

ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 13

ENDOMORPHISMES DES ESPACES EUCLIDIENS

13.1 Groupes orthogonaux

13.1 Soit E un espace euclidien et $f : E \rightarrow E$ une application.

Justifier l'équivalence : $\forall (x, y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = (x|y) \iff f \in O(E)$.

13.2 *Centrale PSI 2012* Soit $E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté canonique, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E . On pose

$S = \{(1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, 1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1), (-1, -1, -1)\} = \{-1, 1\}^3$. Soit $G = O_3(\mathbb{R}) \cap M_3(\mathbb{Z})$ l'ensemble formé par les matrices orthogonales 3×3 à coefficients entiers.

a. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, justifier : $(\lambda \in \mathbb{R} \text{ valeur propre de } u) \implies \lambda = \pm 1$. Qu'est u s'il est diagonalisable ?

b. Décrire géométriquement u si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, donner ses éléments caractéristiques.

c. Montrer que $(G, \times)$ est un sous-groupe de $O_3(\mathbb{R})$. Quel est son cardinal ?

d. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, montrer l'équivalence suivante :

A appartient à G si et seulement si S est invariant par u , c'est-à-dire $u(S) = S$.

Décrire géométriquement toutes les rotations canoniquement associées à des matrices de G .

13.2 Isométries du plan ou de l'espace

13.3 Reconnaître l'endomorphisme r canoniquement associé à $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

13.4 Reconnaître l'endomorphisme r canoniquement associé à $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

13.5 *Centrale* Montrer que si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in O(n) : n \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$. Quels sont les cas d'égalité ?

13.6 *Mines* Montrer que si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in O(n) : 0 \leq \left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$. Quels sont les cas d'égalité ?

13.7 *Centrale PSI 2012* Soit $E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté canonique, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E . On pose

$S = \{(1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, 1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1), (-1, -1, -1)\} = \{-1, 1\}^3$. Soit $G = O_3(\mathbb{R}) \cap M_3(\mathbb{Z})$ l'ensemble formé par les matrices orthogonales 3×3 à coefficients entiers.

a. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, justifier : $(\lambda \in \mathbb{R} \text{ valeur propre de } u) \implies \lambda = \pm 1$. Qu'est u s'il est diagonalisable ?

b. Décrire géométriquement u si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, donner ses éléments caractéristiques.

c. Montrer que $(G, \times)$ est un sous-groupe de $O_3(\mathbb{R})$. Quel est son cardinal ?

d. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, montrer l'équivalence suivante :

A appartient à G si et seulement si S est invariant par u , c'est-à-dire $u(S) = S$.

Décrire géométriquement toutes les rotations canoniquement associées à des matrices de G .

13.8 Soit $n \geq 2$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in O_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que $n \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.
- Décrire les matrices $A \in O_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| = n$. Combien en existe-t-il ?
- Comment appelle-t-on les matrices pour lesquelles $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| = n\sqrt{n}$?
- Montrer que $\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$.

13.9 *Centrale PSI 2013* Soit E un espace euclidien de dimension n , $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E , $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On suppose que : $\forall (x, y) \in E^2, (x|y) = 0 \implies (f(x)|f(y)) = 0$.

- Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall (x, y) \in E^2, (f(x)|f(y)) = \alpha(x|y)$. Indication : interpréter les coefficients de tAA comme des produits scalaires pour en déduire tout d'abord que tAA est diagonale.
- Caractériser l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

13.10 *Centrale PSI 2013* Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et deux familles $(u_1, \dots, u_p)$ et $(v_1, \dots, v_p)$ de vecteurs de E telles que $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2, (u_i|u_j) = (v_i|v_j)$.

- Montre que les familles $(u_1, \dots, u_p)$ et $(v_1, \dots, v_p)$ ont le même rang (noté r).
- En déduire qu'il existe un automorphisme orthogonal f de E tel que : $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, f(u_k) = v_k$.
- Dans quel cas peut-on imposer que $f \in SO(E)$?
- Trouver la matrice A dans la base canonique de $f \in O(\mathbb{R}^3)$ tel que $f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2$ et $f(u_3) = v_3$ si $u_1 = (0, 1, 1), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (1, 1, 0), v_1 = \frac{1}{3}(1, 4, 1), v_2 = \frac{1}{3}(1, 1, 4), v_3 = \frac{1}{3}(4, 1, 1)$. Caractériser f .

13.11 Transformation de CAYLEY

- Si A est une matrice antisymétrique réelle, que peut-on dire des valeurs propres complexes de A ?
- Soit $\varphi : A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

Montrer que φ réalise une bijection de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sur $\{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \text{Sp}(M)\}$.

13.12 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \sigma = ab + bc + ca, S = a + b + c$ et la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

- Montrer : $M \in O_3(\mathbb{R}) \iff (\sigma = 0 \text{ et } S \in \{-1, 1\})$.
- Montrer : $M \in SO_3(\mathbb{R}) \iff (\sigma = 0 \text{ et } S = 1)$.
- Montrer que $M \in SO_3(\mathbb{R}) \iff (\exists k \in [0; \frac{4}{27}], a, b \text{ et } c \text{ sont les racines du polynôme } X^3 - X^2 + k)$.

13.13 On considère des réels a, b, c . On pose $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab - c & ac + b \\ ab + c & b^2 & bc - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{pmatrix}$.

- À quelle condition A est-elle orthogonale ?
- Cette condition étant réalisée, reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

13.14 *Centrale PSI 2012* Reconnaître l'endomorphisme r canoniquement associé à $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

13.3 Réduction des endomorphismes symétriques

- 13.15** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace euclidien, on note $\|u\| = \max_{x \in S(0_E, 1)} \|u(x)\| = \max_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. Soit u^* l'application de E dans E définie par $\forall (x, y) \in E^2, (x|u(y)) = (u^*(x)|y)$. On vérifie que ceci définit bien u^* et que u^* est bien un endomorphisme de E (appelé l'adjoint de u).
- a. Montrer que $\|u\|^2 \leq \|u^* \circ u\|$ et en déduire que $\|u\|^2 = \|u^*\|^2 = \|u^* \circ u\|$.
- b. Établir que si v est symétrique, on a $\|v\| = \max_{\lambda \in \text{Sp}(v)} |\lambda|$.
- b. Prouver alors que $\|u\| = \max_{\lambda \in \text{Sp}(u^* \circ u)} \sqrt{\lambda}$.

13.16 *Centrale PSI 2012*

Soit E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que deux des trois propriétés précédentes entraînent la troisième :

(i) : f est une isométrie (ii) : $f^2 = -\text{id}_E$ (iii) : $\forall x \in E, (f(x)|x) = 0$.

On suppose E de dimension 2, combien existe-t-il de telles f ?

On suppose E de dimension 3, combien existe-t-il de telles f ?

13.17 *Centrale PSI 2013* a. Chercher les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^t M M = I_n$.

b. Montrer que de nouvelles solutions apparaissent si l'on cherche M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cette fois. Parmi ces nouvelles solutions, peut-on en trouver qui ne soient pas diagonales ?

13.18 *Centrale PSI 2012* Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs

propres sont strictement positives. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & {}^t B \\ B & 0 \end{pmatrix}$ où 0 est la matrice nulle.

a. Justifier que si X est une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: ${}^t X A X = 0 \iff X = 0$.

b. Montrer que si $m > n$ alors M n'est pas inversible.

On suppose dorénavant que $m \leq n$ et que B est de rang m .

c. Résoudre $\begin{pmatrix} A & {}^t B \\ B & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et montrer que $M \in \text{GL}_{n+m}(\mathbb{R})$.

d. On pose $Q = \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1} {}^t B \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$, calculer ${}^t Q M Q$ et en déduire que $BA^{-1} {}^t B \in \text{GL}_m(\mathbb{R})$.

13.19 *Centrale PSI 2012* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On pose alors $B_1 = {}^t A A$ et $B_2 = A {}^t A$

et b_1, b_2 les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à B_1 et B_2 respectivement.

a. Prouver que B_1 et B_2 sont diagonalisables et ont les mêmes valeurs propres.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de B_1 , établir que $\dim(E_\lambda(b_1)) = \dim(E_\lambda(b_2))$.

c. En déduire l'existence d'une matrice orthogonale $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $B_1 = U B_2 {}^t U$.

13.20 *Centrale PSI 2012* Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose que A est nilpotente (c'est-à-dire qu'il

existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$) et que A et ${}^t A$ et A commutent (c'est-à-dire ${}^t A A = A {}^t A$).

a. Justifier que $A^n = 0$ (la matrice nulle).

b. Établir que ${}^t A A = 0$. En déduire que $A = 0$.

c. Trouver un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ écrite en blocs 2×2 qui soit nilpotente, qui commute avec sa transposée et qui soit non nulle.

13.21 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \frac{1}{2}({}^t A + A)$. On note α la plus petite valeur propre de B et β sa plus grande.

a. Pour une colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, comparer ${}^t X A X$ et ${}^t X B X$.

b. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\alpha {}^t X X \leq {}^t X A X \leq \beta {}^t X X$. En déduire que : $\text{Sp}(A) \subset [\alpha; \beta]$.

13.22 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

On pose $\alpha = \min \text{Sp}(A)$ et $\beta = \max \text{Sp}(A)$. Montrer $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \alpha \leq a_{k,k} \leq \beta$.

13.23 *Centrale PSI 2012* a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \lambda I_n$.

b. Déterminer une CNS sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \lambda I_n$.

c. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, déterminer une CNS pour qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = S$.

13.24 *X* Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe D diagonale et $(U, V) \in O_n(\mathbb{R})^2$ telles que $A = UD^tV$.

13.4 Symétries positifs et définis positifs

13.25 *Décomposition de CHOLESKY*

Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $T \in T_n^+(\mathbb{R})$ (triangulaire supérieure) telle que $S = {}^tTT$.

Indication : on pourra procéder par récurrence sur la taille de la matrice.

13.26 *Centrale PSI 2012* Soit n et m deux entiers de $\mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les

valeurs propres sont strictement positives. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & 0 \end{pmatrix}$ où 0 est bien sûr la matrice nulle de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$.

a. Justifier que si X est une matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: ${}^tXAX = 0 \iff X = 0$.

b. Montrer que si $m > n$ alors M n'est pas inversible.

On suppose dorénavant que $m \leq n$ et que B est de rang m .

c. Résoudre $\begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et montrer que $M \in GL_{n+m}(\mathbb{R})$.

d. On pose $Q = \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}{}^tB \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$, calculer ${}^tQM Q$ et en déduire que $BA^{-1}{}^tB \in GL_m(\mathbb{R})$.

