

ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 14

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

14.1 Équations linéaires scalaires d'ordre 1

14.1 *Centrale PSI 2013*

- a. Quels sont les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $t \mapsto t^\alpha$ se prolonge en une fonction nulle en 0 de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$?
- b. En déduire les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et non nulle qui vérifie la relation : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^x tf(t)dt = kx \int_0^x f(t)dt$.

14.2 *Centrale PSI 2012* Soit $\alpha > 0$ et l'équation (E) : $xy' + \alpha y = \frac{1}{1+x}$ qu'on va résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$.

- a. Résoudre (E) et montrer qu'il existe une unique solution y_0 de (E) qui admet une limite finie en 0^+ : vous en donnerez une expression à l'aide d'une intégrale.
- b. Déterminer le développement en série entière de y_0 au voisinage de 0.

14.3 Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = |y - t|$.

14.4 *Centrale PSI 2013* Montrer que l'équation (E) : $ty' + y = \frac{1}{t-1}$ possède une unique solution sur $] -\infty; 1[$, et que cette solution est de classe C^∞ .

14.5 Résoudre l'équation (E) : $t(t^2 - 1)y' + 2y = t^2$.

14.6 Trouver toutes les $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$.

14.7 a. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue de limite nulle en $+\infty$.

Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' + y = h$ converge vers 0 en $+\infty$.

- b. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 , on suppose que $\lim_{+\infty} (f + f') = \ell \in \mathbb{C}$, montrer que $\lim_{+\infty} f = \ell$.

14.8 *Centrale PSI 2012* On se donne l'équation différentielle : (E) : $ty' = |y - 1|$.

- a. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Tracer quelques-unes de ses solutions.
- b. Montrer que si $z : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de (E) alors $y : t \rightarrow z(-t)$ l'est sur $\mathbb{R}_-^*$.
En déduire l'allure des solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}$.

14.9 *Centrale PSI 2012* On se donne l'équation différentielle (E) : $t(1-t)y' + (t-2)y = (t-2)e^{t-1}$ et son équation homogène associée dont on cherche les solutions $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle réel.

- a. Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{t-2}{t(1-t)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1}$ pour $t \notin \{0, 1\}$.

En déduire les solutions de (E) sur des intervalles I ne contenant ni 0 ni 1.

- b. Décrire les solutions de (E) sur $] -\infty; 1[$, sur $]0; +\infty[$ et enfin sur $\mathbb{R}$.

14.2 Équations linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants

14.10 *Centrale PSI 2012* Soit (E) : $f''(-t) + f(t) = \sin(t) + t^2$.

- Établir que toute $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se décompose d'une unique manière comme somme d'une fonction paire g et d'une fonction impaire $h : f = g + h$; et que $(f \text{ de classe } C^2) \iff (g \text{ et } h \text{ de classe } C^2)$.
- En déduire les solutions de (E).

14.3 Équations linéaires scalaires d'ordre 2

14.11 On considère l'équation différentielle (E) : $xy'' - y' - x^3y = 0$.

- Montrer que si y est solution sur I alors $x \mapsto y(-x)$ est solution sur $I' = -I$.
- Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation via le changement de variable $t = x^2$.
- Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

14.12 Soit l'équation différentielle (E) : $t^2y'' - ty' + y = 0$ qu'on veut résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$. Trouver une fonction polynomiale y_1 solution de (E). On cherche une solution y_2 solution de (E) indépendante de y_1 . On pose $w(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$. Quelle équation différentielle est vérifiée par w ? En déduire une expression de $y_2(t)$ qui convient.

14.13 *Mines PSI 2010 d'après RMS* Soit l'espace vectoriel $E = \{f \in C^2([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.

Pour toute fonction $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

- Montrer que N est une norme.
- Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que : $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq c N(f)$.

14.14 *Centrale PSI 2012* On se donne l'équation différentielle (E) : $t^2y'' - ty' - 3y = 5t^4$ et son équation homogène associée $(E_0) : t^2y'' - ty' - 3y = 0$ dont on cherche les solutions $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle.

- Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y_\alpha : t \mapsto t^\alpha$ soit solution de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- En déduire les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}$.
Quelle est dans chacun des trois cas la dimension de l'espace vectoriel des solutions de (E_0) ?
- Chercher une solution particulière y_0 polynomiale de (E). Donner l'allure globale des graphes des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ (on note $S_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$).
- $\varphi_1 : y \mapsto (y(1), y'(1))$ et $\varphi_2 : y \mapsto (y(-1), y(1))$ sont-elles des bijections de $S_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^2$?

14.15 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f + f'' \geq 0$. Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x + \pi) \geq 0$.

14.16 Résoudre l'équation (E) : $(1 + t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = 0$ en recherchant les fonctions DSE solutions.

