

DS 6.1 : extrait de X-ENS 2022 MP Maths B

PSI 1 2025/2026

samedi 07 mars 2026

On appelle fonction cotangente la fonction $\cotan : \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \cotan(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}.$$

Pour tout entier $k \geq 2$, on rappelle la définition de $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$.

PARTIE 1 : DÉVELOPPEMENT EULÉRIEN

Soit les fonctions f, g et D définies sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ par

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad f(x) &= \pi \cotan(\pi x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}, \\ g(x) &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) \text{ et} \\ D(x) &= f(x) - g(x). \end{aligned}$$

1.1 Propriétés

1.1.1 Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, justifier que la série définissant $g(x)$ est convergente.

1.1.2 Montrer que les fonctions g et D sont impaires.

1.1.3 Montrer que les fonctions g et D sont périodiques de période 1.

1.1.4 Montrer que les fonctions g et D sont continues sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

1.2 Équations fonctionnelles

1.2.1 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2f(x).$$

1.2.2 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{1+x}{2}\right) = 2g(x).$$

1.3 Le développement

1.3.1 Montrer que la fonction D se prolonge par continuité en une fonction $\tilde{D} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tilde{D}(0) = 0$.

1.3.2 Justifier l'existence de $\alpha \in [0; 1]$ tel que $\tilde{D}(\alpha) = M$ où $M = \sup_{t \in [0; 1]} \tilde{D}(t)$.

1.3.3 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\tilde{D}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = M$.

1.3.4 En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \pi x \cotan(\pi x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 - n^2}.$$

PARTIE 2 : BERNOULLI ET EULER

On rappelle que pour une famille $(a_{i,j})_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ de réels positifs, on a la formule de FUBINI

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_{i,j} \right) \in [0; +\infty].$$

2.1 Développement en série entière

2.1.1 Montrer que, si $x \in]-2\pi; 2\pi[$, la famille $\left(\left(\frac{x}{2\pi n} \right)^{2k} \right)_{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

2.1.2 Montrer que

$$\forall x \in]-2\pi; 2\pi[\setminus \{0\}, \quad \frac{x}{2} \cotan \left(\frac{x}{2} \right) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1} \pi^{2k}} x^{2k}.$$

2.1.3 En déduire que

$$\forall x \in]-2\pi; 2\pi[\setminus \{0\}, \quad \frac{ix}{e^{ix} - 1} = 1 - \frac{ix}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k) x^{2k}}{2^{2k-1} \pi^{2k}}.$$

Soit la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

2.1.4 Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 2\pi$, on a

$$z = (e^z - 1) \times \left(1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \zeta(2k)}{2^{2k-1} \pi^{2k}} z^{2k} \right).$$

2.2 Calcul des valeurs de ζ en les nombres pairs en fonction des nombres de BERNOULLI

2.2.1 Montrer que la fonction h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$h^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{\pi^{2n} 2^{2n-1}} \zeta(2n).$$

On définit la suite des nombres de BERNOULLI $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $b_0 = 1, \quad b_1 = -\frac{1}{2}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_{2n+1} = 0 \quad \text{et} \quad b_{2n} = \frac{(-1)^{n-1} (2n)! \zeta(2n)}{2^{2n-1} \pi^{2n}}.$$

2.2.2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!(n+1-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

2.2.3 Calculer b_2, b_4 et b_6 et en déduire $\zeta(2), \zeta(4)$ et $\zeta(6)$.

2.3 Que vaut le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$?

DS 6.2 : extrait de X-ENS 2018 PC

PSI 1 2025/2026

samedi 07 mars 2026

Ce sujet s'intéresse aux matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à -1 , et en particulier à la différence maximale entre le nombre de 1 et le nombre de -1 que l'on peut obtenir, si l'on autorise à multiplier certaines lignes et colonnes d'une telle matrice par -1 .

La partie 1 s'intéresse à quelques cas particuliers.

La partie 2 montre que pour certaines matrices, cette différence maximale est beaucoup plus petite que n^2 .

La partie 3 propose au contraire un minorant à cette différence maximale.

Notations :

On identifiera l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ à l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à n coordonnées.

En particulier, l'espace vectoriel des nombres réels est identifié à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

On étend les notations précédentes aux parties de $\mathbb{R}$: si K est une partie de $\mathbb{R}$, on notera par exemple $\mathcal{M}_{n,k}(K)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ constitué des matrices dont les coefficients sont à valeurs dans K .

Le sujet s'intéresse tout particulièrement à $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$, l'ensemble des matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à -1 .