13.27 *Centrale PSI 2012* Soit A symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

Considérons l'application $\varphi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, $\varphi(X, Y) = \det \left(\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A \end{pmatrix} \right)$.

Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique telle que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\varphi(X, X) < 0$.

13.28 *Centrale PSI 2013* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, c'est-à-dire $S \in \mathcal{S}_n$. On dit que S

est positive si ses valeurs propres sont positives. On note $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

a. Établir que pour $S \in \mathcal{S}_n$: $S \in \mathcal{S}_n^+ \iff (\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX \geq 0)$.

En déduire que si $S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n^+$ et $1 \leq i < j \leq n$, on a $\begin{vmatrix} s_{i,i} & s_{i,j} \\ s_{j,i} & s_{j,j} \end{vmatrix} \geq 0$.

b. Montrer que si $S \in \mathcal{S}_n^+$ et $S \neq 0$, on a : $\text{rang}(S) = 1 \iff (\exists U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), S = U {}^tU)$.

c. Soit $S \in \mathcal{S}_n$, montrer que $S \in \mathcal{S}_n^+ \iff (\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), S = {}^tMM)$ (on pourra chercher M symétrique si $S \in \mathcal{S}_n$).

d. En déduire que : $\forall (A, B) \in (\mathcal{S}_n^+)^2$, $\text{Tr}(AB) \geq 0$.

e. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n^+$ telle que $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $a_{i,j} \neq 0$, on pose $B = \left(\frac{1}{a_{i,j}} \right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montre que l'on a : $B \in \mathcal{S}_n^+ \iff \text{rang}(A) = 1$.

13.29 Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, montrer que $0 \leq \text{Tr}(AB) \leq \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)$.

13.30 Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, montrer que la matrice $I_n + AB$ est inversible.

13.31 Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.

13.32 *Centrale PSI 2012* Soit A symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

Considérons l'application $\varphi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, \varphi(X, Y) = \det \begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A \end{pmatrix}$.

Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique telle que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \varphi(X, X) < 0$.

13.5 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

13.33 *Centrale PSI 2013* Marine DC.

Soit E euclidien de dimension n , $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique de E et $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1$ ses valeurs propres.

a. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille orthonormée de E .

Montrer qu'il existe x unitaire dans $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ tel que $|x|u(x)| \leq \lambda_k$.

b. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ avec $\mathcal{B}$ base orthonormale. Montrer que $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{i=1}^k a_{i,i} \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i$.

13.34 *Centrale PSI 2013* Pierre-Simon.

a. Soit r une rotation d'angle θ de $\mathbb{R}^3$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(1) = 1$ et $|P(e^{i\theta})| = 1$.

Montrer que $P(r)$ est une rotation.

b. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe et r_0 telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que r_0 est une rotation. Préciser son angle.

On considère $r = \frac{1}{3}(2r_0^2 - r_0 + 2\text{id})$. Montrer que r est une rotation donc on déterminera l'angle noté θ_0 .

c. Décrire tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $P(1) = 1$ et $|P(e^{i\theta})| = 1$ dans le cas où $r = r_0$.

13.35 *Mines PSI 2015* Inès Arranz-Valsero

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension n et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in S_n^{++}$ si et seulement s'il existe un produit scalaire Φ tel que $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, \Phi(e_i, e_j) = M_{i,j}$.

13.36 *Mines PSI 2015* TERENCE BURCELIN

a. Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$, montrer que $M \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXMX \geq 0$.

b. Montrer que : $\forall M \in S_n(\mathbb{R}), \exists \alpha \geq 0, \forall \lambda \geq \alpha, M + \lambda I_n \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

c. Montrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $S_n(\mathbb{R})$.

d. Soit $f \in \mathcal{L}(S_n(\mathbb{R}))$ tel que $f(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que $f \in \text{GL}(S_n(\mathbb{R}))$.

e. Donner des exemples d'applications f qui vérifient cette propriété.

13.37 *Mines PSI 2015* Arnaud Dubessay

Quel est le centre $C = \{M \in O(3) \mid \forall N \in O(3), MN = NM\}$ de $O(3)$?

13.38 *Mines PSI 2015* Adrien Gruson

Soit A et B deux matrices symétriques réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^{2p+1} = B^{2p+1}$. Montrer que $A = B$.

13.39 *CCP PSI 2015* Agatha Courtenay

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- a. Démontrer rapidement que A est diagonalisable.
- b. Déterminer une base orthonormale de vecteurs propres colonnes de A et diagonaliser A .
- d. Soit des suites réelles u , v et w qui vérifient les récurrences :
$$\begin{cases} u_{n+1} &= -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

Quelle condition sur u_0 , v_0 et w_0 pour que les suites convergent ?

13.40 *CCP PSI 2015* Marin de Bonnières

Soit E euclidien de dimension $n \geq 2$, $f \in GL(E)$ tel que $\forall (x, y) \in E^2$, $(x|y) = 0 \implies (f(x)|f(y)) = 0$.

- a. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , que dire de $\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$?
- b. Calculer $(f(e_i) + f(e_j) | f(e_i) - f(e_j))$ de 2 manières différentes. Montrer : $\exists \alpha > 0$, $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\|f(e_i)\|^2 = \alpha^2$.
- c. (Que dire de $\frac{1}{\alpha}f$?) Montrer que : $\forall (x, y) \in E^2$, $(f(x)|f(y)) = \alpha^2(x|y)$.

13.41 *CCP PSI 2015* Ludovic Péron

Équivalence entre : $S = {}^tBB$ et S symétrique positive.

13.42 *E3A PSI 2015* Marie Trarieux et Patxi Teillagorry

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in O(n)$.

- a. Montrer que $\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} \right| \leq n$.
- b. Montrer que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}| \geq n$.
- c. Montrer que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.

13.43 *Cachan PSI 2016* Antoine Badet

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $n = 2m$ et $\mathbb{R}_n^o[X] = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0\}$.

Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On pose $L = (\varphi_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m+1} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ avec $\varphi_{i,j} = \varphi(X^{i+j-2})$.

- a. On suppose que $\forall P \in \mathbb{R}_n^o[X]$, $\varphi(P) \geq 0$ (M). Montrer que $\forall V \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$, ${}^tVLV \geq 0$ (1).

En déduire que les valeurs propres de L sont des réels positifs.

Montrons que (1) $\implies$ (M). On pose $\varepsilon[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \exists (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2, P = A^2 + B^2\}$.

- b. Soit $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$, trouver une CNS pour que $P \in \varepsilon[X]$.
- c. Soit $(P, Q) \in \varepsilon[X]^2$, montrer que $PQ \in \varepsilon[X]$.
- d. Montrer que $\mathbb{R}_n^o[X] \subset \varepsilon[X]$.
- e. En déduire que (1) $\implies$ (M).

13.44 *ENS Cachan PSI 2016* Marie Rebière

Pour M symétrique, on dit que M est positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T M X \geq 0$.

Pour M symétrique, on dit que M est définie positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T M X > 0$.

Soit A et B des matrices symétriques réelles. On suppose B positive.

a. Montrer que : $\exists k > 0, \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T B X \geq k \|BX\|^2$.

b. Soit $\rho > 0$ tel que $A + \rho B$ soit définie positive.

Montrer que : $\exists \lambda > 0, \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), BX = 0 \implies X^T A X \geq \lambda \|X\|^2$ (1).

c. Montrer que si (1) est vérifiée, alors il existe $\rho_0 > 0$ tel que $A + \rho_0 B$ soit définie positive.

13.45 *Centrale Maths1 PSI 2016* Mathieu Perrin

Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a. Supposons qu'il existe deux valeurs propres réelles λ et μ de u de signes opposés.

Montrer qu'il existe un vecteur non nul z de E tel que $(u(z)|z) = 0$.

b. Supposons u symétrique et $\text{Tr}(u) = 0$, montrer qu'il existe un vecteur $z \neq 0_E$ de E tel que $(u(z)|z) = 0$.

c. Supposons $\text{Tr}(u) = 0$, montrer qu'il existe un vecteur $z \neq 0_E$ de E tel que $(u(z)|z) = 0$.

d. Supposons $\text{Tr}(u) = 0$, montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ ait tous ses coefficients diagonaux nuls.

13.46 *Mines PSI 2016* Sylvain Bielle II

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est une homothétie si et seulement si u commute avec tout automorphisme orthogonal de E .

Si u commute avec toutes les réflexions, qu'en déduit-on ?

13.47 *Mines PSI 2016* Adrien Boudy II

Soit E un espace euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux de E .

a. Rappeler la définition d'un projecteur orthogonal.

Donner un exemple de problème où les projecteurs orthogonaux sont utiles.

b. Montrer que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé sur $\mathbb{R}[X]$.

c. Montrer que les valeurs propres de u sont dans $[0; 2]$.

d. À quoi sont égaux $\text{Ker}(u)$ et $\text{Ker}(u - 2\text{id}_E)$?

13.48 *Mines PSI 2016* Pauline Bourda II

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques et $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

a. Soit $f \in S(E)$. Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

b. Soit $f \in S^+(E)$. Montrer qu'il existe $h \in S^+(E)$ tel que $h^2 = f$.

c. Soit $(f, g) \in S^+(E)^2$. Montrer que $\text{Ker}(f + g) = \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(f + g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.

13.49 *Mines PSI 2016* Marie Rebière et Sébastien Sequeira II

a. Soit E un espace euclidien et x, y deux vecteurs de E . Montrer que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Cas d'égalité ?

b. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ et $(U, V) \in O(n)^2$ tels que $UX + VX = 2X$. Montrer que $UX = VX = X$.

c. Soit $(U, V) \in O(n)^2, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $UMU^{-1} + VMV^{-1} = 2M$. Montrer que $UM = MU$ et $VM = MV$.

d. Subsidaire : Pourquoi $(M, N) \mapsto \text{Tr}({}^t M N) = (M|N)$ est-il le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

13.50 CCP PSI 2016 Léo Fusil I

Caractériser l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

13.51 CCP PSI 2016 Alexis Iacono II

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer l'équivalence entre les deux assertions :

- (i) A est symétrique et son spectre est positif.
- (ii) il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$.

13.52 E3A PSI 2016 Léo Fusil II

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x) = u \wedge x$.

- a. Calculer $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$.
- b. Écrire les matrices A et A^2 de f et f^2 .
- c. Exprimer f^n en fonction de f et f^2 .
- d. Reconnaître $\exp(f)$.

13.53 E3A PSI 2016 Alexandre Janot

On définit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $a_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $a_{i,j} = \frac{1}{2}$ sinon.

- a. Trouver les éléments propres de A . Est-elle diagonalisable ? Inversible ?