14.17 *Centrale 2012 PSI*

- Résoudre l'équation différentielle (E) : $4xy'' + 2y' + y = 0$ sachant que sur un certain intervalle J , il existe deux solutions f et g de (E) telles que $fg = 1$.

Indication : on pourra montrer d'abord qu'avec ces conditions, on a $4xf'^2 + f^2 = 0$.

- Proposer une autre méthode étant donnés les résultats.

14.18 Soit I un intervalle et $q_1, q_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant $q_1 \leq q_2$. On note φ_1 et φ_2 deux solutions sur I respectivement de $(E_1) : y'' + q_1 y = 0$ et $(E_2) : y'' + q_2 y = 0$. On suppose φ_1 non identiquement nulle.

a. Montrer que les zéros de φ_1 sont isolés : c'est-à-dire que si un réel $t_0 \in I$ vérifie $\varphi_1(t_0) = 0$ alors $\exists \alpha > 0, \forall t \in I \cap [t_0 - \alpha; t_0 + \alpha], \varphi_1(t) = 0 \implies t = t_0$.

b. Soit $a < b$ deux zéros consécutifs de φ_1 . Montrer que φ_2 s'annule sur $[a; b]$.

Indication : étudier $w = \varphi_1 \varphi_2' - \varphi_2 \varphi_1'$.

c. Application : montrer que si φ est une solution non nulle de l'équation $(E) : y'' + e^t y = 0$ alors $\forall a \in \mathbb{R}_+, \exists t \in [a; a + \pi], \varphi(t) = 0$.

14.19 Résoudre sur $] -1; 1[$ l'équation $(E) : 4(1 - t^2)y'' - 4ty' + y = 0$ en recherchant les fonctions DSE.

Et sur d'autres intervalles ?

14.4 Systèmes différentiels linéaires

14.20 Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $u \in E$ unitaire. Résoudre l'équation $x' = u \wedge x$.

14.21 Résoudre le système différentiel suivant
$$\begin{cases} x' &= 2x - y + 2z \\ y' &= 10x - 5y + 7z \\ z' &= 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

14.22 Résoudre le système différentiel suivant
$$\begin{cases} x' &= 2y + 2z \\ y' &= -x + 2y + 2z \\ z' &= -x + y + 3z \end{cases}$$

14.5 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

14.23 *CCP PSI 2013* Adrien

Soit $(E) : (1 + x^2)y'' - 2y = 0$.

a. Montrer qu'il existe une unique solution polynomiale y de (E) vérifiant $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

On pourra d'abord déterminer le degré de ce polynôme.

b. Déterminer toutes les solutions de (E) . On pourra utiliser : $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \frac{x}{1+x^2} + \int_0^x \frac{2t^2 dt}{(1+t^2)^2}$.

14.24 *Mines PSI 2014* Soufiane

Soit E l'espace des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $\Phi : E \rightarrow E$ définie par $\Phi(f) = g$ où $g(t) = f'(t) + tf(t)$.

a. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ .

b. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ^2 .

c. Résoudre l'équation $(E) : y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

14.25 *CCP PSI 2014* Lucie

Soit $(E) : x(x-1)y' + y = \ln(x)$.

a. Montrer que (E) admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ notée f .

b. Soit $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x) dx$. Montrer son existence et calculer sa valeur.

c. Calculer $\int_0^1 f(x) dx$ après avoir justifié son existence. On rappelle que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

14.26 ENSAM PSI 2014 Mohammed

Résoudre (E) : $(e^t - 1)y' + (e^t + 1)y - (3 + 2e^t) = 0$.

14.27 ENS Cachan PSI 2015 Alberto Alonso

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on s'intéresse au système différentiel de $\mathbb{R}^n$: $X_j'(t) = AX_j(t)$ avec $X_j(0) = e_j$ (vecteur de la base canonique).

On note $X_{i,j}(t)$ la i -ième coordonnée du vecteur $X_j(t)$ et on définit $X(t) = (X_{i,j}(t))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer que $X_j(t)$ est bien défini pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- Montrer que $\det(X(t)) \neq 0$.
- Trouver une équation différentielle vérifiée par $\det(X(t))$.
- Montrer que : $\text{Tr}(A) = 0 \implies (\forall t \in \mathbb{R}, \det(X(t)) = 1)$.

14.28 Centrale Maths1 PSI 2015 Agatha Courtenay

Soit $a \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit f une solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation (E) : $y'' + (1 + a)y = 0$.
Posons $g : x \mapsto f(x) + \int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t)dt$.

- Est-ce que $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = 0$?
- Montrer que $g'' + g = 0$.
- Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq C + \int_0^x |a(t)f(t)|dt$.
- Conclure quant aux solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

14.29 Mines PSI 2015 Gabriel Olympie

Soit μ un réel quelconque. Soit l'équation (E) : $xy' + \mu y = \frac{1}{1+x}$. Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$.
Déterminer en fonction de μ les solutions qui admettent une limite finie en 0.

