

DM 10 : RAYON SPECTRAL

PSI 1 2025/2026

pour le vendredi 13 mars 2026

PARTIE 1 : UN EXEMPLE

- 1** On calcule $\chi_A = (X-1)(2X-1)^2$ et, avec CAYLEY-HAMILTON, $(X-1)(2X-1)^2$ est annulateur de A .
- 2** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $X^n = \chi_A Q_n + a_n X^2 + b_n X + c_n$ la division euclidienne de X^n par P . En évaluant en 1 et $\frac{1}{2}$, on a $1 = a_n + b_n + c_n$ et $2^{-n} = \frac{a_n}{4} + \frac{b_n}{2} + c_n$. On dérive pour avoir $nX^{n-1} = \chi'_A Q_n + \chi_A Q'_n + 2a_n X + b_n$ et, en évaluant en $\frac{1}{2}$, on obtient la troisième équation $n2^{1-n} = a_n + b_n$. On obtient $a_n = 4 - (n+1)2^{2-n}$, $b_n = 2^{2-n} - 4 + 6n2^{-n}$ et $c_n = 1 - n2^{1-n}$. Ainsi, $A^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1-2n & 2n & 0 \\ -2n & 2n+1 & 0 \\ -2n & 2n+1-2^n & 2^n \end{pmatrix}$ pour $n \geq 1$ (cette expression n'est pas du tout nécessaire pour calculer la limite) ou plutôt, en fonction de A^2 , A et I_3 , on a $A^n = (4 - (n+1)2^{2-n}) A^2 + (2^{2-n} - 4 + 6n2^{-n}) A + (1 - n2^{1-n}) I_3$, pour $n \geq 1$.

- 3** On déduit de la question précédente que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 4A^2 - 4A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = M$.

L'endomorphisme m associé est un projecteur de rang 1 car $M^2 = M$: c'est la projection sur la droite $D = \text{Vect}((0,0,1))$ parallèlement au plan $P = \text{Vect}((1,0,0), (0,1,1))$.

- 4** D'après la question 1, $\text{Sp}(A) = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$ donc $\rho(A) = 1$.

PARTIE 2 : RAYON SPECTRAL COMME LIMITE

- 1** ψ est une norme (vu en cours). On peut aussi dire que ψ est la norme N_∞ sur $\mathbb{C}^{n^2}$ en identifiant une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à un vecteur de $\mathbb{C}^{n^2}$. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\psi(A) = 1$ et $\psi(A^2) = 2$ donc $\psi(A)^2 < \psi(A^2)$ donc ψ est une norme mais pas une norme matricielle.

- 2.1** θ est linéaire en dimension finie donc lipschitzienne d'après le cours et il existe une constante C_A telle que θ soit C_A -lipschitzienne, $N(AX) \leq C_A N(X)$.

- 2.2** L'ensemble $\left\{ \frac{N(AX)}{N(X)} \mid X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ car $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \neq \emptyset$ et il est majoré par C_A d'après la question précédente donc $\tilde{N}(A)$ existe.

- 3.1** Si $\tilde{N}(A) = 0$ alors $N(AX) = 0$ pour tout $X \neq 0$ donc $AX = 0$ car N est une norme et on a donc $AX = 0$ pour tout X , même pour $X = 0$. Ainsi, $A = 0$. La réciproque est évidente. Par conséquent, $\tilde{N}(A) = 0 \iff A = 0_n$.

3.2 Pour $X \neq 0$, $\frac{N(\lambda AX)}{N(X)} = |\lambda| \frac{N(AX)}{N(X)} \leq |\lambda| \tilde{N}(A)$ donc $\tilde{N}(\lambda A) = \sup \left\{ \frac{N(\lambda AX)}{N(X)} \mid X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\} \leq |\lambda| \tilde{N}(A).$

3.3 On en déduit, pour $\lambda \neq 0$, que $\tilde{N}(A) = \tilde{N} \left(\frac{1}{\lambda} (\lambda A) \right) \leq \frac{1}{|\lambda|} \tilde{N}(\lambda A)$ et, avec la question précédente, on en déduit que $\tilde{N}(\lambda A) = |\lambda| \tilde{N}(A)$ (valable aussi si $\lambda = 0$).

3.4 Pour $X \neq 0$, on a $\frac{N((A+B)X)}{N(X)} \leq \frac{N(AX) + N(BX)}{N(X)} \leq \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B)$ par l'inégalité triangulaire vérifiée par N donc $\tilde{N}(A+B) = \sup \left\{ \frac{N((A+B)X)}{N(X)} \mid X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\} \leq \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B).$

3.5 Si $X \neq 0$, par définition de $\tilde{N}$, on a $\frac{N(AX)}{N(X)} \leq \tilde{N}(A)$ donc $N(AX) \leq \tilde{N}(A)N(X)$ (valable aussi si $X = 0$).