Soit $F = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ tels que $\|u_i - u_j\| = 1$ pour $i \neq j$.

On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

- b. Montrer que F est une base de $\mathbb{R}^n$.
- c. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, f(e_i) = u_i$.
 f est-il un automorphisme ? Est-ce un automorphisme orthogonal ?

13.54 ENS Cachan PSI 2017 Elliott Jean-François et Claire Raulin et

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(X) = {}^tXAX - {}^tBX$.

- a. Montrer que f est minorée ssi A et B vérifient les deux conditions suivantes : $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$ et $B \in \text{Im}(A)$.
- b. Si $(A_1, A_2) \in S_n(\mathbb{R})^2$ (matrices symétriques), $(B_1, B_2) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, et les fonctions $f_1 : X \mapsto {}^tXA_1X - {}^tB_1X$ et $f_2 : X \mapsto {}^tXA_2X - {}^tB_2X$, calculer le gradient de f_1 et f_2 (resp. ∇f_1 et ∇f_2).

Montrer que $f_1 = f_2$ si on suppose f_1 et f_2 minorées et $\|\nabla f_1\| = \|\nabla f_2\|$.

- c. Soit A_1, A_2 deux matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\text{Im}(A_1 + A_2) = \text{Im}(A_1) + \text{Im}(A_2)$ et en déduire que $\text{Ker}(A_1 + A_2) = \text{Ker}(A_1) \cap \text{Ker}(A_2)$.

13.55 ENS Cachan PSI 2017 Bastien Lamagnère

On définit les matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme étant les matrices vérifiant ${}^tM = M$ et $\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXMX \geq 0$ et on note alors $M \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Montrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est stable par addition et multiplication par une constante positive.

Montrer que, si $U \in \mathbb{R}^n$, alors $S = U {}^tU$ est symétrique positive.

Montrer qu'une matrice symétrique M est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

En notant $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on définit le produit de HADAMARD de ces deux matrices par : $A \odot B = (a_{i,j}b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est stable par le produit de HADAMARD.

Soit $u_1, \dots, u_n$ dans $\mathbb{R}^n$, montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $c \in [0; +\infty[$, la matrice $S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est symétrique positive si $s_{i,j} = ({}^tu_iu_j + c)^k$.

13.56 *ENS Cachan PSI 2017* Clément Maurel I

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soit C un convexe de E et $u \in E$; on dit que u est un point extrémal de C si et seulement si $C \setminus \{u\}$ est encore convexe.

- a. Quels sont les points extrémaux de la boule fermée unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $\|\cdot\|_2$?
- b. Quels sont les points extrémaux de la boule fermée unité de $\mathbb{R}^2$ pour la norme $\|\cdot\|_1$?
- c. Montrer qu'un point de C est extrémal si et seulement s'il n'est pas le milieu de deux points de C .

Soit E un espace euclidien qui est donc un espace vectoriel normé si on prend pour norme la norme euclidienne associée au produit scalaire de E . On note B la boule unité de E .

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $\|u\| = \sup_{x \in B} \|u(x)\|$ et $C = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \|u\| \leq 1\}$.

- d. Montrer que les points extrémaux de C sont les automorphismes orthogonaux de E . Indication : on pourra utiliser sans démonstration la décomposition suivante : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists O \in O_n(\mathbb{R}), \exists S \in S_n^+(\mathbb{R}), A = OS$.

13.57 *ENS Cachan PSI 2017* Vincent Meslier I

Soit un entier $n \geq 1$ et $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$.

- a. Prouver que E est un espace vectoriel. Quelle est la dimension de E ?
- b. Soit $u_k = \frac{1}{k!}(X-1)^k$ avec $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ est une base de E .
- c. Quels sont les coefficients de P dans la base $\mathcal{B}$.

En déduire un produit scalaire pour lequel $\mathcal{B}$ est une base orthonormale.

- d. Soit $\varphi : E \rightarrow E$ définie par $\varphi(P) = (X-1)P'$. φ est-il un endomorphisme ? Que vaut $\varphi(u_k)$?

En déduire que φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

- e. Montrer que φ est inversible et donner son inverse.

13.58 *Centrale Maths1 PSI 2017* Nelson Gary et Alexis Trubert

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, on définit l'application $\varphi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(X, Y) = {}^t X A Y$.

- a. Montrer que toutes les valeurs propres de A sont réelles.

Indication : on pourra calculer ${}^t \bar{X} A X$ avec X un vecteur propre associé à la matrice A .

- b. On prend $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, vérifier que φ est un produit scalaire.
- c. On reprend n quelconque, montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :
 - (i) Les valeurs propres de A sont strictement positives.
 - (ii) φ est un produit scalaire.

Question de cours : donner la définition d'un endomorphisme symétrique.

13.59 *Centrale Maths1 PSI 2017* Sam Mamers

Soit E euclidien et $f \in O(E)$. On note $K(f) = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et $I(f) = \text{Im}(f - \text{id}_E)$.

Si $u \neq 0_E \in E$, on note s_u la réflexion par rapport à $(\mathbb{R}u)^\perp$.

- a. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que F stable par $f \iff F^\perp$ stable par f .
- b. Montrer que $K(f) \oplus I(f) = E$ et que cette somme est orthogonale.
- c. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de E . Montrer que $I(s_{u_1} \circ \dots \circ s_{u_p}) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.

13.60 Centrale Maths1 PSI 2017 Claire Meunier et Claire Raulin

On définit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(A, B) = \text{Tr}(A^T B)$.

a. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

b. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ (symétriques et antisymétriques) sont des supplémentaires orthogonaux. Donner l'orthogonal de $S_n(\mathbb{R})$.

Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$ et l'application $\psi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\psi(A, B) = X^T M Y$.

c. Montrer que ψ est un produit scalaire.

13.61 Mines PSI 2017 Clément Maurel I

Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E .

a. Donner le cardinal du groupe S_n des permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$.

b. Pour σ fixé dans S_n , on pose $\phi(\tau) = \tau \circ \sigma$, montrer que ϕ est bijective de S_n dans S_n .

c. Soit $\sigma \in S_n$, donner une CNS pour que $f_\sigma : e_k \mapsto e_{\sigma(e_k)}$ soit diagonalisable.

d. On pose $p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$. Montrer que p est un projecteur qu'on caractérisera.

13.62 Mines PSI 2017 Iñigo Saez-Casares I

Soit $n \geq 1$ et $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $U^T = (1 \dots 1)$.

On pose $V = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid U \text{ est vecteur propre de } A \text{ et de } A^T\}$.

On pose aussi $W = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall i \in \llbracket 2; n \rrbracket, a_{1,i} = a_{i,1} = 0\}$.

a. Montrer que W est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

b. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & * & \dots & * \end{pmatrix} \in O(n)$.

c. Montrer que $A \in V \iff P^T A P \in W$.

d. En déduire la structure de V et sa dimension.

13.63 Mines PSI 2017 Roland Tournade I

E désigne un espace euclidien de dimension finie non nulle.

a. Montrer que si p est une projection orthogonale, alors p est symétrique.

Soit p, q deux projecteurs orthogonaux.

b. Montrer que $p \circ q \circ p$ est symétrique.

c. Montrer que $(\text{Im}(p) + \text{Ker}(q))^\perp = \text{Im}(q) \cap \text{Ker}(p)$.

d. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable à valeurs propres dans $[0; 1]$.

13.64 E3A PSI 2017 Aloïs Blarre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $J_n = (1)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (matrice remplie de 1).

a. Montrer que J_n est diagonalisable. Quelles sont les valeurs propres de J_n ?

b. Pour $n = 2$ et $n = 3$, déterminer deux matrices $P_n \in O(n)$ (orthogonale) et $D_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (diagonale) telles que $J_n = P_n D_n P_n^{-1}$.

13.65 Petites Mines PSI 2017 Élisabeth Gressier-Monard I

Soit $n \geq 1$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} > 1$ si $i = j$.

a. Montrer que si $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^t X A X > 0$.

b. Montrer que A est diagonalisable et inversible.

13.66 ICNA PSI 2017 Ninon Toussaint

Déterminer $E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid A \text{ orthogonale}\}$.

13.67 ENS Ulm/Cachan PSI 2018 Jean Boudou et Erwan Dessailly

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $\forall V \in \mathbb{R}^n, {}^tVAV \geq 0$, $B \in \mathbb{R}^n$ et $S = \{U \in \mathbb{R}^n \mid AU = B\}$.

On suppose que $S \neq \emptyset$. On définit aussi le système différentiel (E) : $X'(t) = -AX(t) + B$ avec $t \in \mathbb{R}_+$.

- Montrer que les valeurs propres de A sont positives réelles.
- Donner les solutions constantes de (E).
- Montrer que si X et Y sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$, alors $t \mapsto \|X(t) - Y(t)\|^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
- Montrer que X est bornée et qu'il existe $X_\infty \in S$ tel que $X_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t)$.
- Montrer que $\|X(0) - X_\infty\| = \inf_{U \in S} \|X(0) - U\|$.
- Que se passe-t-il si $S = \emptyset$?

13.68 Centrale Maths1 PSI 2018 Mathilde Dutreuilh

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. Déterminer la plus petite constante $C \geq 0$ telle que $\forall X \in \mathbb{R}^3, \|MX\| \leq C\|X\|$:

- lorsque la norme choisie est la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^3$.
- lorsque la norme choisie est la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^3$.
- lorsque la norme choisie est la norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^3$.

13.69 Centrale Maths1 PSI 2018 Julien Langlais

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et B_n l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - a_{k,k})$.

- Montrer que $B_n \neq \emptyset$.
- L'ensemble B_n est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda(A) \lambda^2$.
- Déterminer $B_n \cap S_n$ (S_n est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
- Trouver $B_n \cap A_n$ (A_n est l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

13.70 Centrale Maths1 PSI 2018 Charlotte Nivelles

a. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda & -\alpha & 0 \\ -\alpha & \mu & -\beta \\ 0 & -\beta & \nu \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $\alpha\alpha > 0$ et $\beta\beta > 0$. Montrer que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$ et que les sous-espaces propres de A sont de dimension 1. Justifier que A est diagonalisable.

13.71 Centrale Maths1 PSI 2018 Raphaël Pobeda

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E .

On définit $\Phi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $\Phi(x, y) = (u(x)|y)$.

- Montrer que Φ est bilinéaire. Si on suppose que Φ est symétrique, montrer que u est diagonalisable.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur le spectre de u pour que Φ soit un produit scalaire.
- On suppose que Φ symétrique et que u est de rang 1.

