

DM 11 : MINES 2006 PC MATHS2

PSI 1 2025/2026

pour vous

L'objectif de ce problème est de montrer que pour toutes familles de réels $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ satisfaisant $0 < a_1 \leq a_k \leq a_n$ et $0 < b_1 \leq b_k \leq b_n$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, alors

$$1 \leq \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2}{\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2} \leq \frac{(a_n b_n + a_1 b_1)^2}{4a_1 b_1 a_n b_n} \quad (R)$$

On désignera dans tout le problème par :

- $\mathcal{M}_{n,p}$ l'espace des matrices réelles à n lignes et p colonnes. On note $0_{n,p}$ la matrice nulle.
- $\mathcal{M}_n$, l'espace des matrices réelles carrées d'ordre n . On note 0_n la matrice nulle.
- M^T la transposée d'une matrice M .
- $\mathcal{S}_n$, le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n$ constitué des matrices symétriques d'ordre n .
- I_n la matrice identité d'ordre n .
- $(X|Y)$ le produit scalaire de deux matrices colonnes.

On rappelle que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}$ et tout couple de matrices colonnes (X, Y) où $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}$, l'identité suivante est satisfaite : $(AX|Y) = (X|A^T Y)$.

Définition 1 Une matrice A de $\mathcal{S}_n$ est dite positive lorsque pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, $(AX|X) \geq 0$. Une matrice A est dite définie positive lorsque pour tout $X \neq 0$ de $\mathcal{M}_{n,1}$, on a $(AX|X) > 0$.

PARTIE 1 : PRÉLIMINAIRES

Dans cette partie, A est un élément de $\mathcal{S}_n$.

- 1 Montrer que A est positive si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes positives.
- 2 Montrer que A est définie positive si et seulement si A est positive et inversible.
- 3 Si A est définie positive, montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive C telle que $C^2 = A$.
- 4 Si A et C sont symétriques définies positives et $C^2 = A$, montrer que, pour toute valeur propre de A , on a

$$\text{Ker}(A - \lambda I_n) = \text{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_n).$$

- 5 En déduire que si A est définie positive, il existe une unique matrice symétrique définie positive C telle que $C^2 = A$ et que dans toute base de vecteurs propres de A , C est diagonale.

On notera désormais $C = A^{1/2}$.

- 6 On suppose A définie positive. Montrer qu'il existe une unique matrice, notée $A^{-1/2}$, symétrique définie positive telle que $A^{-1/2} A^{-1/2} = A^{-1}$.
- 7 Prouver que $(A^{1/2})^{-1} = A^{-1/2}$.
- 8 Soit B une matrice symétrique positive qui commute avec A . Est-ce que $A^{1/2}$ et $B^{1/2}$ commutent ?

PARTIE 2 : INÉGALITÉ DE KANTOROVITCH

Dans cette partie, A est une matrice fixée de S_n , définie positive. On range les valeurs propres de A , répétées suivant leur multiplicité, dans l'ordre croissant : $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. On note m et M deux réels strictement positifs tels que $m \leq \lambda_1$ et $\lambda_n \leq M$.

Soit F la fonction polynomiale qui à tout s de $\mathbb{R}$ associe $F(s) = s^2 - (m + M)s + mM$.

Pour tout élément X de $\mathcal{M}_{n,1}$, on considère l'application polynomiale f_X de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_X(s) = (AX|X).s^2 - (m + M)(X|X).s + (A^{-1}X|X)mM.$$

- 9** Pour tout élément $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, montrer que l'on a $(X|X)^2 \leq (AX|X)(A^{-1}X|X)$.
- 10** Quelles sont les matrices pour lesquelles cette inégalité est une égalité pour tout X de $\mathcal{M}_{n,1}$?
- 11** Quelles sont, en fonction de celles de A , les valeurs propres de la matrice $F(A)$?
- 12** Montrer que toutes les valeurs propres de $F(A)$ sont de même signe. Préciser ce signe.
- 13** Montrer que $N = -(A - (m + M)I_n + mMA^{-1})$ est symétrique positive.
- 14** Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, calculer $f_X(0)$ et $f_X(1)$ et montrer que $f_X(0)f_X(1) \leq 0$.
- 15** Établir que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, on a

$$(AX|X)(A^{-1}X|X) \leq \frac{(m + M)^2}{4mM}(X|X)^2 \quad (I).$$

- 16** Soit $\mathcal{D} = \{(m, M) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < m \leq \lambda_1 \leq \lambda_n \leq M\}$. Établir que $\inf_{\mathcal{D}} \left(\frac{(m + M)^2}{mM} \right) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{\lambda_1 \lambda_n}$.
- 17** On suppose que A n'est pas une homothétie. On considère X_1 (respectivement X_n) un vecteur colonne propre, de norme 1, pour la valeur propre λ_1 (respectivement λ_n). On pose $X = X_1 + X_n$. Calculer $\frac{(AX|X)(A^{-1}X|X)}{(X|X)}$.
- 18** Que peut-on en déduire sur l'inégalité (I) ?

PARTIE 3 : INÉGALITÉ DE PÓLYA-SZEGÖ

On suppose dorénavant que A_1 et A_2 sont deux matrices symétriques, définies positives qui commutent. On note m_i (respectivement M_i), la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de A_i , pour $i = 1$ et $i = 2$. On pose $D = A_1 A_2^{-1}$.

- 19** Déterminer un réel α tel que pour tout élément X de $\mathcal{M}_{n,1}$, on ait $(DX|X)(D^{-1}X|X) \leq \alpha(X|X)^2$.
- 20** Exprimer $(D(A_1 A_2)^{1/2} X | (A_1 A_2)^{1/2} X)$ en fonction de $A_1 X$, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}$.
- 21** Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, on a l'inégalité $(A_1 X | A_1 X)(A_2 X | A_2 X) \leq \alpha(A_1 X | A_2 X)^2$.
- 22** Établir la relation (R).