

DS 6 : CENTRALE MP 2017 M2

PSI 1 2025/2026

samedi 07 mars 2026

Notations :

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont discrètes. On note $\mathbb{P}_X$ la loi d'une variable aléatoire X . Si X et X' sont deux variables aléatoires définies sur les espaces probabilisés respectifs $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, la notation $X \sim X'$ signifie que X et X' ont même loi, c'est à dire que $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X'}$.

Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ on note G_X sa fonction génératrice, définie par

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$$

pour $t \in \mathbb{R}$, lorsque la série converge absolument.

Théorème admis (I) : si $m \in \mathbb{N}^*$ et si $\mathcal{L}$ est une loi de probabilité sur un espace probabilisé Ω , alors il existe des variables aléatoires $X_1, \dots, X_m$ définies sur un espace probabilisé Ω_m , indépendantes et de loi $\mathcal{L}$.

Variable décomposable : soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle décomposition de X toute relation de la forme $X \sim Y + Z$ où Y et Z sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un espace probabilisé pouvant être distinct de celui sur lequel X est définie. On dit que X est décomposable si X admet une décomposition où Y et Z ne sont pas constantes presque sûrement.

Variable infiniment divisible : soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que X est infiniment divisible si, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe des variables aléatoires réelles discrètes $X_{m,1}, \dots, X_{m,m}$ indépendantes, de même loi, et vérifiant $X \sim X_{m,1} + \dots + X_{m,m}$. Dans cette définition, l'espace probabilisé Ω_m sur lequel sont définies les $X_{m,i}$ peut dépendre de m .

PARTIE 1 : EXEMPLES DE DÉCOMPOSABILITÉ

- 1.1** Soit X et X' deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Justifier que $X \sim X' \iff G_X = G_{X'}$.
- 1.2** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une décomposition $X \sim Y + Z$, où Y et Z sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, donner une variable aléatoire dont $G_X(t)$ est l'espérance. En déduire (cours à justifier) une relation qui lie G_X , G_Y et G_Z .
- 1.3** Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où $n \geq 1$ et $p \in]0; 1[$. Montrer que X est décomposable si et seulement si $n \geq 2$. Indication : on pourra utiliser le théorème admis (I).
- 1.4 Réciproque :** Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme $A = X^4 + 2X + 1$.
- 1.4.1** Soit U et V deux polynômes à coefficients réels positifs ou nuls tels que $UV = A$. Montrer que l'un des polynômes U ou V est constant. Indication : distinguer selon les valeurs des degrés de U et V .
- 1.4.2** En déduire qu'il existe une variable aléatoire décomposable Y telle que Y^2 ne soit pas décomposable. Indication : on pourra considérer le polynôme $\frac{1}{4}A$.

PARTIE 2 : VARIABLES UNIFORMES

Dans cette sous-partie, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et suivant la loi uniforme sur $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$: $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{n}$ si $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ et $\mathbb{P}(Y = k) = 0$ sinon.

- 2.1 Cas non premier :** On suppose dans cette question que n n'est pas premier : il existe des entiers a et b , supérieurs ou égaux à 2, tels que $n = ab$.
- 2.1.1** Montrer qu'il existe un unique couple de variables aléatoires entières (Q, R) définies sur Ω telles que $Y = aQ + R$ et $\forall \omega \in \Omega, R(\omega) \in \llbracket 0; a-1 \rrbracket$.

2.1.2 Préciser la loi de (Q, R) , puis les lois de Q et de R .

2.1.3 Montrer que Y est décomposable. En déduire une expression de G_Y comme produit de deux polynômes non constants que l'on précisera.

2.2 Cas premier : On suppose dans cette question que n est un nombre premier. Dans ce qui suit, on suppose l'existence de polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ unitaires à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ tels que $UV = 1 + X + \dots + X^{n-1}$. On pose $r = \deg(U)$ et $s = \deg(V)$ et on suppose que r et s sont non nuls.

2.2.1 Montrer que $U = X^r u \left(\frac{1}{X} \right)$ et $V(X) = X^s v \left(\frac{1}{X} \right)$.

2.2.2 On note alors $U = 1 + u_1 X + \dots + u_{r-1} X^{r-1} + X^r$ et $V = 1 + v_1 X + \dots + v_{s-1} X^{s-1} + X^s$ avec $r \leq s$ (quitte à échanger les rôles de U et V).