Montrer qu'il existe une forme linéaire $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in E^2$, $\Phi(x, y) = \varepsilon \ell(x) \ell(y)$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

Question de cours : soit v un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E et e_1, e_2 deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes. Que peut-on dire de e_1 et e_2 ? Le montrer.

13.72 Centrale Maths1 PSI 2018 Titouan Sancier

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthodiagonalisable s'il existe une matrice $P \in O(n)$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PD^tP$.

- Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit orthodiagonalisable.
- On prend ici $n = 2$, pour quels $\theta \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est-elle orthodiagonalisable ?

Questions de cours :

- énoncer le théorème spectral pour les endomorphismes des espaces euclidiens.
- donner une définition et une caractérisation des endomorphismes symétriques.
- définir le groupe spécial orthogonal.

13.73 Mines PSI 2018 Colin Baumgard et Marion Lebrun I

- Rappeler le cardinal de S_n , l'ensemble des permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$. Soit $\sigma \in S_n$ fixée, montrer que $\varphi_\sigma : S_n \rightarrow S_n$ définie par $\varphi_\sigma(\tau) = \tau \circ \sigma$ est une bijection.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $\sigma \in S_n$, on note f_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. On pose enfin $p_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$.

- Montrer que p_n est un projecteur dont vous déterminerez les éléments caractéristiques.

13.74 Mines PSI 2018 Martin Monsel I

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que parmi les trois assertions suivantes, deux quelconques d'entre elles impliquent la troisième :

- f est une isométrie.
- $f^2 = -\text{id}_E$.
- $\forall x \in E$, $(f(x)|x) = 0$.

On suppose E de dimension 2, combien existe-t-il de telles f ?

On suppose E de dimension 3, combien existe-t-il de telles f ?

13.75 CCP PSI 2017 et CCP PSI 2018 Samuel Sanchez I et Gauthier Crosio II

On définit les conditions : $M^2 + 4I_n = 0$ et $M^T M = M M^T$ (*) pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- On suppose que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ respecte (*). Trouver un polynôme annulateur de $S = M M^T$.

En déduire que $M/2$ est orthogonale.

- Quel est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui respectent (*) ?
- Quel est l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui respectent (*) ?

13.76 *CCP PSI 2018* Charlotte Nivelles II

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

- Montrer que $I_n + A$ est inversible.
- Montrer que $M = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ est une matrice orthogonale.
- Calculer $\det(M)$.
- (question rajoutée) Montrer que l'application $\varphi : A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ réalise une bijection sur l'ensemble $\{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \text{Sp}(M)\}$.

13.77 *ICNA PSI 2018* Quentin Meynieu II

Soit un entier $n \geq 2$, on définit $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $u(M) = -M + \text{Tr}(M)I_n$.

- Prouver que -1 est valeur propre de u .
- Trouver une base de $E_{-1}(u)$.
- Montrer que u est diagonalisable. Déterminer $\det(u)$ et $\text{Tr}(u)$.
- Donner un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lequel u est un endomorphisme symétrique. Trouver une base orthonormale de vecteurs propres de u pour ce produit scalaire.

13.78 *ENS Cachan PSI 2019 (OdT 2019/2020 X-ENS PSI planche 41)* Charles Broquet

Soit $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $H(V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $H(V) = I_n - \frac{2}{\|V\|^2} V^t V$ (matrice de HOUSEHOLDER).

On note $\mathcal{H}_n = \{I_n\} \cup \{H(V) \mid V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Pour $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, montrer que $H(V) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tel que $\|X\| = \|Y\|$. Montrer qu'il existe $H \in \mathcal{H}_n$ telle que $HX = Y$.
- Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ produit d'au plus n matrices de $\mathcal{H}_n$ telle que $PA = R$ avec R matrice triangulaire supérieure avec des termes diagonaux strictement positifs.

Quel est le principe de construction de P et R ?

- Écrire une fonction basée sur les matrices de HOUSEHOLDER qui donne la factorisation QR d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Complexité attendue en termes d'opérations : $\frac{4n^3}{3} + O(n^2)$.

13.79 *Centrale Maths1 PSI 2019* Tom Boileau

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique à valeurs propres strictement positives et $p \in \mathbb{R}^n$.

On définit les applications $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $F_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(X) = {}^t X A X$ et $F_p(X) = (p|X) - f(X)$.

- Démontrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que, pour $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$ (avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$), il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $(p|X) - f(X) = \sum_{i=1}^n (\beta_i \alpha_i - \lambda_i \alpha_i^2)$.

- Montrer que F_p admet une borne supérieure et qu'elle est atteinte.

Questions de cours :

- Énoncer l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.
- Donner la loi faible des grands nombres.

13.80 *Centrale Maths1 PSI 2019* Lola Josseran

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, montrer alors que le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}$.

Soit dorénavant $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}$.

b. Calculer $\text{Tr}(A)$ et $\text{Tr}(A^2)$.

c. Déterminer les valeurs propres de A et donner une base de chaque sous-espace propre associé.

13.81 *Centrale Maths1 PSI 2019* Thomas Méot

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.

On pose $E = \mathbb{R}^n$ qu'on munit du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

a. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^T M$.

c. On suppose que $0 \notin \text{Sp}(M)$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure avec ses coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = B^T B$. Indication : montrer que $\varphi : (X, Y) \mapsto X^T A Y$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Question de cours :

- Énoncer complètement le théorème spectral matriciel (resp. vectoriel).
- Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\text{Ker}(M) = \text{Ker}(M^T M)$.

13.82 *Mines PSI 2019* Pierre Fabre II

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit que f est antisymétrique si $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$.

a. Montrer que f est antisymétrique si et seulement si $\forall x \in E, \langle x, f(x) \rangle = 0$.

b. Montrer que si f est antisymétrique alors $\text{Ker}(f) \perp \text{Im}(f)$.

Soit f un endomorphisme antisymétrique de E . On pose $s = f \circ f$.

c. Montrer que s est symétrique à valeurs propres négatives. Montrer aussi que $\text{Ker}(s) = \text{Ker}(f)$.

d. Si $n = 3$, montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Questions supplémentaires pour la question d. :

- Calculer χ_M . Que dire sur le spectre de M ? Et en général ?
- Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de $\exp(M) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{n!}$.

13.83 *Mines PSI 2019* Florian Guyomard I

Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E tel que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)$.

Soit v un autre endomorphisme de E tel que $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|v(y))$.

a. Montrer que $E = \text{Im}(u) \oplus^\perp \text{Im}(v)$.

b. En déduire que $u + v$ est inversible.

13.84 *Mines PSI 2019* Perrine Hoffmann II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et U et V deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

On suppose que $\forall X \in E, (UX|X) \geq 0$ et $(VX|X) \geq 0$.

On se propose de montrer l'inégalité (I) : $\det(U + V) \geq \det(U) + \det(V)$.

- Montrer (I) si U et V ne sont inversibles ni l'une ni l'autre.
- Montrer (I) si U inversible. Indication : on pourra commencer par le cas $U = I_n$. Conclure.
- Étudier le cas d'égalité dans (I).

13.85 *Mines PSI 2019* Auriane Luquet II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in O_n(\mathbb{R})$.

- Montrer les inégalités suivantes : $\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$.

Ce n'était pas dans l'énoncé originel mais j'ai rajouté les cas d'égalité.

- Montrer que $\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| = n \iff U$ est vecteur propre de A .
- Décrire les matrices $A \in O_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles on a $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| = n$. Combien y en a-t-il ?
- Montrer que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| = n\sqrt{n} \implies \forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2, |a_{i,j}| = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Donner un exemple de telle matrice pour $n = 2$; que représente-t-elle ? Et pour $n = 4$?

13.86 *CCP PSI 2019* Jon Biran II et Pierre Fabre II

Soit un entier $n \geq 3$ et $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Déterminer le rang de A_n et la dimension de $\text{Ker}(A_n)$.
- La matrice A_n est-elle diagonalisable ?
- Que peut-on dire de la multiplicité de la valeur propre 0 ?
- Montrer que les valeurs propres de A_n sont 0, λ_n et $1 - \lambda_n$ avec $\lambda_n > 1$.
- Trouver un polynôme annulateur de degré 3 de A_n .

13.87 *CCP PSI 2019* Benoît Le Morvan I

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que ${}^tA = A^2$ et $A \neq I_2$.

- Déterminer un polynôme annulateur de A .
- Montrer que les valeurs propres d'une matrice M sont racines de tout polynôme annulateur de M .
- Trouver $\text{Sp}(A)$. Montrer que A est orthogonale. Déterminer $\det(A)$.
- Trouver toutes les matrices A qui vérifient les conditions imposées ci-dessus.

Question de cours : montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $\bar{\lambda} \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

13.88 *CCP PSI 2019* Thibault Maury I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \neq I_n$, ${}^tMM = M^tM$ et $M^3 = I_n$.

- Montrer que M est une matrice orthogonale.
- Si $n = 2$, trouver toutes les matrices M vérifiant ces conditions.

13.89 *X PSI 2020* Victor Barberteguy II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer toutes les matrices de $O(n)$ de trace n .

13.90 *ENS Cachan PSI 2021* Robin De Truchis

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .

On dit que A admet un pseudo-inverse s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

- $AB = BA$.
- $A = ABA$.
- $B = BAB$.

a. Supposons que $r = \text{rang}(a) = \text{rang}(a^2)$. Montrer que $\mathbb{R}^n = \text{Im}(a) \oplus \text{Ker}(a)$. En déduire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $C \in GL_r(\mathbb{R})$ telles que $A = P \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

b. Montrer que A admet un pseudo-inverse si et seulement si $\text{rang}(a) = \text{rang}(a^2)$.

On suppose dans la suite que A admet un pseudo-inverse et que B est un "pseudo-inverse" de A . On note b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B .

- c. Montrer que $a \circ b$ est un projecteur dont on déterminera les sous-espaces caractéristiques.
- d. Montrer l'unicité de B .
- e. Montrer que B est un polynôme en A .

On suppose de plus que $\text{Ker}(a)$ et $\text{Im}(a)$ sont orthogonaux et on se donne un vecteur $y \in \mathbb{R}^n$.

f. Montrer que le vecteur $v = b(y)$ est tel que :

- $f : x \mapsto \|a(x) - y\|$ est minimale en v .
- Si $w \neq v \in \mathbb{R}^n$ vérifie $f(w) = f(v)$, alors $\|w\| > \|v\|$.

13.91 *Centrale Maths1 PSI 2021* Adrien Guyot

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A et B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $\text{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$.

- a. Montrer qu'il existe $R \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = R^T R$.
- b. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = P^T P$ et $B = P^T D P$.
- c. Montrer que $\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$.

13.92 *Centrale Maths1 PSI 2021* Esteban Poupinet

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique avec sa base canonique $\mathcal{B}_0$.