14.30 CCP PSI 2015 Clément Suberchicot

Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}$.

14.31 E3A PSI 2015 Jean-Baptiste Biehler

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Justifier que A est diagonalisable. La diagonaliser.
- Résoudre le système différentiel : (S) : $\begin{cases} x' &= 2x + y + z \\ y' &= x + 2y + z \\ z' &= x + y + 2z \end{cases}$.

14.32 ENS-Cachan PSI 2016 Jean Migliorini I

Soit l'équation différentielle $(E_\lambda) : (1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les polynômes $U_n = (x^2 - 1)^n$ et $P_n = U_n^{(n)}$.

- Calculer $(x^2 - 1)U_n'$ en fonction de U_n . Montrer que P_n est solution de $(E_{n(n+1)})$.
- Soit u une solution de $(E_{n(n+1)})$ et $W = u'P_n - uP_n'$ (wronskien de la famille (u, P_n)). Trouver une équation différentielle vérifiée par W . La résoudre.
- Montrer que seuls les αP_n , pour $\alpha \in \mathbb{C}$, sont solutions C^2 de $(E_{n(n+1)})$ sur $[-1; 1]$.

14.33 *Mines PSI 2016* Samuel Cailleaux II

Soit $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $(E) : y'' + qy = 0$. Soit f une solution de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

a. Forme de l'ensemble des solutions de (E) . Structure ? Dimension ?

b. Unicité de f ? Prouver que les zéros de f sont isolés.

Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}, q(x) \leq 0$.

c. Prouver que f^2 est convexe.

d. Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 1$.

14.34 *Mines PSI 2016* Paul Mondou et Romain Morgavi I

Soit $p \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les solutions f de l'équation : $\forall t \in \mathbb{R}, f^{(3)}(t) - f(t) = e^{pt}$.

14.35 *ENS Cachan PSI 2017* Vincent Bouget

Soit $c, f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose $c \geq 0$. On considère les problèmes suivants :

• (1) $-u''(x) + c(x)u(x) = f(x)$ pour $x \in [0; 1]$ avec $u(0) = u(1) = 0$.

• (2) $-u''_\lambda(x) + c(x)u_\lambda(x) = f(x)$ pour $x \in [0; 1]$ avec $u_\lambda(0) = 0, u'_\lambda(1) = \lambda$.

a. Montrer qu'il existe une unique solution de (2) qui appartienne à $C^2([0; 1], \mathbb{R})$.

b. Montrer qu'il existe une unique solution de (1) qui appartienne à $C^2([0; 1], \mathbb{R})$.

Indication : montrer que $\lambda \mapsto u_\lambda(1)$ est affine.

c. Montrer que $f \geq 0 \implies u \geq 0$.

14.36 *ENS Cachan PSI 2017* Corentin Gatellier I

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^{+\infty} |g(t)| dt$ converge et l'équation différentielle $(E) : y'' + gy = 0$.

a. Montrer que si y est une solution bornée de (E) , alors y' tend vers 0 en $+\infty$.

b. Soit y_1 et y_2 des solutions bornées de (E) . Montrer que $y_1 y'_2 - y_2 y'_1 = 0$.

c. Montrer que (E) admet des solutions non bornées.

14.37 *Mines PSI 2017* Romain Delon II

Résoudre le système différentiel $(S) : \begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$.

Vous donnerez d'abord les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

14.38 *Mines PSI 2017* Élio Garnaoui II

Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. On considère le système différentiel $(S) : X' = AX$.

a. On suppose n impair. Montrer que A n'est pas inversible et qu'il existe une solution X_0 non nulle constante de (S) . Montrer que toute solution est incluse dans un hyperplan affine ; c'est-à-dire qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que si $X : t \mapsto \sum_{k=1}^n x_k(t) e_k$ est une solution de (E) , alors x_n est constante.

b. On suppose à nouveau n quelconque. Si X et Y sont solutions de (E) , montrer que $X^T Y$ est constant. En déduire que toutes les solutions de (S) sont bornées.

14.39 *Mines PSI 2017* Iñigo Saez-Casares II

Soit $f :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

On suppose que $\forall x \in]0; 1[, f(x) = \int_{1-x}^1 \frac{f(t)}{t} dt$. Déterminer f .

14.40 *CCP PSI 2017* Claire Meunier I

Soit le système différentiel (S) : $\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = -2x - y \end{cases}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Trigonaliser A et en déduire la résolution du système (S).

14.41 *Centrale Maths1 PSI 2018* Erwan Dessailly

Soit le système différentiel (S) : $\begin{cases} x' = -x + 2y - 3z \\ y' = -x + 2y - z \\ z' = x - y + 3z \end{cases}$

a. Mettre ce système sous la forme $X' = AX$. Calculer χ_A .

b. La matrice A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?

c. Trouver un vecteur $v_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect}(v_1)$. Montrer que $\text{Ker}((A - I_3)^2) \setminus \text{Vect}(v_1) \neq \emptyset$.

d. En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Résoudre (S).