3.6 On vient de prouver que l'application $\tilde{N}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, reste à vérifier qu'elle est matricielle. Pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, on a $N(ABX) \leq \tilde{N}(A)N(BX) \leq \tilde{N}(A)\tilde{N}(B)N(X)$ donc $\tilde{N}(AB) \leq \tilde{N}(A)\tilde{N}(B)$, ce qui justifie bien que $\tilde{N}$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

4.1 $|(AX)_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \right| \leq N_\infty(X) \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq M_A N_\infty(X)$ donc $N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X).$

4.2 Y est choisi de sorte que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $|y_i| = 1$ et $a_{i_0 j} y_j = |a_{i_0 j}|$, on a alors $N_\infty(Y) = 1$ et, la coordonnée d'indice i_0 de AY est $(AY)_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} y_j = M_A$ donc $N_\infty(AY) \geq M_A N_\infty(Y) = M_A$ ce qui donne, avec l'inégalité inverse prouvée à la question précédente, $\widetilde{N}_\infty(A) = M_A.$

5 Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ alors il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. On en déduit que $|\lambda|N(X) = N(AX) \leq \tilde{N}(A)N(X)$ donc, comme $X \neq 0$, on a $|\lambda| \leq \tilde{N}(A)$. Ceci étant valable pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$, on a $\rho(A) = |\lambda| \leq \tilde{N}(A).$

6 Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$, il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$ donc $A^k X = \lambda^k X$ et $\lambda^k \in \text{Sp}(A^k)$ puisque $X \neq 0$. On a donc $0 \leq \rho(A)^k \leq \rho(A^k) \leq \tilde{N}(A^k)$ donc si $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$, par encadrement, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \rho(A)^k = 0$ et $\rho(A) < 1.$

7.1 On vient de le faire à la question précédente.

7.2 Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$, on a alors $\alpha AX = \alpha \lambda X$ donc $\alpha \lambda \in \text{Sp}(\alpha A)$. De même, si $\alpha \neq 0$ et $\lambda \in \text{Sp}(\alpha A)$, il existe $X \neq 0$ tel que $\alpha AX = \lambda X$ donc $AX = \frac{\lambda}{\alpha} X$ et $\frac{\lambda}{\alpha} \in \text{Sp}(A)$. On en déduit que $\text{Sp}(\alpha A) = \{\alpha \lambda \mid \lambda \in \text{Sp}(A)\}$ (ce qui est aussi vrai si $\alpha = 0$) et donc $\rho(\alpha A) = |\alpha| \rho(A).$

7.3 $\rho(A_\varepsilon) = \frac{\rho(A)}{\rho(A) + \varepsilon} < 1$ donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_\varepsilon^k = 0$ donc il existe un entier k_ε tel que $k \geq k_\varepsilon \implies \tilde{N} \left(\frac{A^k}{(\rho(A) + \varepsilon)^k} \right) \leq 1$ ce qui donne, par homogénéité, $\exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, (k \geq k_\varepsilon \implies \tilde{N}(A^k) \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k).$

7.4 On a donc pour tout $\varepsilon > 0$, $\rho(A) \leq [\tilde{N}(A^k)]^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$ pour tout entier $k \geq k_\varepsilon$ ce qui signifie, par définition de la limite, que $\lim_{k \rightarrow +\infty} [\tilde{N}(A^k)]^{1/k} = \rho(A).$

PARTIE 3 : CROISSANCE DU RAYON SPECTRAL

1 La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $A \geq 0$ et $A \neq 0$ mais pas $A > 0$.

2.1 Avec ces conditions, pour $\forall (i, j, k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^3$, $0 \leq a_{i,k} \leq b_{i,k}$ et $0 \leq a'_{k,j} \leq b'_{k,j}$ donc $0 \leq a_{i,k} a'_{k,j} \leq b_{i,k} b'_{k,j}$ puis $0 \leq \sum_{k=1}^n a_{i,k} a'_{k,j} \leq \sum_{k=1}^n b_{i,k} b'_{k,j}$ donc, $\text{si } 0 \leq A \leq B \text{ et } 0 \leq A' \leq B', \text{ on a bien } 0 \leq AA' \leq BB'$.

2.2 Si $0 \leq A = A^1 \leq B = B^1$ et si $0 \leq A^k \leq B^k$ pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$, alors $0 \leq A^{k+1} = A^k A \leq B^k B = B^{k+1}$ d'après la question précédente. Par principe de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq A^k \leq B^k \text{ si } 0 \leq A \leq B$.

2.3 Si $0 \leq A \leq B$, pour tout entier $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq \sum_{j=1}^n b_{i,j}$ donc, avec la question **4.2** de la partie **2**, on a la

majoration $\widetilde{N}_\infty(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n b_{i,j} = \widetilde{N}_\infty(B)$.

2.4 Si $0 \leq A \leq B$ alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq A^k \leq B^k$ d'après **2.2** donc $\widetilde{N}_\infty(A^k) \leq \widetilde{N}_\infty(B^k)$ puis, en passant à la puissance $1/k$, $\left[\widetilde{N}_\infty(A^k) \right]^{1/k} \leq \left[\widetilde{N}_\infty(B^k) \right]^{1/k}$ et, en passant à la limite, $\rho(A) \leq \rho(B) \text{ si } 0 \leq A \leq B$.

2.5 Si $A \neq 0$, il suffit de prendre $c = \max_{1 \leq i, j \leq n} \frac{a_{i,j}}{b_{i,j}}$ et, si $A = 0$, on prend $c = \frac{1}{2}$ et il existe bien $c \in]0; 1[$ tel que

$A \leq cB$. On a alors $\rho(A) \leq \rho(cB) = c\rho(B) < \rho(B)$ car $\rho(B) \neq 0$; en effet, comme $B > 0$, on a $\text{Tr}(B) > 0$

donc B possède une valeur propre non nulle car $\text{Tr}(B)$ est la somme des valeurs propres complexes de B .