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$.

On définit les deux endomorphismes p et q de E tels que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p)$ et $A^T = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(q)$.

a. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2$, $(p(x)|y) = (x|q(y))$.

b. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de E . Montrer que $\text{Tr}(q \circ p) = \sum_{k=1}^n \|p(v_k)\|^2$.

c. Montrer que si p est un projecteur orthogonal, $\text{Tr}(q \circ p) = \text{Tr}(p)$.

d. Dans le cas général, montrer que $\text{Tr}(q \circ p) \geq \text{Tr}(p)$.

e. Montrer que $\text{Tr}(q \circ p) = \text{Tr}(p) \iff p$ est orthogonal.

13.93 *Centrale Maths1 PSI 2021* Raffi Sarkissian

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est :

- orthodiagonalisable (ODZ) s'il existe $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale et $P \in O(n)$ telles que $M = PDP^T$.
- orthotrigonalisable (OTZ) s'il existe $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire et $P \in O(n)$ telles que $M = PTP^T$.

- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit ODZ.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que $N(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ soit OTZ.
- Montrer que M est OTZ si et seulement si χ_M est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

13.94 *Mines PSI 2021* Antoine Faivre-Duboz II

Soit deux entiers n et p tels que $n \geq 3$ et $2 \leq p < n$.

Soit aussi une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que $\text{rang}(A) = p$. On pose alors $B = A^T A$.

- Montrer que B est une matrice inversible.
- Montrer que $P = AB^{-1}A^T$ est la matrice d'une projection de rang p .

13.95 *Mines PSI 2021* Antonio Treillhou I

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, on considère une droite vectorielle D et un plan vectoriel P .

On note r une rotation d'angle $\theta \in]0; 2\pi[$ autour de la droite D et s la réflexion de plan P .

- On suppose dans cette question que $D \perp P$, montrer que $s \circ r = r \circ s$.
- Que peut-on dire si $s \circ r = r \circ s$?

13.96 *Mines PSI 2021* Sylvain Vigouroux II

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et u un vecteur unitaire de E .

On définit l'application $f : E \rightarrow E$ par $f(x) = (x|u)u + x \wedge u$.

- Montrer que f est une isométrie et la caractériser.
- Déterminer les endomorphismes g de E qui vérifient $g^2 = f$.

13.97 *CCINP PSI 2021* Maxime Brachet I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(M^T M)^2 = I_n$.

- À l'aide du déterminant, montrer que la matrice M est inversible.
- Montrer que M est symétrique.
- En déduire que $M = I_n$.

13.98 *CCINP PSI 2021* Mehdi Hamdaoui II

Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{Sp}(M) = \{m_{1,1}, \dots, m_{n,n}\}$ (valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité).

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

On note S_n (resp. A_n) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Les matrices A et B sont-elles dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$?
- L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda(A) \lambda^2$. En déduire $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap S_n$.
- Déterminer $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n$.

13.99 *CCINP PSI 2021* Pierre-Issa Lacourte II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -C^T \\ C & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

- Calculer $M^T M$. En déduire que M est inversible.
- Montrer que $N = M^{-1} M^T$ est une matrice orthogonale.

13.100 *CCINP PSI 2021* Juliette Maricourt II

Soit E un espace euclidien, $u_1, \dots, u_n$ des endomorphismes symétriques de E tels que $\sum_{k=1}^n \text{rang}(u_k) = \dim(E)$ et tels que $\forall x \in E, \sum_{k=1}^n (u_k(x)|x) = \|x\|^2$.

- Montrer que l'endomorphisme $\left(\sum_{k=1}^n u_k\right) - \text{id}_E$ est diagonalisable.
- En déduire que $\sum_{k=1}^n u_k = \text{id}_E$.
- Montrer que $E = \bigoplus_{k=1}^n \text{Im}(u_k)$.
- Montrer que $u_1, \dots, u_n$ sont des projecteurs orthogonaux.

13.101 *CCINP PSI 2021* Esteban Poupinet II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^3 + 9A = 0$.

- Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \{0, 3i, -3i\}$.
- A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
- A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- Si n est impair, montrer que A n'est pas inversible.
- Montrer qu'il n'existe aucune matrice symétrique réelle non nulle telle que $A^3 + 9A = 0$.

13.102 *CCINP PSI 2021* Laurine Texier I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A . On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

- Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, (x|f(y)) = -(f(x)|y)$.
- Montrer que $\det(f) = (-1)^n \det(A)$. Qu'en déduit-on ?
- Montrer que f induit sur $\text{Im}(f)$ un endomorphisme injectif. Qu'en déduit-on sur la dimension de $\text{Ker}(f)$?
- On suppose dans cette question que $n = 3$. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

13.103 *Centrale Maths1 PSI 2022* Anna Decrock

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Im}(A)$ dans la base canonique.

- Montrer que $(\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, X^T M Y = 0) \iff (M = 0)$.
- Montrer que P est symétrique.
- Caractériser la matrice PA .
- En déduire que $\text{Tr}(A)^2 \leq \text{rang}(A) \times \text{Tr}(A^T A)$.
- Dans l'inégalité précédente, quel est le cas d'égalité ?

13.104 *Centrale Maths1 PSI 2022* Thomas Lanne

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et V_1 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que leur spectre complexe est réduit à $\{1\}$.

- Donner un élément de V_1 .
- Prouver que $\forall M \in V_1, (M - I_n)^n = 0$.
- On prend ici $n = 4$. Trouver une matrice $M \in V_1$ telle que $(M - I_4)^2 \neq 0$ et $(M - I_4)^3 = 0$.
- On revient à n quelconque. Trouver toutes les matrices symétriques appartenant à V_1 .
- On prend ici $n = 3$. Trouver toutes les matrices orthogonales appartenant à V_1 .

13.105 *Centrale Maths1 PSI 2022* Anatole Rousset

On pose $C = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \|MX\|_2 \leq \|X\|_2\}$.

On dit que les endomorphismes canoniquement associés aux matrices M de C sont contractants.

On dit qu'un vecteur X_0 est extrémal pour $M \in C$ si $X_0 \neq 0$ et $\sup_{\substack{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \\ X \neq 0}} \frac{\|MX\|_2}{\|X\|_2} = \frac{\|MX_0\|_2}{\|X_0\|_2}$.

On dit qu'un vecteur X_0 est fixe pour $M \in C$ si $MX_0 = X_0$.

- Vérifier que toutes les matrices $A \in O_2(\mathbb{R})$ appartiennent à C .
- Soit $A \in C$, montrer l'existence d'une matrice $R \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que AR est symétrique. En déduire qu'il existe deux matrices Ω_1 et Ω_2 dans $O_2(\mathbb{R})$ et deux réels a et b telles que $\Omega_1 A \Omega_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.
- Soit $A \in C$, avec les notations ci-dessus, montrer que $(a, b) \in [-1; 1]^2$.
- Montrer qu'il existe un vecteur extrémal pour A . À quelle condition existe-t-il un vecteur fixe pour A ?

13.106 *Centrale Maths1 PSI 2022* Baptiste Savarit

Soit la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par $P_0 = 2$, $P_1 = X$ et $\forall n \geq 2, P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$.

- Étudier le degré, la parité et le coefficient dominant de P_n pour tout $n \geq 1$.

b. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$.

- Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet n racines réelles distinctes.

On admet que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ où $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $A_n(\mathbb{R})$) est le sous-espace vectoriel contenant les matrices symétriques (resp. antisymétriques).

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note S_M le projeté de M sur $S_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{R})$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $U \in O(n)$. Trouver, pour $k \in \mathbb{N}^*$, un polynôme Q_k tel que $S_{U^k} = Q_k(S_U)$.

13.107 *Mines PSI 2022* Noé Chassagne II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $n(A) = \text{Tr}(AA^T)$.

- Montrer que $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, n(AB) \leq n(A)n(B)$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, on note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A .

- Montrer que $(\lambda_n - \lambda_1)^2 \leq 2n(A)$. Caractériser le cas d'égalité.

13.108 *Mines PSI 2022* Tony Géraud I

Soit E l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$ dans E , on pose $(M|M') = aa' + 2bb' + cc'$.

- Montrer que E muni de $(\cdot, \cdot)$ est un espace euclidien de dimension 3.

On note $G = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \forall M \in E, \text{Tr}(f(M)) = \text{Tr}(M) \text{ et } \det(f(M)) = \det(M)\}$.

- Montrer que G est un sous-groupe de $(O(E), \circ)$.
- (question fausse) Montrer que G est l'ensemble des endomorphismes de E tels que $f(I_2) = I_2$.

13.109 *Mines PSI 2022* Louis Lacarrieu II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M + M^T$.

- a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- b. f est-il diagonalisable ?
- c. Déterminer les sous-espaces propres de f .

13.110 *Mines PSI 2022* Paul Mayé II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(X_1, \dots, X_n)$ de E telle que $(AX_1, \dots, AX_n)$ est une base orthogonale de E .

13.111 *CCINP PSI 2022* Margaux Millaret I

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice inversible telle que $A^2 = A^T$.

- a. Trouver un polynôme annulateur de A .
- b. En déduire les valeurs propres complexes possibles de A .
- c. En déduire la valeur de $\det(A)$.
- d. Quelles sont les valeurs possibles pour χ_A ?
- e. Montrer que A est orthogonale. Quelles sont les valeurs possibles de A ?

13.112 *CCINP PSI 2022* Camille Pucheu I

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$.

- a. Déterminer les valeurs propres de $M(a, b, c)$.
- b. Calculer $d = \det(M(a, b, c))$. Si $d = 0$, donner $\text{Ker}(M(a, b, c))$ et $\text{Im}(M(a, b, c))$.
- c. La matrice $M(a, b, c)$ est-elle diagonalisable ?
- d. Si $a = b$ et $c \neq 0$, donner des bases des sous-espaces propres de $M(a, a, c)$ et en déduire une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $M(a, a, c) = PDP^{-1}$.

13.113 *CCINP PSI 2022* Thibault Sourdeval I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice dans la base canonique.

Soit w l'endomorphisme de E canoniquement associé à A^T .

- a. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x)|y) = (x|w(y))$.
- b. Montrer que si F est un sous-espace stable par u , alors $F^\perp$ est stable par w .

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- c. Calculer χ_A . A^T et A sont-elles diagonalisables ?
- d. Donner les sous-espaces stables par u .

13.114 Mines-Télécom PSI 2022 Marius Desvalois I

Soit $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, (A, B) une famille libre de E et $F = \text{Vect}(A, B)$.

On pose $M = AB^T + BA^T$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M .