Questions de cours :

- que peut-on dire de l'ensemble E des solutions de (S) ?
- que se passe-t-il si les coefficients dépendent du temps ? Peut-on résoudre ? Qu'arrive-t-il à E ?
- que dire du polynôme caractéristique et du polynôme minimal d'un endomorphisme ?
- discuter le cas d'une matrice de passage non constante.

14.42 *Centrale Maths1 PSI 2018* Benoit Souillard

Soit le système différentiel (S) : $\begin{cases} y_1' = \frac{3}{t^2} y_2 \\ y_2' = 2y_1 \end{cases}$

a. Montrer que (S) admet sur $\mathbb{R}_+^*$ des solutions de la forme $(y_1, y_2) = (C_1 t^\alpha, C_2 t^\beta)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer en trouvant un lien entre les réels C_1 et C_2 .

b. Justifier que l'ensemble E des solutions de (S) sur $\mathbb{R}_+^*$ est un espace de dimension 2. En donner une base.

c. Quelles sont les solutions de (S) sur $\mathbb{R}_-^*$?

14.43 *Mines PSI 2018* Charlotte Beaune et Santiago Monteagudo I

a. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $y'' - 9y = a|t| + b$.

b. Montrer que (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$ dont le graphe possède une asymptotes en $\pm\infty$.

14.44 *Mines PSI 2018* Pauline Lamaignère II

Déterminer les solutions de l'équation (E) : $2t(1+t)y' + (1+t)y = 1$ sur des intervalles à préciser.

Indication : on pourra chercher une solution DSE de (E).

14.45 *Mines PSI 2018* Martin Monsel II

On pose $E = C^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$ et on définit $\varphi : E \rightarrow E$ par $\forall x > 0, \varphi(f)(x) = x^2 f'(x) + 2if(x)$.

a. On pose $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0, f_k(x) = x^k e^{\frac{2i}{x}}$. Calculer $\varphi(f_k)$. Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est libre pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. L'application φ est-elle injective ?

On note, pour $m \in \mathbb{N}$, $F_m = \text{Vect}(f_0, \dots, f_m)$ et on définit $\psi_m : F_m \rightarrow F_{m+1}$ par $\psi_m(f) = \varphi(f)$.

b. Quel est le rang de ψ_m ?

c. Montrer que f_n est prolongeable par continuité en 0 si $n \geq 1$.

d. À quelle condition sur n la fonction f_n est-elle dérivable en 0 ? De classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$?

14.46 *E3A PSI 2018* Colin Baumgard

On considère le système (S) :
$$\begin{cases} x' &= -3x - 6y + 4z - t - 6 \\ y' &= 2x + 3y - 2z + 4 \\ z' &= -y + z - t \end{cases}$$

a. Mettre (S) sous la forme $X' = AX + B(t)$.

b. Diagonaliser A et résoudre le système homogène $(S_0) : X' = AX$.

c. Trouver une solution particulière "simple".

d. En déduire l'ensemble des solutions réelles de (S).

14.47 *E3A PSI 2018* Amélie Guyot

On suppose que le rayon de $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ vérifie $R' \geq 1$. On pose $\forall x \in]-1; 1[, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

On se donne l'équation différentielle (E) : $(1-x)y' + y = g(x)$.

a. Résoudre l'équation homogène $(E_0) : (1-x)y' + y = 0$.

Soit y une solution développable en série entière de (E) écrite $\forall x \in]-r; r[, y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $r > 0$.

b. Montrer que $a_1 = b_0 - a_0$ et $\forall n \geq 2, a_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k b_k$.

c. En déduire que le rayon R de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vérifie $R \geq 1$.

d. Résoudre (E) dans le cas où $g(x) = -\ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$.

14.48 *E3A PSI 2018* Claire Raulin

Soit (E) : $2t^2 y'' + y = 0$ et y solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $z : u \mapsto y(e^u) e^{-u/2}$.

a. Exprimer $y(t)$ en fonction de $z(\ln(t))$.

b. Montrer que z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (E').

c. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

14.49 *ENS Cachan PSI 2019* Mathis Chénet

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 telle que $\exists \alpha \in \mathbb{C}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (f'(t) - \alpha f(t)) = 0$.

a. Montrer que $\forall x \geq 0$, $f(x) = f(0)e^{\alpha x} + \int_0^x (f'(t) - \alpha f(t))e^{\alpha(x-t)} dt$.

b. Supposons que $\operatorname{Re}(\alpha) < 0$, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Soit maintenant un entier $n \geq 1$ et $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(P) = n$ (ie $a_n \neq 0$).