2.2.3 Montrer que $\forall k \in \llbracket 1; r \rrbracket, u_k v_k = 0$.

2.2.4 En déduire que $\forall k \in \llbracket 1; r \rrbracket, u_k \in \{0, 1\}$ et $v_k \in \{0, 1\}$.

2.2.5 Conclure. Indication : montrer d'abord que tous les coefficients de V sont à valeurs dans $\{0, 1\}$.

PARTIE 3 : VARIABLES BORNÉES

3.1 On suppose que X est constante égale à $a \in \mathbb{R}$. Montrer que X est infiniment divisible.

Pour la suite de cette partie, X est une variable aléatoire bornée infiniment divisible définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $M = \sup_{\Omega} |X|$, de sorte que $|X(\omega)| \leq M$ pour tout $\omega \in \Omega$.

3.2 Constance : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi, et telles que $X_1 + \dots + X_n$ ait même loi que X .

3.2.1 Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, montrer que $X_i \leq \frac{M}{n}$ presque sûrement, puis $|X_i| \leq \frac{M}{n}$ presque sûrement.

3.2.2 En déduire que $V(X) \leq \frac{M^2}{n}$ où $V(X)$ désigne la variance de X .

3.2.3 Conclure que X est presque sûrement constante.

PARTIE 4 : BINOMIALES ET POISSON

4.1 Une variable aléatoire suivant une loi binomiale est-elle infiniment divisible ?

4.2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de POISSON de paramètres respectifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi de POISSON de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

4.3 Soit X une variable aléatoire de loi de POISSON. Montrer que X est infiniment divisible.

4.4 Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et soit $X_1, \dots, X_r$ des variables aléatoires suivant des lois de POISSON indépendantes. Montrer que $\sum_{i=1}^r iX_i$ est une variable aléatoire infiniment divisible.

PARTIE 5 : SÉRIE DE VARIABLES ENTIÈRES

5.1 Inégalité : Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

5.1.1 Montrer que si A et B sont des événements de $\mathcal{A}$, et si $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont leurs événements contraires respectifs, alors $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$.

5.1.2 En déduire que, pour tout $t \in [-1; 1]$, $|G_X(t) - G_Y(t)| \leq 2\mathbb{P}(X \neq Y)$.

5.2 Convergence : Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(U_i \neq 0)$ converge.

5.2.1 Soit $Z_n = \left\{ \omega \in \Omega \mid \exists i \geq n, U_i(\omega) \neq 0 \right\}$. Montrer que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n) = 0$.

5.2.2 En déduire que l'ensemble $\left\{ i \in \mathbb{N}^* \mid U_i \neq 0 \right\}$ est presque sûrement fini.

5.2.3 On pose $S_n = \sum_{i=1}^n U_i$ et $S = \sum_{i=1}^{+\infty} U_i$. Justifier que S est définie presque sûrement. Montrer que $(G_{S_n})_{n \geq 1}$ converge uniformément vers G_S sur $[-1; 1]$.

5.3 POISSON : Soit $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs ou nuls. On suppose que la série $\sum_{i \geq 1} \lambda_i$ est convergente,

et on note $\lambda = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i$. Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout i , X_i suit la loi de POISSON de paramètre λ_i . On convient que, si $\lambda_i = 0$, X_i est la variable aléatoire nulle.

5.3.1 Montrer que la série $\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(X_i \neq 0)$ est convergente.

5.3.2 Montrer que la série $\sum_{i \geq 1} X_i$ est presque sûrement convergente et que sa somme (définie presque sûrement) suit une loi de POISSON de paramètre λ .

5.3.3 Montrer que la série $\sum_{i \geq 1} iX_i$ est presque sûrement convergente et que sa somme $X = \sum_{i=1}^{+\infty} iX_i$ définit une variable aléatoire infiniment divisible.

PARTIE 6 : SÉRIE ENTIÈRE AUXILIAIRE

Dans cette partie, X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$.

6.1 Montrer qu'il existe une unique suite réelle $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ telle que, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{j=1}^k j\lambda_j \mathbb{P}(X = k - j)$.