- a. Trouver $\text{Ker}(M)$.
- b. Déterminer $\text{rang}(M)$ et $\text{Im}(M)$.
- c. M est-elle diagonalisable ?
- d. Quelles sont les valeurs propres de M ?

13.115 Centrale Maths1 PSI 2023 Bader Ben Amira

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique avec sa base canonique $\mathcal{B}_0$.

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$.

On définit les deux endomorphismes p et q de E tels que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p)$ et $A^T = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(q)$.

- a. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2$, $(p(x)|y) = (x|q(y))$.
- b. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de E . Montrer que $\text{Tr}(q \circ p) = \sum_{k=1}^n \|p(v_k)\|^2$.
- c. Montrer que si p est un projecteur orthogonal, $\text{Tr}(q \circ p) = \text{Tr}(p)$.
- d. Dans le cas général, montrer que $\text{Tr}(q \circ p) \geq \text{Tr}(p)$.
- e. Montrer que $\text{Tr}(q \circ p) = \text{Tr}(p) \iff p$ est orthogonal.

13.116 Mines PSI 2023 Paul Bats II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ qu'on munit du produit scalaire $(A, B) \mapsto (A|B) = \int_0^1 A(t)B(t)dt$.

Pour $P \in E$, on définit le polynôme $u(P)$ par $u(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)dt$.

- a. Montrer que u est linéaire et à valeurs dans E .
- b. Montrer que u est autoadjoint.
- c. Montrer que u est bijectif.

13.117 Mines PSI 2023 Antoine Campos II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. on suppose que les valeurs propres de S comptées avec leur ordre de multiplicité se trouvent sur la diagonale de S .

Montrer que S est diagonale.

13.118 Mines PSI 2023 Juan Dupierris II

E désigne un espace euclidien de dimension finie non nulle.

- a. Montrer que si p est une projection orthogonale, alors p est symétrique.

Soit p, q deux projecteurs orthogonaux.

- b. Montrer que $p \circ q \circ p$ est symétrique.
- c. Montrer que $(\text{Im}(p) + \text{Ker}(q))^\perp = \text{Im}(q) \cap \text{Ker}(p)$.
- d. Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable à valeurs propres dans $[0; 1]$.

13.119 *Mines PSI 2023* Fares Kerautret I

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Donner tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par A .
- Quelle est la structure de $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$? Déterminer sa dimension.
- Quelles sont les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$) telles que $M^2 = A$?

13.120 *Mines PSI 2023* Nathan Roy II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

- Montrer que : A positive $\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = B^T B$.
- Montrer que : A définie positive $\iff \exists B \in GL_n(\mathbb{R}), A = B^T B$.
- On suppose A définie positive, montrer que $N : X \mapsto \sqrt{X^T A X}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

13.121 *Mines PSI 2023* Elae Terrien II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in (GL_n(\mathbb{R}))^2$, on dit que $A \sim B$ s'il existe une matrice $Q \in O(n)$ telle que $A = QB$.

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

- Montrer qu'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $M \sim S$.
- La matrice S est-elle unique ?

13.122 *Mines PSI 2023* Antoine Vallade II

Soit E un espace euclidien et $f : E \rightarrow E$ telle que $\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

On veut établir qu'il existe un unique couple $(u, g) \in E \times O(E)$ tel que $(P) : \forall x \in E, f(x) = u + g(x)$.

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (1 - y, 3 + x)$. Trouver l'unique couple $(u, g) \in E \times O(E)$ tel que $(P) : \forall v \in E, f(v) = u + g(v)$.
- Si $(u, g) \in E \times O(E)$ vérifie (P) , donner des expressions de u et g en fonction de f .
- Si $u \in E$ et $g : E \rightarrow E$ ont les expressions trouvées à la question précédente, montrer que :
 - $\forall x \in E, f(x) = u + g(x)$.
 - $\forall (x, y) \in E^2, (g(x)|g(y)) = (x|y)$.
 - $g \in O(E)$.

13.123 *CCINP PSI 2023* Hugo Delval I

Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{Sp}(M) = \{m_{1,1}, \dots, m_{n,n}\}$ (valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité).

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

On note S_n (resp. A_n) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Les matrices A et B sont-elles dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$?
- L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
- Montrer que si $M \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors M est diagonale en considérant $\text{Tr}(M^2)$.
- Déterminer $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n$.

13.124 CCINP PSI 2023 Pierre Dobeli III

Soit $n \geq 2$ et $J_n = (1)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Justifier que J_n est diagonalisable.
- Diagonaliser J_n très rapidement.

13.125 X PSI 2024 Jules Campistron I

- Soit $a, \lambda_1, \lambda_2, D_1, D_2$ des réels tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2$ et $D_1 \geq D_2$. Soit $A = \begin{pmatrix} D_1 & a \\ a & D_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont λ_1, λ_2 . Montrer que $\lambda_1 + \lambda_2 = D_1 + D_2$ et $\lambda_1 \geq D_1$.
- Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique dont les deux valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \lambda_2$ et soit D_1, D_2 des réels tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = D_1 + D_2$, $D_1 \geq D_2$ et $\lambda_1 \geq D_1$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que les matrices A et $\begin{pmatrix} D_1 & a \\ a & D_2 \end{pmatrix}$ soient orthosemblables.

13.126 ENS Cachan PSI 2024 Tiago Genet

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $d \geq 2$. Pour $u \in E$ unitaire et $a \in \mathbb{R}$, soit $f_a : x \mapsto x + a(x|u)u$.

- Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f_a \circ f_b = f_{a+b+ba}$.
- En déduire que $f_a \circ f_b = f_b \circ f_a$.
- Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $f_a^p = f_{(a+1)^p - 1}$.
- Montrer que f_a est inversible si et seulement si $a \neq -1$.
- Montrer que f_a est autoadjoint pour tout réel a .
- Montrer que f_a est une isométrie si et seulement si $a = 0$ ou $a = -2$.

Question supplémentaire :

- soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements disjoints, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

13.127 Centrale Maths1 PSI 2024 Axel Corbière

Soit E un espace euclidien dont on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et f un endomorphisme de E . On dit que f est une contraction si $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leq \|x\|$.

- Si f est autoadjoint, montrer l'équivalence entre des deux assertions suivantes :

- f est une contraction.
- $\forall \lambda \in \text{Sp}(f)$, $|\lambda| \leq 1$.

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que si f est autoadjoint et $x \in E$, $\|P(f)(x)\| \leq \left(\sup_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (|P(\lambda)|) \right) \|x\|$.

13.128 Centrale Maths1 PSI 2024 Nathan Jung

Soit E un espace euclidien de dimension $p \geq 1$ dont on note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit u un endomorphisme autoadjoint de E dont on note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_p$ les valeurs propres. On note enfin $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ la sphère unité de E .

- Montrer que $x \mapsto (u(x)|x)$ admet un minimum sur S .
- Montrer que $\lambda_1 = \min_{x \in S} ((u(x)|x))$.
- Montrer que $\lambda_2 = \min_{F \in \mathcal{E}_2} \left(\max_{x \in S \cap F} ((u(x)|x)) \right)$ où $\mathcal{E}_2$ est l'ensemble des plans vectoriels de E .

13.129 *Centrale Maths1 PSI 2024* Guillaume Leduc

Soit E un espace euclidien pour un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, v un vecteur non nul de E et $f : E \rightarrow E$ définie par $\forall x \in E$, $f(x) = x - \lambda(x|v)v$.

- f est-il un endomorphisme autoadjoint de E ?
- Pour quelles valeurs de λ l'endomorphisme f est-il une isométrie vectorielle ?
- On suppose que f est une isométrie vectorielle, déterminer les éléments caractéristiques de f .
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux réflexions commutent.

13.130 *Centrale Maths1 PSI 2024* Clément Reiner

Soit $U' = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \mid |z| = 1\}$ et $h : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $h(z) = \frac{1-z}{1+z}$.

- Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ dans lui-même.
- Montrer que h induit une bijection de U' dans $i\mathbb{R}$.
- Former une représentation de U' dans le plan complexe.
- Pour $\theta \in]-\pi; \pi[$, représenter dans le plan complexe le point d'affixe $h(e^{i\theta})$.

On note O' l'ensemble des matrices orthogonales de $O(2)$ dont -1 n'est pas valeur propre et on définit $H : O' \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $H(M) = (I_2 - M)(I_2 + M)^{-1}$.

- Justifier que H est bien définie et donner le spectre de $H(M)$ si $M \in O'$.
- Montrer que H réalise une bijection entre O' et les matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

13.131 *Centrale Maths1 PSI 2024* Guilhem Thébaud

Soit $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{Sp}(M) = \{m_{1,1}, \dots, m_{n,n}\}$ (valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité) : ces matrices sont dites à diagonale propre.

On note S_n (resp. A_n) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit à diagonale propre.
- Déterminer $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap S_n$.
- Trouver $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap A_n$.
- Montrer que si un sous-espace F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $F \subset \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, alors $\dim(F) \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

13.132 *Mines PSI 2024* Jules Campistron I

Soit $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ et $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(M) = \langle MX, X \rangle$.

- Déterminer $\Phi(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
- Déterminer $\Phi(O_n(\mathbb{R}))$.

13.133 *Mines PSI 2024* Armand Dépée I

On définit la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Pour un entier $n \geq 2$, on note $A_n = (f_{i+j-2})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Exprimer A_2 , A_3 , A_4 .
- Pour $n \geq 2$, quelle est la multiplicité de 0 pour A_n .
- Montrer qu'il existe deux valeurs propres de A_n non nulles α_n et β_n , telles que $\alpha_n < 0 < \beta_n$.
- Quelle est la nature de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$? Et de $(\beta_n)_{n \geq 2}$?

13.134 *Mines PSI 2024* Valentine Girard II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^T M M^T = I_n$.

13.135 *Mines PSI 2024* Antoine Métayer I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$. Si $A \neq 0 \in E$, on définit

l'application f_A qui à un polynôme $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne de P par A .

- Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .
- Montrer que f_A est un endomorphisme de E .
- Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que f_A soit un projecteur orthogonal.
- Trouver tous les polynômes A tel que f_A est un projecteur orthogonal si $n = 3$.

13.136 *CCINP PSI 2024* Yasmine Azzaoui II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A et A^T commutent.

- Montrer que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^T)$.
- Montrer que $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.
- En déduire qu'il existe $r \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et $P \in O(n)$ tels que $A = PBP^T$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $U \in GL_r(\mathbb{R})$.

13.137 *CCINP PSI 2024* Romane Mioque I

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^T M = M M^T$ et $M^2 + 2I_2 = 0$.