Pour $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^n , on note $P(D)f = \sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}$.

c. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- $\forall f \in C^n(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(D)f(x) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- Toutes les racines de P ont des parties réelles strictement négatives.

14.50 *ENS Cachan PSI 2019* Romain Cornuault

Soit $y, \Phi, \Psi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ trois fonctions continues telles que $\forall t \in [a; b]$, $y(t) \leq \Phi(t) + \int_a^t \Psi(s)y(s) ds$.

On pose $F(t) = \int_a^t \Psi(s)y(s) ds$.

a. Montrer que $\forall t \in [a; b]$, $F(t) \exp\left(-\int_a^t \Psi(s) ds\right) \leq \int_a^t \Psi(s)\Phi(s) \exp\left(-\int_a^s \Psi(u) du\right) ds$.

b. Montrer que $\forall t \in [a; b]$, $y(t) \leq \Phi(t) + \int_a^t \Psi(s)\Phi(s) \exp\left(\int_s^t \Psi(u) du\right) ds$.

c. Supposons que $\forall t \in [a; b]$, $\Phi(t) = c \geq 0$. Montrer que $\forall t \in [a; b]$, $y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t \Psi(s) ds\right)$.

d. Soit $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continues telles que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) \leq \int_0^t f(s)g(s) ds$. Montrer que f est nulle.

Soit $(a, m) \in [0; 1] \times [0; 1]$ et $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continues telles que $\forall t \geq 0$, $f(t) \leq af(mt) + \int_0^t f(s)g(s) ds$.

e. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) \leq a^n f(m^n t) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right) \int_0^t f(s)g(s) ds$. Qu'en déduire sur f ?

14.51 *ENS Cachan PSI 2019* Tanguy Sommet

Soit $A : [0; +\infty[\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction 1-périodique de classe C^1 .

On s'intéresse à l'équation (E) : $X'(t) = A(t)X(t)$ d'inconnue $X : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 .

On admet, c'est le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ version matricielle, que si $Y \in \mathbb{R}^n$ est fixé, il existe une unique solution $X : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ de (E) telle que $X(0) = Y$.

On note, pour $t \geq 0$ et $Y \in \mathbb{R}^n$, $v_t(Y) = X(t)$ avec la solution X de (E) de la ligne précédente.

On appelle $R(t)$ la matrice de v_t dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a. Pour $t \geq 0$, exprimer $X(t)$ en fonction de $R(t)$ et $X(0)$.

b. Montrer que $\forall t \geq 0$, $R'(t) = A(t)R(t)$ et que $R(0) = I_n$.

Soit $W : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $W(t) = \det(R(t))$.

c. Montrer que $\forall t \geq 0$, $W'(t) = \operatorname{Tr}(A(t))W(t)$. Indication : on pourra écrire $W(t) = \begin{vmatrix} \cdots L_1(t) \cdots \\ \vdots \\ \cdots L_n(t) \cdots \end{vmatrix}$ en

notant $L_i(t)$ la i -ième colonne de la matrice $R(t)$. En déduire que $R(t)$ est inversible en tout instant $t \geq 0$.

- d. Montrer que $\forall t \geq 0, R(t+1) = R(t)R(1)$.
- e. Montrer qu'il existe une solution X de (E) non identiquement nulle, de classe C^1 et 1-périodique si et seulement si $1 \in \text{Sp}(R(1))$.
- On suppose dans la suite que $R(1) = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_k > 0$.
On pose $\Lambda(t) = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1^t}, \dots, \frac{1}{\lambda_n^t}\right)$, $Q(t) = R(t)P\Lambda(t)P^{-1}$ et $\forall t \geq 0, Z(t) = (Q(t))^{-1}X(t)$.
- On pose aussi $D_0 = \text{diag}(\ln(\lambda_1), \dots, \ln(\lambda_n))$ et $B(t) = P(\Lambda(t))^{-1}D_0\Lambda(t)P^{-1}$.
- f. Montrer que Q est 1-périodique.
- g. Montrer que X est solution de (E) $\iff Z'(t) = B(t)Z(t)$.

14.52 *Centrale Maths1 PSI 2019* Thomas Brémont

Soit un réel a et un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

- a. Soit deux fonctions $u, v : [a; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe C^0 et $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \geq a, u(t) \leq C + \int_a^t u(s)v(s)ds$.

Montrer que $\forall t \geq a, u(t) \leq C \exp\left(\int_a^t v(s)ds\right)$.

- b. Soit $X : [a; +\infty[\rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une fonction de classe C^1 . On note $\|\cdot\|$ la norme infinie et on suppose qu'il existe $k \geq 0$ tel que $\forall t \geq a, \|X'(t)\| \leq k\|X(t)\|$. Montrer que $\forall t \geq a, \|X(t)\| \leq \|X(a)\|e^{k(t-a)}$.
- c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $k \geq 0$ telle que pour toutes solutions X et Y de l'équation (E) : $U' = AU$ d'inconnue $U : [a; +\infty[\rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de classe C^1 , $\forall t \geq a, \|X(t) - Y(t)\| \leq \|X(a) - Y(a)\|e^{k(t-a)}$.