6.2 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$|\lambda_k| \mathbb{P}(X = 0) \leq \mathbb{P}(X = k) + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j| \mathbb{P}(X = k - j) \leq (1 - \mathbb{P}(X = 0)) \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j| \right).$$

6.3 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $1 + \sum_{j=1}^k |\lambda_j| \leq \frac{1}{\mathbb{P}(X = 0)^k}$.

6.4 Montrer que la série entière $\sum_{k \geq 1} \lambda_k t^k$ a un rayon de convergence $\rho(X)$ supérieur ou égal à $\mathbb{P}(X = 0)$.

Pour tout réel $t \in]-\rho(X); \rho(X)[$, on pose

$$H_X(t) = \ln(\mathbb{P}(X = 0)) + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k t^k.$$

À toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$, on associe ainsi une série entière H_X (abus de notation usuel entre une série entière et sa fonction somme).

Dans la suite du problème, H_X sera appelée série entière auxiliaire de X .

6.5 Pour $t \in]-\rho(X); \rho(X)[$, montrer $G'_X(t) = H'_X(t)G_X(t)$, puis $G_X(t) = \exp(H_X(t))$.

6.6 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur l'espace Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}$, et soit H_X et H_Y leurs séries entières auxiliaires. Montrer $\forall t \in \mathbb{R}, |t| < \min(\rho(X), \rho(Y)) \implies H_{X+Y}(t) = H_X(t) + H_Y(t)$.

PARTIE 7 : VARIABLES ENTIÈRES λ -POSITIVES

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$, et soit H_X sa série entière auxiliaire :

$$H_X(t) = \ln(\mathbb{P}(X = 0)) + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k t^k$$

pour $t \in]-\rho(X); \rho(X)[$. On suppose que X est λ -positive : c'est-à-dire que $\lambda_k \geq 0$ pour tout $k \geq 1$.

7.1 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\lambda_k \leq \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X = 0)}$. En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \lambda_k$ converge.

7.2 Montrer que, pour tout $t \in [-1; 1]$, $G_X(t) = \exp(H_X(t))$ et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k = -\ln(\mathbb{P}(X = 0))$.

7.3 Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ la suite de variables aléatoires définie au 5.3. Montrer que $X \sim \sum_{i=1}^{+\infty} iX_i$.

PARTIE 8 : CARACTÉRISATION

Le but de cette partie, pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que $\mathbb{P}(X > 0) > 0$, est de montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :

(i) X est infiniment divisible.

(ii) X est λ -positive.

(iii) Il existe une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables indépendantes de POISSON (comme au 5.3) telle que $X \sim \sum_{i=1}^{+\infty} iX_i$.

8.1 Première implication : soit ici X une variable aléatoire infiniment divisible à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par définition, il existe des variables aléatoires indépendantes $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ de même loi telles que $X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$ suive la loi de X . Soit H_X la série entière auxiliaire de X comme définie en partie 6 et soit $\rho(X)$ son rayon de convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n la série entière auxiliaire de $X_{n,1}$ (au lieu de $H_{X_{n,1}}$).

8.1.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $X_{n,1}$ est presque sûrement positive ou nulle.

8.1.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbb{P}(X_{n,1} = 0) > 0$.

8.1.3 Montrer que les variables aléatoires $X_{n,i}$ sont presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}$.

8.1.4 Montrer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_{n,1} = 0) = 1$.

8.1.5 En déduire que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_{n,1} = i) = 0$.

8.1.6 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $nH_n = H_X$.

8.1.7 En déduire, pour tous n et k dans $\mathbb{N}^*$, que $kn \mathbb{P}(X_{n,1} = k) = \sum_{j=1}^k j \lambda_j \mathbb{P}(X_{n,1} = k - j)$.

8.1.8 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que la suite $(n \mathbb{P}(X_{n,1} = k))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers λ_k .

En déduire que X est λ -positive.

8.2 Conclusion :

8.2.1 Montrer le résultat annoncé au début de cette partie.

8.2.2 Comment adapter ce résultat aux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$?

8.2.3 Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, où $p \in]0; 1[$, c'est-à-dire que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$. La variable aléatoire X est-elle infiniment divisible ?