- La matrice $M^T M$ est-elle diagonalisable ?
- Montrer que $\text{Sp}(M^T M) \subset \{-2, 2\}$.
- Montrer que si $\lambda \in \text{Sp}(M^T M)$, alors $\lambda \geq 0$. En déduire $\text{Sp}(M^T M)$.
- Montrer que $\frac{1}{\sqrt{2}} M$ est orthogonale.
- Quelles sont les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^T M = M M^T$ et $M^2 + 2I_2 = 0$?

13.138 *Mines-Télécom PSI 2024* Mattéo Aumaitre II

Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne non nul et la suite de vecteurs colonnes $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall k \in \mathbb{N}$, $Y_k = \frac{S^k X}{\|S^k X\|}$.

Montrer que la suite $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur propre de S .

13.6 Officiel de la Taupe**13.139** *OdIT 2012/2013 Centrale PSI planche 111 I*

Soit 4 points A, B, C, D non coplanaires de l'espace $\mathcal{E}$ et $\mathcal{P} = \left\{ M \in \mathcal{E} \mid (\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}) \wedge (\overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{DM}) = \vec{0} \right\}$.

Établir que pour trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$, on a : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

Pour $M \in \mathcal{E}$, écrire $(\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}) \wedge (\overrightarrow{CM} \wedge \overrightarrow{DM})$ à l'aide du produit mixte.

Montrer que $\mathcal{P} = (AB) \cup (CD)$ (la réunion des deux droites (AB) et (CD)).

13.140 *OdIT 2012/2013 Centrale PSI planche 111 II*

Soit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui a des 0 partout sauf sur la dernière ligne et la dernière colonne où l'on trouve $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

13.141 *OdT 2012/2013 Centrale PSI planche 114 II*

Soit $n \geq 3$ et $\theta = \frac{2\pi}{n}$. Calculer le déterminant de la matrice $A + I_n$, où $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \cos((i+j)\theta)$. On pourra s'intéresser au rang de A et à ses éléments propres.

13.142 *OdT 2013/2014 Centrale PSI planche 134 II*

- a. Donner les éléments géométriques associés à la transformation s de matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
- b. Déterminer r , rotation d'axe dirigée par k unitaire et d'angle $\theta \in]0; 2\pi[$, telle que $s \circ r = r \circ s$.
- c. Même question avec l'hypothèse supplémentaire $\text{Tr}(r) = 0$.

13.143 *OdT 2013/2014 Mines PSI planche 192 I*

Pour M matrice symétrique réelle d'ordre n , définie positive, et $C \in \mathbb{R}^n$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}^n$ par $f_n(x_1, \dots, x_n) = {}^t X M X + 2 {}^t C X$ où X est le vecteur de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$. Trouver le minimum de f_n sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que si A et B sont symétriques réelles d'ordre n définies positives alors $A + B$ est inversible. Trouver $\text{Inf}\{{}^t X A X + {}^t Y B Y \mid X + Y = Z\}$ en fonction de Z fixé dans $\mathbb{R}^n$.

13.144 *OdT 2013/2014 Mines PSI planche 202 I*

On note $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs unitaires d'un espace euclidien E de dimension $n < p$. On suppose que si $i \neq j$, la distance $\|x_i - x_j\| = d > 0$ est constante. Exprimer d en fonction de p et en déduire que $p = n + 1$ (on pourra utiliser la matrice de coefficients égaux à $(x_i | x_j)$).

13.145 *OdT 2013/2014 CCP PSI planche 242 II*

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E muni d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Montrer que $\text{Tr}(f) = \sum_{k=1}^n (f(e_k) | e_k)$. Si f est autoadjoint et ses valeurs propres positives, montrer : $\forall x \in E, (f(x) | x) \geq 0$. Soit f, g deux endomorphismes autoadjoints dont les valeurs propres sont positives, montrer : $\text{Tr}(f \circ g) \geq 0$.

13.146 *OdT 2013/2014 E3A PSI planche 286 II*

- Soit (a, b) une famille libre d'un espace euclidien E .
- a. Montrer que $f(x) = (a | x)b - (b | x)a$ définit un endomorphisme de E .
- b. Est-ce un automorphisme ? Est-il diagonalisable ?

13.147 *OdT 2014/2015 X-Cachan PSI planche 60*

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et on note S_n^{++} l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, (u(x) | y) = (x | u(y))$ et $(u(x) | x) > 0$ si $x \neq 0$.

a. Montrer que $u \in S_n^{++} \implies (u \in \text{GL}(E) \text{ et } u^{-1} \in S_n^{++} \text{ avec une bon commune de vecteurs propres})$.

b. Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, (x | y)^2 \leq (u(x) | x)(u^{-1}(y) | y)$.

Pour $u \in S_n^{++}$, on note $\delta_i(u) = \inf_{(x | e_i) = 1} (u(x) | x)$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et on pose $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x | e_i) = 1\}$ l'hyperplan affine passant par e_i et de direction $\text{Vect}(e_i)^\perp$.

c. Montrer que si $(u, v) \in (S_n^{++})^2 : \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \delta_i(u + v) \geq \delta_i(u) + \delta_i(v)$. Montrer que $\delta_i(u) = \frac{1}{(u^{-1}(e_i) | e_i)}$.

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note A_i la matrice obtenue en supprimant dans A la ligne et la colonne i . On note A la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

d. Montrer que $(u^{-1}(e_i) | e_i) = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$, puis montrer que pour tout couple (A, B) associées à $(u, v) \in (S_n^{++})^2$,

on a $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \frac{\det(A_i + B_i)}{\det(A + B)} \geq \frac{\det(A_i)}{\det(A)} + \frac{\det(B_i)}{\det(B)}$.

13.148 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 161 II*

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique, on rappelle que $\|X\|_2 = \sqrt{{}^tXX}$.

- a. Montrer que $N(A) = \sup_{\|X\|_2=1} \|AX\|_2$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- b. Montrer que $N(A)$ n'est autre que $\sqrt{\rho(A)}$ avec $\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp({}^tAA)} |\lambda|$.

13.149 *OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 173 I*

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Existe-t-il un produit scalaire de $\mathbb{R}^2$ tel que u soit orthogonal ?

13.150 *OdIT 2014/2015 Centrale PSI planche 242 II* Soit E euclidien.

- a. Montrer que si $f \in O(E)$, alors $\det(f) = \pm 1$.
- b. Que dire de f de déterminant -1 en dimension 2 ?
- c. Que dire de f de déterminant 1 en dimension 3 ?
- d. Quel est le centre de $O(E)$ (l'ensemble des $u \in O(E)$ tels que $\forall v \in O(E), u \circ v = v \circ u$) ? De $SO(E)$?

13.151 *OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 280 II*

Soit A réelle, carrée de taille n , nilpotente d'indice p non nul, commutant avec sa transposée.

Montrer que tAA est nilpotente et en déduire toutes les matrices vérifiant les hypothèses de l'énoncé.

13.152 *OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 289 I*

Montrer que $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $X^tXX = I_n$ est inversible et symétrique. Trouver X .

13.153 *OdIT 2014/2015 E3A PSI planche 316 II*

Soit A une matrice réelle nilpotente qui commute avec sa transposée.

Que dire de $S = {}^tAA$? S et A ont-elles le même noyau ? Que dire de A ?

13.154 *OdIT 2015/2016 X-Cachan PSI planche 43*

Autour de la propriété (*) : toute matrice inversible A connaît une décomposition $A = OS$ où O est une matrice orthogonale et S une matrice symétrique définie positive.

- a. Démontrer que toute matrice symétrique définie positive est le carré d'une matrice symétrique définie positive, puis démontrer la propriété (*).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^n$ l'espace euclidien canonique, pour $d \in \llbracket 1; n \rrbracket$ on définit m sur E^d par la relation $m(x_1, \dots, x_d) = |\det_B(x_1, \dots, x_d)|$ si $(x_1, \dots, x_d)$ est libre dans toute base orthonormale B de l'espace F engendré par $(x_1, \dots, x_d)$ et $m(x_1, \dots, x_d) = 0$ sinon. Soit X_d l'ensemble des endomorphismes f de E tels que l'on ait $\forall (x_1, \dots, x_d) \in E^d, m(f(x_1), \dots, f(x_d)) = m(x_1, \dots, x_d)$.

- b. Justifier la définition de m et montrer que toutes les applications de X_d sont des automorphismes.
- c. Montrer que X_d contient les isométries vectorielles.

On choisit maintenant $d < n$.

- d. Quels sont les endomorphismes symétriques de X_d ?
- e. En déduire que X_d est l'ensemble des isométries vectorielles.
- f. Déterminer l'ensemble X_n .

13.155 *OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 126II*

Trouver une CNS sur $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ pour que $\Phi(X, Y) = \begin{vmatrix} A & X \\ {}^tY & 0 \end{vmatrix}$ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

13.156 *OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 130II*

Montrer que si A et B sont deux matrices symétriques réelles d'ordre n , telles qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^{2p+1} = B^{2p+1}$, alors $A = B$.

13.157 *OdIT 2015/2016 Centrale PSI planche 179*

Montrer que, dans E euclidien, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Quand y a-t-il égalité ?

Montrer que, si U et V sont deux matrices orthogonales complexes (c'est-à-dire vérifiant ${}^t\bar{U}U = {}^t\bar{V}V = I_n$) telles que $\forall X \in \mathbb{C}^n, UX + VX = 2X$, alors $UX = VX = X$.

13.158 *OdIT 2015/2016 Centrale PSI planche 184*

Soit $\lambda > 0$; montrer qu'il n'existe aucune matrice antisymétrique telle que $A^2 = \lambda I_n$.

Donner une CNS sur $\lambda \in \mathbb{R}$ et sur $n \in \mathbb{N}$ pour qu'il existe une matrice antisymétrique telle que $A^2 = \lambda I_n$.

Soit $\lambda < 0$ et A antisymétrique telle que $A^2 = \lambda I_n$; montrer qu'il existe un réel μ tel que A soit orthogonalement semblable à la matrice diagonale par blocs, de blocs diagonaux $\begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$.

13.159 *OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 234I*

Soit A une matrice réelle, carrée de taille n , nilpotente d'indice p et commutant avec sa transposée. Montrer que $A^t A$ est nilpotente et en déduire toutes les matrices répondant au problème.

13.160 *OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 236II*

Montrer que si A est réelle, carrée d'ordre n et antisymétrique, alors $\forall X \in \mathbb{R}^n, {}^tXAX = 0$.

Montrer que si B est symétrique, réelle et a toutes ses valeurs propres strictement positives, alors la matrice $A + B$ est inversible.

13.161 *OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 238II*

- Montrer que si λ est une valeur propre d'une matrice A , λ est racine de tout polynôme annulateur de A .
- Déterminer les matrices symétriques réelles telles que $A^3 + 4A = I_n$.

