

DEVOIR 22 : ISOMÉTRIES

PSI 1 2025-2026

mardi 10 mars 2026

QCM

- 1 Isométries vectorielles : soit E un espace euclidien, $u \in GL(E)$, F un sous-espace de E , s_F la symétrie orthogonale par rapport à F et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E

1.1 F stable par $u \iff F^\perp$ stable par u

1.3 s_F transforme $\mathcal{B}$ en une bon

1.2 $u \circ s_F \in O(E) \iff u \in O(E)$

1.4 u transforme $\mathcal{B}$ en une bon

- 2 Matrice orthogonale : soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 2$, u un endomorphisme de E , $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$

2.1 $A \in O(n) \iff A^T A = I_n$

2.3 $u \in O(E) \iff A \in O(n)$

2.2 $A \in O(n) \iff \det(A) = \pm 1$

2.4 Si $\mathcal{B}$ bon, $u \in SO(E) \iff A \in SO(n)$

- 3 Valeurs propres des matrices orthogonales : soit $n \geq 2$, $A \in O(n)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A

3.1 Si λ est réel, $\lambda = \pm 1$

3.3 Si n pair et $\det(A) = 1$ alors $1 \in \text{Sp}(A)$

3.2 Si $A^T = -A$, alors $\lambda = \pm i$

3.4 Si n est impair et $\det(A) = -1$ alors $-1 \in \text{Sp}(A)$

- 4 Produit vectoriel : soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, a, b, c trois vecteurs de E

4.1 $[a, b, c] = (c|a \wedge b)$

4.3 $\|a\|^2\|b\|^2 + \|a \wedge b\|^2 = (a|b)^2$

4.2 $[a - b, b - c, c - a] = 2(a|b|c)$

4.4 $a \wedge (b \wedge c) = (a|c)b - (a|b)c$

Énoncé

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E , énoncer trois assertions équivalentes à $u \in O(E)$.

Preuve

Soit E euclidien et s est une symétrie de E , montrer que : $(s \text{ est orthogonale}) \iff (s \in O(E))$.

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté canonique, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Montrer que } A \text{ est orthogonale et caractériser géométriquement } u.$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne unitaire (pour le produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) " = " $\mathbb{R}^n$. On pose $A = I_n - 2VV^T$.

a. Montrer que A est une matrice orthogonale, c'est-à-dire que $A \in O(n)$.

b. Montrer que $AV = -V$ et calculer AX si $X \perp V$. Quel est l'endomorphisme u canoniquement associé à A .

c. Calculer la matrice dans la base canonique de la réflexion par rapport au plan P d'équation $P : x+2y+2z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique.

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

$i \cdot j$	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

i · j	1	2	3	4	Fautes
1		X	X		
2	X			X	
3	X	X		X	
4	X			X	

1.1 Faux : c'est vrai si $u \in O(E)$ mais pas en général **1.2** Vrai : $O(E)$ est stable par composée et $s_F^2 = \text{id}_E$

1.3 Vrai : $s_F \in O(E)$ **1.4** Faux : u transforme juste $\mathcal{B}$ en une base de E .

2.1 Vrai : définition **2.2** Faux : $A = \text{diag}(2, 1/2, 1, \dots, 1)$ **2.3** Faux : $\mathcal{B}$ n'est pas supposée orthonormée

2.4 Vrai : cours et $\det(u) = \det(A)$.

3.1 Vrai : car $|\lambda| = 1$ **3.2** Vrai : $A^T A = I_2 = -A^2$ donc $X^2 + 1$ annule A **3.3** Faux : une rotation d'angle π (demi-tour) dans le plan par exemple **3.4** Vrai : $\det(A + I_3) = \det(A + A A^T)$ ce qui donne $\det(A + I_3) = \det(A) \det(I_3 + A^T) = -\det(A + I_3)$ donc $\det(A + I_3) = 0$.

4.1 Vrai : car $[a, b, c] = [c, a, b] = (c|a \wedge b)$ **4.2** Faux : $[a - b, b - c, c - a] = 0$ car $a - b + b - c + c - a = 0$ (ces trois vecteurs sont dépendants) **4.3** Faux : la relation de LAGRANGE est $(a|b)^2 + \|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2$

4.4 Vrai : formule BAC-CAB.

Énoncé

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E , les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est une isométrie vectorielle.
- (ii) u conserve le produit scalaire : $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
- (iii) u transforme toute base orthonormale de E en une base orthonormale de E .
- (iv) u transforme une base orthonormale de E en une base orthonormale de E .

Preuve

Soit F et G les sous-espaces tels que $E = F \oplus G$ et $s = s_{F,G}$.

($\implies$) Si s orthogonale, $G = F^\perp$. Si $x \in E$, il existe deux vecteurs $y \in F$ et $z \in F^\perp$ tels que $x = y + z$, on calcule ensuite : $\|s(x)\|^2 = \|y - z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|y + z\|^2 = \|x\|^2$. Alors $s \in O(E)$.

($\impliedby$) Si $(y, z) \in F \times G : (s(y)|s(z)) = (y|z)$ mais on a aussi $(s(y)|s(z)) = (y| -z) = -(y|z)$. Ainsi $(y|z) = 0$ donc $F \perp G$. On conclut avec les dimensions que $G = F^\perp$ donc que s est orthogonale.

Exercice 1

On vérifie que les vecteurs colonnes de cette matrice forment une B.O.N. de $\mathbb{R}^3$ (en identifiant

$\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) car $1+4+4=9$ (vecteurs normés) et $-4+2+2=2-4+2=2+2-4=0$ (vecteurs orthogonaux deux à deux). On peut aussi calculer $A^T A$ pour obtenir $A^T A = I_3$. Toujours est-il que $A \in O(3)$!

Comme la base canonique est orthonormale, il vient $u \in O(\mathbb{R}^3)$. De plus A symétrique donc $A^2 = I_3$ et u est donc une symétrie, donc une symétrie orthogonale car elle est aussi une isométrie vectorielle.

$$A - I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ donc } P = \text{Ker}(u - \text{id}_E) \text{ est le plan d'équation } x - 2y + z = 0 \text{ et on sait qu'alors}$$

$D = \text{Ker}(u + \text{id}_E) = P^\perp$ est la droite engendrée par $n = (1, -2, 1)$. u est donc la réflexion de plan P .

Exercice 2

a. $A^T A = (I_n - 2VV^T)^T(I_n - 2VV^T) = (I_n - 2VV^T)^2$ car $I_n - 2VV^T$ est symétrique. Comme

I_n et VV^T commutent, on a $A^T A = I_n - 4VV^T + 4VV^T VV^T$. Or $V^T V = (\|V\|^2) = (1) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc $A^T A = I_n - 4VV^T + 4VV^T = I_n$ et $A \in O(n)$.

b. $AV = V - 2VV^T V = V - 2V = -V$ car $V^T V = (1)$ et, si $X \perp V$, on a $(V|X) = V^T X = 0$ donc $AX = X - 2VV^T X = X$. L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ transforme le vecteur v (associé à V) en $-v$ donc envoie les vecteurs de la droite $D = \text{Vect}(v)$ sur l'opposé d'eux-mêmes et u envoie les vecteurs de l'hyperplan $H = (\text{Vect}(v))^\perp$ sur eux-mêmes.

c. $P : x + 2y + 2z = 0$ est l'hyperplan $P = (\text{Vect}(v))^\perp$ avec $v = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$ unitaire. D'après **b.**, la matrice dans la

$$\text{base canonique de } \mathbb{R}^3 \text{ de la réflexion de plan } P \text{ est } A = I_3 - 2VV^T = I_3 - \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$