14.53 *Centrale Maths1 PSI 2019* Charles Broquet

On pose $F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} dt$.

- a. Donner le domaine de définition de F .
- b. Donner un équivalent de F en 0.
- c. Résoudre l'équation différentielle (E) : $2xy' + y = \ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}_+$.
- d. La (les) solution (s) de la question c. est-elle (sont-elles) développable(s) en série entière sur $[0; 1]$?

14.54 *Mines PSI 2019* Romain Cornuault I

On cherche une fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant (E) : $-2y'' + xy' + y = 0$ avec $y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$.

En cas de convergence, on pose $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-t^2} dt$.

On rappelle la valeur de l'intégrale de GAUSS : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

- a. Y a-t-il existence et/ou unicité d'une solution au problème posé ?
- b. Donner une expression explicite de y vérifiant les conditions ci-dessus.
- c. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f . Conclure.

14.55 *Mines PSI 2019* Kévin Dufrechou et Mathis Girard I

On s'intéresse à l'équation différentielle (E) : $\ln(x)y' + \frac{y}{x} = 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On définit $g :]-1; +\infty[\setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

- a. Résoudre (E) sur $]0; 1[$. Et sur $]1; +\infty[$.
- b. Montrer que l'on peut prolonger g pour qu'elle devienne C^∞ sur $] -1; +\infty[$.
- c. Résoudre (E) sur $]0; +\infty[$.

14.56 *Mines PSI 2019* Lola Josseran I

On considère l'équation différentielle (E) : $(x^2 - x)y'' + (x + 4)y' - y = 0$.

- a. Donner les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0.
- b. Existe-t-il des solutions de (E) non développables en série entière au voisinage de 0 ?

14.57 *Mines PSI 2019* Victor Margueritte II

On considère l'équation différentielle (E) : $x(1 - x)y'' + (1 - 3x)y' - y = 0$.

- a. Trouver les solutions développables en série entière de (E).
- b. Résoudre totalement (E) sur des intervalles convenables.
- c. Étudier les raccords éventuels.

14.58 *Mines PSI 2019* Thomas Méot II

Soit $E = C^0([0; 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit $T(f) : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par $T(f)(x) = \int_0^1 \inf(x, t)f(t)dt$.

- a. Montrer que T est un endomorphisme de E .
- b. Trouver les éléments propres de T .

14.59 *CCP PSI 2019* Pierre Fabre I

Soit l'équation différentielle (E) : $x(1 - x)y'' + (1 - 3x)y' - y = 0$.

- a. Donner les solutions de (E) développables en série entière.
- b. Pourquoi en existe-t-il d'autres sur $]0; 1[$?
- c. Trouver toutes les solutions de (E) sur $]0; 1[$ en utilisant le changement de fonction inconnue $y(x) = \frac{z(x)}{1 - x}$.

14.60 *CCP PSI 2019* Auriane Luquet II

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

On pose aussi le système différentiel (S) : $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

- a. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
- b. Trouver une base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = T$ soit triangulaire supérieure.
- c. En déduire les solutions du système (S).

14.61 *TPE, EIVP PSI 2019* Maël Classeau II

On considère l'équation différentielle (E) : $t(t^2 - 1)y' + 2y = t^2$.

- a. Résoudre (E) sur les intervalles où elle peut être mise sous forme résolue.
- b. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

14.62 *Mines PSI 2021* Paul Jaïs II

a. Résoudre (E) : $x^2y'' - 6xy' + (12 + x^2)y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Indication : on pourra chercher des solutions y de (E) développables en série entière sur $]0; r[$.

- b. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

14.63 Mines PSI 2021 Yuan Le Guennic II

Soit $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une solution sur $\mathbb{R}_+$ de (E) : $y'' + (1+u)y = 0$.

On définit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t)u(t)f(t)dt$.

- Trouver une équation différentielle vérifiée par g .
- Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leq c + \int_0^x |u(t)| |f(t)| dt$.
- Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

14.64 Mines PSI 2021 Guillaume Touly I

a. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

Résoudre (E) : $y' + fy = g$ avec $y(a) = b$. Y a-t-il unicité de la solution ?

b. Soit $\alpha > 0$ et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Résoudre (E) : $y' - \alpha y = h$. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) qui soit bornée sur $\mathbb{R}_+$.

14.65 CCINP PSI 2021 Esteban Poupinet I

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et telle que f soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$.

- Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que f' et f'' sont développables en série entière.
- Montrer qu'il existe $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n$.
- En déduire une solution de (E) sur $] -1; 1[$.
- Puis toutes les solutions de (E) sur $] -\infty; 0[,]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.

14.66 Mines-Télécom PSI 2021 Margot Reungoat II (sur 14 points)

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + y = e^{-\sqrt{x}}$.

a. Montrer que $y_0 : x \mapsto \sin(x) \int_0^x \cos(t)e^{-\sqrt{t}}dt - \cos(x) \int_0^x \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $y : x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x) + \int_0^x \sin(x-t)e^{-\sqrt{t}}dt$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

c. Montrer que $t \mapsto e^{-\sqrt{t}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

d. Soit deux fonctions $a, b : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ayant des limites finies ℓ_a et ℓ_b respectivement en $+\infty$. Montrer que $f : x \mapsto a(x) \cos(x) + b(x) \sin(x)$ admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\ell_a = \ell_b = 0$.

e. En déduire la solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ qui admet une limite finie en $+\infty$.

14.67 X PSI 2022 Olivier Courmont II

Soit $f \in C^1([0; 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Montrer que $\int_0^1 |f'(t) - f(t)| dt > \frac{1}{e}$ et que cette constante $\frac{1}{e}$ est optimale.

14.68 ENS Cachan PSI 2022 Jimmy Guertin

Soit p et q deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'équation (E) : $y'' + py' + qy = 0$.

a. Soit f une solution de (E) non identiquement nulle avec $a \in \mathbb{R}$ telle que $f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a - \eta; a + \eta] \setminus \{a\}, f(x) \neq 0$.

Soit f et g deux solutions de (E) telles que (f, g) est libre et $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $W(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$.

b. Établir une équation différentielle vérifiée par W . En déduire une expression de W en fonction de $t_0 \in \mathbb{R}$.

c. Montrer que pour tout réel t , on a $W(t) \neq 0$.

d. Soit $a < b$ tels que $f(a) = f(b) = 0$ et $\forall x \in]a; b[, f(x) \neq 0$. Montrer que g s'annule une seule fois sur $]a; b[$.

14.69 Centrale Maths1 PSI 2022 Paul Mayé

Soit $E = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \text{ converge} \right\}$. On admet que E est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que l'application $\varphi : E \rightarrow E$ définie par $\varphi(f) = F$ avec $F(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est linéaire.

- Soit $f \in E$, montrer que $F = \varphi(f) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = F'(x) + f(x)$.
- En déduire que φ n'est pas surjective.
- Donner les éléments propres de φ .
- Soit $f \in E$ de classe C^1 et bornée, montrer que $f' \in E$ et que $(\varphi(f))' = \varphi(f')$.
- Montrer que si on pose F l'ensemble des fonctions bornées et C^1 de E , alors F est stable par φ . Quel est le spectre de l'endomorphisme induit par φ dans F ?

Question de cours :

- Que dire du rayon de convergence de la somme et du produit de CAUCHY de deux séries entières ?

14.70 Mines PSI 2022 Lucas Lacampagne I

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et l'équation différentielle (E) : $y'' - 9y = a|x| + b$.

- Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$ admettant une asymptote en $\pm\infty$.

14.71 Mines PSI 2022 Thibault Sourdeval II

Soit I un intervalle et α, β deux fonctions réelles dérivables définies sur I . On définit le wronskien de α, β comme la fonction $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\forall t \in I, w(t) = \begin{vmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \alpha'(t) & \beta'(t) \end{vmatrix}$.

- Montrer que si φ et ψ sont des solutions de (E) : $y'' = ay' + by$ avec $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues, alors le wronskien w de φ, ψ vérifie une équation différentielle (F) d'ordre 1 sur I .
- Si φ ne s'annule pas sur I , exprimer $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'$ en fonction de w et φ .
- Trouver une solution φ développable en série entière de (E) : $2ty'' + y' - y = 0$ telles que $\varphi(0) = 1$.
- En déduire une autre solution ψ de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ non colinéaire à φ . Et sur $\mathbb{R}_-^*$?
- Donner toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

14.72 CCINP PSI 2022 Naïs Baubry I et Anna Decrock I

Soit les équations $(E_0) : x^2 y'' - 2y = 0$ et $(E) : x^2 y'' - 2y = x^3$.

- Trouver une solution polynomiale u de (E_0) .
- Trouver une fonction v solution de (E_0) , indépendante de u , écrite sous la forme $v(x) = u(x)z(x)$ avec z de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.
- Déduire de la question précédente les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.
- Trouver toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

14.73 X PSI 2023 Paul Picard II

On s'intéresse à l'équation (E) : $f(x) = f'(1/x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Trouver $(a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{C}^4$ tel que $f : x \mapsto ax^\alpha + bx^\beta$ soit solution réelle non nulle de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Que dire de l'ensemble S des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$?
- Caractériser entièrement S .