13.162 *OdIT 2015/2016 E3A PSI planche 268II*

Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{i,j}$.

Montrer que $\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} \right| \leq n \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}| \leq n^{3/2}$.

13.163 *OdIT 2015/2016 E3A PSI planche 273I*

Soit u un vecteur non nul fixé de $\mathbb{R}^3$; donner l'image et le noyau de $f(x) = u \wedge x$ puis calculer $f \circ f$ (on rappelle que $a \wedge (b \wedge c) = (a|c)b - (a|b)c$).

Déterminer la matrice A de f dans la base canonique et donner A^2 .

Calculer f^n en fonction de $\alpha = \|u\|$, f et f^2 , puis $\exp(f) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^n$.

Comment déterminer la nature géométrique de cet endomorphisme ?

13.164 *OdIT 2015/2016 ENTPE-EIVP planche 277I*

Soient n réels $a_1, \dots, a_n$ tel que $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$. On pose $s_{i,i} = 1 - a_i^2$ et, pour $i \neq j$, $s_{i,j} = -a_i a_j$.

Trouver les éléments propres de la matrice S de coefficients $s_{i,j}$.

13.165 *OdIT 2015/2016 ENTPE-EIVP planche 278I*

Montrer que si λ est une valeur propre d'une isométrie vectorielle u dans E euclidien, la dimension du sous-espace qui lui est associé est égale à son ordre de multiplicité.

13.166 *OdIT 2015/2016 ENSEA planche 281II*

Éléments propres de $M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 + \theta \cos \frac{2}{\theta} & -\theta \sin \frac{2}{\theta} \\ -\theta \sin \frac{2}{\theta} & 1 - \theta \cos \frac{2}{\theta} \end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}^*$. Est-elle diagonalisable ?

13.167 *OdIT 2015/2016 Télécom SudParis planche 285II*

Montrer que $u(x) = a \wedge x$ où $a \in \mathbb{R}^3$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont on donnera le noyau et l'image.

13.168 *OdIT 2015/2016 Télécom SudParis planche 287II*

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E , de valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

Montrer que $\forall x \in E, \lambda_1 \|x\|^2 \leq (x|u(x)) \leq \lambda_n \|x\|^2$.

13.169 *OdIT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 35 abordable dès la 1^{ère} année*

Soit $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $d_1, \dots, d_n$ des réels distincts deux à deux. Étudier l'image de l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(X) = DX - XD$.

Soit trois réels u, v, w ; montrer qu'il existe un réel x tel que : $u \cos^2 x + v \sin^2 x + w \sin x \cos x = \frac{u+v}{2}$.

Montrer que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \left| z - \frac{x+y}{2} \right| \leq \max(|z-x|, |z-y|)$ avec égalité si et seulement si $y = x$.

On suppose que (1) : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists P \in O_n(\mathbb{R}), PAP^{-1}$ a tous ses coefficients diagonaux égaux.

Montrer que $\text{Tr } A = 0$ si et seulement si $\exists (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, A = XY - YX$.

Montrer que la propriété (1) est vraie dans le cas $n = 2$. On note δ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\delta(M) = \max_{1 \leq i, j \leq n} |m_{i,i} - m_{j,j}|$. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le réel $\min_{P \in O_n(\mathbb{R})} \delta(PAP^{-1})$ existe.

Montrer que si $\delta(A) > 0, \exists P \in O_n(\mathbb{R}), \delta(PAP^{-1}) < \delta(A)$ (on pourra faire une récurrence sur n) et conclure.

13.170 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 104I*

Donner la définition d'un projecteur orthogonal d'un espace E euclidien. Soit p et q deux projecteurs orthogonaux de E ; montrer que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Montrer que toutes les valeurs propres de u sont dans $[0; 2]$. Déterminer $\text{Ker } u$ et $\text{Ker } (u - 2\text{id}_E)$.

13.171 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 106II*

Soit E euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que u est une homothétie si et seulement s'il commute avec tout automorphisme orthogonal de E .

Existe-t-il toujours une base canonique dans un espace vectoriel ? Si oui, y en a-t-il une seule ? Plusieurs ?

Une infinité ? Si u commute avec toutes les symétries par rapport à un hyperplan de E , qu'en déduit-on ?

13.172 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 112II*

On note $S_n(I)$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n dont les valeurs propres sont dans l'intervalle non vide I . Montrer que $\forall S \in S_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n, \left(\min_{\lambda \in Sp(S)} \lambda \right)^t X X \leq {}^t X S X$.

Montrer que $S_n(I)$ est une partie convexe de $S_n(\mathbb{R})$.

13.173 *OdIT 2016/2017 Mines PSI planche 120II*

Montrer qu'un endomorphisme symétrique s d'un espace euclidien est ρ -lipschitzien ssi ses valeurs propres sont de module au plus égal à ρ . Dans le cas général, montrer que seul un sens de l'équivalence est vrai.

13.174 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 206II abordable dès la 1^{ère} année*

Pour $a \neq 0_E$ dans E euclidien, déterminer les $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $u(x) = \alpha(x|a)a - x$ est une isométrie.

13.175 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 213I*

Reconnaître l'endomorphisme f représenté par $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale.

13.176 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 216I*

Pour $n \geq 3$, on cherche à déterminer les matrices symétriques réelles de taille n telles que $A^3 + 4A^2 + 5A = 0$. Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont racines d'un polynôme de degré 3 ; conclure.

13.177 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 217II*

- a. Déterminer un polynôme annulateur de A réelle, non nulle, carrée de taille 2 et telle que $A^2 = A^T$.
- b. Déterminer $\text{Sp}(A)$ s'il contient 0. Montrer que A est alors orthogonalement semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- c. Déterminer $\text{Sp}(A)$ si A n'a pas de valeur propre réelle. Que peut alors valoir A ?

13.178 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 219II*

Montrer que A carrée, d'ordre n , réelle, est symétrique à valeurs propres positives, si et seulement s'il existe une matrice B telle que $A = {}^tBB$.

13.179 *OdIT 2016/2017 EIVP PSI planche 246II*

Si ϕ est un endomorphisme symétrique de E euclidien, comparer $\sup_{\|u\|=1} \|\phi(u)\|$ et $\sup_{\|u\|=1} |(\phi(u)|u)|$.

13.180 *OdIT 2016/2017 ENSEA PSI planche 250I*

Reconnaître l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ représenté dans la base canonique par la matrice M dont les coefficients diagonaux valent $1 - \frac{1}{n}$ et tous les autres $-\frac{1}{n}$. Donner les éléments propres de f .

Exprimer $f(x)$ pour tout x (on pourra introduire $u = \sum_{i=1}^n e_i$).

13.181 *OdIT 2017/2018 X-Cachan PSI planche 39*

On note E l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_{\mathbb{R}} f^2$ existe.

Montrer que $[f, g] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt$ munit E d'un produit scalaire.

Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E^{(\mathbb{N}^*)}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = ((\varphi_i | \varphi_j))_{(i,j) \in \llbracket 1;n^2 \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que Q_r soit inversible.

Montrer que la plus petite valeur propre de Q_r est strictement positive.

Montrer que $\varphi_{r+1} \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ si et seulement si Q_{r+1} est non inversible.

On suppose que pour tout $(i, j, k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \times \mathbb{N}$, $(\varphi_{i+k} | \varphi_{j+k}) = (\varphi_i | \varphi_j)$ et Q_{r+1} non inversible.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$.

13.182 *OdIT 2017/2018 Mines PSI planche 115I*

Dans E euclidien, on note $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques à valeurs propres positives.

Montrer que, si $f \in S^+(E)$, $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$, que $\exists h \in S^+(E)$, $h^2 = f$.

Montrer que si $(f, g) \in (S^+(E))^2$, alors on a $\text{Ker}(f + g) = \text{Ker } f \cap \text{Ker } g$ et $\text{Im}(f + g) = \text{Im } f + \text{Im } g$.

13.183 *OdIT 2017/2018 CCP PSI planche 208I, abordable dès la première année*

a. Calculer $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos(k\theta)$ et $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(k\theta)$ pour $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, puis donner leur limite en $+\infty$.

b. On note r une rotation d'angle θ en dimension 2 ou 3. Calculer, pour $x \in E$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n r^k(x)$.

c. Montrer que si u est une isométrie de E euclidien, $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$ et $\text{Im}(u - \text{id}_E)$ sont supplémentaires et orthogonaux. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u^k(x)$.

13.184 *OdIT 2017/2018 CCP PSI planche 213II*

Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle, vérifie $A^3 + 9A = 0$, ses valeurs propres possibles sont 0, $3i$ et $-3i$; est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Montrer que A n'est pas inversible pour n impair. Montrer que A ne peut pas être symétrique.

13.185 *OdIT 2017/2018 E3A PSI planche 243I*

Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique vérifie $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, {}^tXMX > 0$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont réelles et strictement positives. Montrer alors que M est inversible et que M^{-1} vérifie la même propriété.

Montrer que si A et B vérifient cette propriété, $A + B$ est inversible.

Trouver l'ensemble des couples (A, B) de la question précédente tels que $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

13.186 *Compléments OdIT 2017/2018 Mines PSI planche 153II*

Soit E euclidien de dimension n , u un endomorphisme de E tel que $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = -(x|u(y))$.

Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle u a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \Delta_k & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0_{n-2k} \end{pmatrix}$$

où $\Delta_i = \begin{pmatrix} 0 & -a_i \\ a_i & 0 \end{pmatrix}$ et $a_i \in \mathbb{R}^*$.

13.187 *Compléments OdIT 2017/2018 Centrale PSI planche 310*

Soit E euclidien de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et p un projecteur de E .

a. Questions de cours : qu'est-ce qu'un espace euclidien ? quelles sont les particularités d'un projecteur ? qu'est-ce qu'une base orthonormée ?

b. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme symétrique (c'est-à-dire que $\forall (x, y) \in E^2, (x|p(y)) = (p(x)|y)$).

c. Si p est orthogonal, que vaut $\sum_{k=1}^n \|p(e_k)\|^2$?

Soit p^* l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ vaut tA si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$.

d. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2, (p(x)|y) = (x|p^*(y))$.

e. Montrer que $\text{Ker}(p^* \circ p) = \text{Ker}(p)$.

13.188 *Compléments OdIT 2017/2018 CCP PSI planches 434I et 436I*

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a une valeur propre réelle ν associée au vecteur propre X . Montrer que $S = \frac{1}{2}(A + {}^t A)$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles ; on les notera $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Montrer que $\lambda_1 \leq \nu \leq \lambda_n$.