, avec la formule de STIRLING et quand p tend vers $+\infty$, n tend vers $+\infty$ en étant pair :

$$a_{2p} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4p^2}{2^{2p}} \frac{\sqrt{4\pi p}(2p)^{2p} e^{2p}}{(2\pi p)p^{2p} e^{2p}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4p^{3/2}}{\sqrt{\pi}}$$

après les simplifications habituelles.

- Si n est impair, on l'écrit $n = 2p + 1$ et $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = p$ donc $a_n = a_{2p+1} = \frac{(2p+1)^2}{2^{2p}} \binom{2p}{p} = \frac{(2p+1)^2}{2^{2p}} \frac{(2p)!}{(p!)^2}$ ce qui donne à nouveau, comme $(2p+1)^2 \underset{+\infty}{\sim} 4p^2$, $a_{2p+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4p^{3/2}}{\sqrt{\pi}}$.

Si on résume les deux renseignements précédents, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{a_{2p}}{(2p)^{3/2}} = \frac{4}{2^{3/2}\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ et, comme $(2p+1)^{3/2} \underset{+\infty}{\sim} 2^{3/2}p^{3/2}$, $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{a_{2p+1}}{(2p+1)^{3/2}} = \frac{4}{2^{3/2}\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Comme une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ tend vers ℓ si et seulement si les deux suites $(u_{2p})_{p \geq 1}$ et $(u_{2p+1})_{p \geq 0}$ tendent vers ℓ , on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n^{3/2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = c$

ce qui se traduit directement par

$$a_n = \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}} n^{3/2} = C n^{3/2}.$$

Par un calcul simple, on montre que $a_{2n+1} = \frac{(2n+1)^2}{(2n)^2} a_{2n}$ donc $a_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} a_{2n}$. Or $(2n+1)^{3/2} \underset{+\infty}{\sim} (2n)^{3/2}$, donc il suffit de montrer l'équivalence précédente dans le cas pair ou dans le cas impair pour conclure.

L'équivalent trouvé de ce minorant de $\underline{M}(n)$ est (heureusement) inférieur au majorant trouvé dans la partie 2. Comme $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sim 0,798$ et $2\sqrt{\ln 2} \sim 1,665$, on trouve en gros un facteur 2 entre ces deux quantités. Mais surtout, on a le bon ordre de grandeur pour $\underline{M}(n)$ qui tend vers $+\infty$ "comme" $n^{3/2}$ et il y a fort à parier qu'il existe une constante $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \leq \alpha \leq 2\sqrt{\ln 2}$ telle que $\underline{M}(n) \underset{+\infty}{\sim} \alpha n^{3/2}$.