

DEVOIR 23 : ISOMÉTRIES SYMÉTRIQUES

PSI 1 2025-2026

mardi 17 mars 2026

QCM

- 1 Endomorphisme symétrique : soit E un espace euclidien, $\mathcal{B}$ une base de E , u un endomorphisme de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$

1.1 A symétrique $\iff u$ symétrique

1.3 A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \iff u$ symétrique

1.2 A antisymétrique $\implies \forall x \in E, (u(x)|x) = 0$

1.4 A est orthogonale $\iff u$ est une isométrie

- 2 Endomorphisme symétrique : soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, u un endomorphisme symétrique de E et $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ la liste de ses valeurs propres

2.1 $\det(u) \geq 0 \iff \lambda_1 \geq 0$

2.3 $\forall x \in E, \lambda_1^2 \|x\|^2 \leq \|u(x)\|^2 \leq \lambda_n^2 \|x\|^2$

2.2 $\text{tr}(u) = 0 \implies \lambda_1 \lambda_n \leq 0$

2.4 $\forall x \in E, \lambda_1 \|x\|^2 \leq (u(x)|x) \leq \lambda_n \|x\|^2$

- 3 Endomorphisme symétrique : soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, u, v deux endomorphismes symétriques tels que $u \circ v = v \circ u$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$

3.1 $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$ avec $\text{Im}(u) \perp \text{Ker}(u)$

3.3 Si $(\lambda_1, \lambda_2) \in (\text{Sp}(u))^2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $E_{\lambda_1}(u) \perp E_{\lambda_2}(u)$

3.2 Si $\mathcal{B}$ est une base de E , A est symétrique

3.4 $u \circ v$ est un endomorphisme symétrique

- 4 Matrices symétriques positives : soit S et S' dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques réelles

4.1 $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T S X > 0$

4.3 $(S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ et } S' \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})) \implies S + S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

4.2 $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), S = M^T M$

4.4 $(S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \text{ et } S' \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})) \implies SS' \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

Énoncé

Rappeler le théorème spectral dans sa version matricielle.

Preuve

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique et si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , montrer que le sous-espace $F^\perp$ est aussi stable par u .

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté canonique, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$. On note (v_1, v_2, v_3) la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A . Montrer que A est orthogonale et caractériser géométriquement u .

Exercice 2

Soit la matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Trouver une matrice orthogonale $P \in O(4)$ et une matrice diagonale D telles que $A = P D^t P$.

DEVOIR 23	NOM :	PRÉNOM :
-----------	-------	----------

QCM Répondre dans le tableau ci-dessous au QCM : mettre une croix dans la case de la ligne i colonne j revient à déclarer la question i,j vraie. Ne rien mettre revient à la déclarer fausse.

i · j	1	2	3	4	Fautes
1					
2					
3					
4					

Énoncé

Preuve

Exercice 1

Exercice 2

i · j	1	2	3	4	Fautes
1	X	X		X	
2		X		X	
3	X		X	X	
4		X	X		

1.1 Vrai : cours car $\mathcal{B}$ bon **1.2** Vrai : $(u(x)|x) = (AX)^T X = X^T A^T X = -X^T A X = -(x|u(x))$ **1.3** Faux : seul le sens $\Leftarrow$ est vrai d'après le théorème spectral **1.4** Vrai : du cours.

2.1 Faux : le sens ($\Leftarrow$) est vrai car $\det(u) = \prod_{k=1}^n \lambda_k$ mais $\det(u) \geq 0$ veut juste dire qu'il y a un nombre pair de valeurs propres négatives **2.2** Vrai : $\lambda_1 \lambda_n > 0$ prouve que λ_1 et λ_n sont de même signe strictement et alors $\text{tr}(u) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ serait de ce signe strict et pas nul **2.3** Faux : si $x = \sum_{k=1}^n x_k v_k$ avec $u(v_k) = \lambda_k v_k$ et $(v_1, \dots, v_n)$ bon de E , alors $u(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k v_k$ et $\|u(x)\|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 x_k^2$ mais on ne peut pas classer les

carrés des valeurs propres (on ne connaît pas les signes) **2.4** Vrai : avec ces notations, $\lambda_1 \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_1 x_k^2 \leq$

$$(u(x)|x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \leq \sum_{k=1}^n \lambda_n x_k^2 = \lambda_n \|x\|^2.$$

3.1 Vrai : cours **3.2** Faux : $\mathcal{B}$ est quelconque (pas une bon) **3.3** Vrai : cours **3.4** Vrai : $(u \circ v(x)|y) = (v(x)|u(y)) = (x|v \circ u(y)) = (x|u \circ v(y))$.

4.1 Faux : pour $X = 0$, on a $X^T S X = 0$ **4.2** Vrai : cours, on peut même choisir $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ **4.3** Vrai : si $X \neq 0$, $X^T(S+S')X = X^T S X + X^T S' X > 0$ et $S+S'$ symétrique **4.4** Faux : SS' n'est symétrique que si $SS' = S'S$.

Énoncé

Soit un entier $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, alors il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in O(n)$ telles que $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

Preuve

Soit $x \in F^\perp$ et $y \in F$, comme u est symétrique : $(u(x)|y) = (x|u(y)) = 0$ car $u(y) \in F$ et $x \in F^\perp$.

Ceci est vrai pour tout vecteur y de F donc $u(x)$ est dans $F^\perp$. On vient de montrer que $F^\perp$ est stable par u .

Exercice 1

(v_1, v_2, v_3) est une bon : $\|v_1\|^2 = \|v_2\|^2 = \|v_3\|^2 = \frac{1}{81}(1+64+16) = \frac{1}{81}(16+16+49) = 1$ et

$81(v_1|v_2) = 81(v_1|v_3) = 81(v_2|v_3) = -4+32-28 = 8+8-16 = -32+4+28 = 0$. Comme la base canonique est aussi une bon, $A \in O(3)$. De plus : $\det(A) = \frac{1}{729}(16+16+7 \times 64 - 7 + 128 + 128) = 1$ donc $A \in SO(3)$.

$AX = X \iff -8x - 4y + 8z = 8x - 5y + z = -4x + 7y - 5z = 0 \iff y = z = 2x$ donc l'axe de la rotation est orienté par $k = (1, 2, 2)$. $\text{tr}(A) = 1$ donc l'angle θ de cette rotation vaut $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ (un quart de tour).

$$9[e_1, u(e_1), k] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} > 0, u \text{ est donc la rotation d'angle } \frac{\pi}{2} \text{ autour de l'axe orienté par } k = (1, 2, 2).$$

Exercice 2

A est symétrique donc orthosemblable à une matrice diagonale. Clairement $\text{rg}(A) = 2$ donc 0 est

valeur propre et $E_0(A) = \text{Ker}(A)$ est un plan ; $\text{Ker}(A) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+t = y+z = 0\} = \text{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, 0, 0, -1)$ et $v_2 = (0, 1, -1, 0)$. De plus, il est clair que $2 \in \text{Sp}(A)$ car $Av_3 = 2v_3$ si $v_3 = (1, 0, 0, 1)$.

Comme $\text{tr}(A) = 4$, $E_2(A)$ est un plan et $Av_4 = 2v_4$ avec $v_4 = (0, 1, 1, 0)$. Comme $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une

base orthogonale, on norme et $A = PD^t P$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in O(4)$.