Si $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$, on notera :

$$S(A) = \{X^T A Y \mid (X, Y) \in (\{-1, 1\}^n)^2\} \quad \text{et} \quad M(A) = \max(S(A)).$$

Pour $n \geq 1$, on notera également

$$\underline{M}(n) = \min(\{M(A) \mid A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})\}).$$

Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires intervenant dans les parties 2 et 3.

On admettra que toutes les variables aléatoires introduites peuvent être construites sur cet espace.

PARTIE 1 : CAS PARTICULIERS

- 1.1** Quel est le cardinal de $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$? Cet ensemble est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- 1.2** Montrer que pour toute matrice A dans $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$, l'ensemble $S(A)$ est inclus dans $\{-n^2, \dots, n^2\}$. Montrer que l'inclusion est stricte, et montrer que $S(A)$ est un ensemble symétrique par rapport à 0.
- 1.3** Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$. On suppose qu'il existe des matrices diagonales C et D ne contenant que des 1 et des -1 sur la diagonale, telles que $B = CAD$. Montrer que $S(A) = S(B)$.
- 1.4** Dans cette question, on suppose que $n = 2$ et on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer $S(I)$ et $S(J)$, et en déduire la valeur de $S(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\{-1, 1\})$.
- 1.5** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :
- (i) $n^2 \in S(A)$.
 - (ii) Il existe X et Y dans $\{-1, 1\}^n$ tels que $A = XY^T$.
 - (iii) A est de rang 1.
- 1.6** En déduire la proportion, parmi les matrices de $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$, des matrices A qui vérifient $n^2 \in S(A)$.

PARTIE 2 : MAJORATION

Soit k un entier strictement positif et $U_1, \dots, U_k$ une suite de k variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$, mutuellement indépendantes et de loi uniforme. On note également $S_k = \sum_{i=1}^k U_i$.

2.1 Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(\lambda) = \ln(\mathbb{E}[e^{\lambda U_1}])$. Établir que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda) \leq \frac{\lambda^2}{2}$.

2.2 Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a l'inégalité $\mathbb{P}(S_k \geq t) \leq \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t)$.

2.3 En déduire l'inégalité de Hoeffding pour S_k : pour tout $t > 0$, on a $\mathbb{P}(S_k \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right)$.

On introduit maintenant une variable aléatoire uniforme $C : \Omega \mapsto \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$.

Pour $\omega \in \Omega$, on note $C_{i,j}(\omega)$ le coefficient en case (i, j) de la matrice $C(\omega)$.

2.4 Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs quelconques dans $\{-1, 1\}^n$.

Montrer que $(x_i y_j C_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une famille de n^2 variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{-1, 1\}$, mutuellement indépendantes et de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

2.5 Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $\mathbb{P}(M(C) \geq t n^{3/2}) \leq \exp\left(-\left(\frac{t^2}{2} - 2 \ln 2\right)n\right)$.

2.6 Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\underline{M}(n) \leq 2\sqrt{\ln 2} n^{3/2}$. Indication : on pourra commencer par montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ telle que $M(A) < (2\sqrt{\ln 2} + \varepsilon)n^{3/2}$.

PARTIE 3 : MINORATION

Dans cette partie, on établit un minorant non trivial pour $\underline{M}(n)$. Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{-1, 1\}^n$, on note $g_A(Y) = \max(\{X^T A Y \mid X \in \{-1, 1\}^n\})$.

Soit aussi une variable aléatoire uniforme $Z : \Omega \rightarrow \{-1, 1\}^n$. Si $\omega \in \Omega$, on note $Z(\omega) = (Z_1(\omega), \dots, Z_n(\omega))$.

3.1 Avec les notations ci-dessus, montrer que $g_A(Y)$ peut se réécrire $g_A(Y) = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j \right|$.

3.2 Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j} Z_j\right|\right] = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n - 2k|$.

En déduire que $\mathbb{E}[g_A(Z)] = \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n - 2k|$.

3.3 Simplification de $\mathbb{E}[g_A(Z)]$

3.3.1 Montrer que pour $m \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $\sum_{k=0}^m (n - 2k) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{m}$.

3.3.2 En déduire que pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$, on a $\mathbb{E}[g_A(Z)] = \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

3.4 Minoration de $\underline{M}(n)$

3.4.1 Montrer que $\underline{M}(n) \geq \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

3.4.2 Montrer ensuite, à l'aide de la formule de STIRLING, que ce minorant est équivalent à $C n^\alpha$ en $+\infty$, pour des constantes C et $\alpha > 0$ que l'on explicitera. Comparer au majorant de $\underline{M}(n)$ obtenu à la 2.6.