14.74 Centrale Maths1 PSI 2023 Paul-Antoine Baury-Carpentier

On considère le système (E) : $y' = 2xy + 1$ et $y(0) = 0$.

- a. Justifier qu'il existe une unique solution f de (E) définie sur $\mathbb{R}$ et que f est impaire.
- b. Trouver le développement en série entière de f sur $\mathbb{R}$.
- c. Donner une expression de f sous forme intégrale.
- d. En déduire un autre développement en série entière de f .

14.75 Centrale Maths1 PSI 2023 Rémi Darrieumerle

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une solution sur I de l'équation (E) : $y' = y^2 + y + 1$.

- a. Montrer la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + u + 1}$ et déterminer sa valeur.
- b. Montrer que I est borné.
- c. Trouver une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.

14.76 Mines PSI 2023 Arthur Biot II

Déterminer toutes les fonctions f , continues sur $\mathbb{R}$, qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1$.

14.77 Mines PSI 2023 Antoine Jeanselme I

Soit l'équation (E) : $x^2 y'' - 2y = 3x^2$.

- a. Trouver les solutions polynomiales de l'équation homogène (E₀) associée à (E).
- b. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
- c. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

14.78 CCINP PSI 2023 Chloé Vagner II

- a. Calculer χ_M avec $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 5 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
- b. M est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
- c. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
- d. Résoudre le système $\begin{cases} x' = 4x - 3x + 3z \\ y' = 5x - 3y + 4z \\ z' = -x + 2y - z \end{cases}$.

14.79 X PSI 2024 Guilhem Thébault II

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et 2π -périodique et l'équation différentielle (E) : $y'' + \varphi y = 0$.

- a. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est $\text{Vect}(y_1, y_2)$ où $y_1(0) = 0, y_1'(0) = 1, y_2(0) = 1, y_2'(0) = 0$.
- b. Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de (E), alors $g : x \mapsto f(x + 2\pi)$ est aussi solution de (E).
- c. Quelle est la nature de l'application $\psi : f \rightarrow g$?
- d. Montrer que si un réel λ est valeur propre de l'endomorphisme ψ , alors λ est solution de l'équation polynomiale (P) : $x^2 - (y_1'(2\pi) + y_2(2\pi))x + (y_1'(2\pi)y_2(2\pi) - y_2'(2\pi)y_1(2\pi)) = 0$.

14.80 *Mines PSI 2024* Clément Reiner I

Soit la fonction f définie par $f(x) = \int_0^1 \operatorname{Arctan}^2(xt) dt$ et l'équation différentielle (E) : $xy' + y = \operatorname{Arctan}^2(x)$.

- Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Donner la valeur de $f(0)$.
- Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^*$, montrer que $f'(x) = -\frac{f(x)}{x} + \frac{\operatorname{Arctan}^2(x)}{x}$.
- Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.
- Trouver les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

14.81 *CCINP PSI 2024* Olivier Farje II

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est-elle diagonalisable ?
- Résoudre (S) :
$$\begin{cases} x'' = -x + y \\ y'' = -x + 2y - z \\ z'' = -3x + y + 2z \end{cases}$$

14.82 *CCINP PSI 2024* Émile Gauvrit I

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et les deux systèmes différentiels associés (S_1) :
$$\begin{cases} x' = -2x + 4y + z \\ y' = -x + 3y + z \\ z' = -4x + 4y + 3z \end{cases}$$

et (S_2) :
$$\begin{cases} x'' = -2x + 4y + z \\ y'' = -x + 3y + z \\ z'' = -4x + 4y + 3z \end{cases}$$
. On définit la fonction $X : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

- La matrice A est-elle diagonalisable ?
- En posant $Y = P^{-1}X$ pour une matrice $P \in \operatorname{GL}_3(\mathbb{R})$ bien choisie, déterminer un système différentiel (S'_1) tel que X solution de (S_1) sur $\mathbb{R} \iff Y$ solution de (S'_1) sur $\mathbb{R}$.
- En déduire une expression des solutions de (S_1) sur $\mathbb{R}$.
- Résoudre (S_2) .
- Les solutions réelles et bornées de (S_2) forment-elles un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ? Si oui, déterminer la dimension de cet espace.

14.83 *CCINP PSI 2024* Romane Mioque II

On considère l'équation différentielle (E) : $t(t^2 - 1)y' + 2y = t^2$.

- Trouver des réels a, b, c , tels que $\forall t \notin \{-1, 0, 1\}$, $\frac{1}{t(t^2 - 1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t-1}$.
- Résoudre (E) sur les intervalles où elle peut être mise sous forme normalisée.
- Résoudre (E) sur $] -1; 1[$, puis sur $\mathbb{R}$.

14.84 *Mines-Télécom PSI 2024* Clément Lacoste I

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 1 + \int_0^x (x-t)f(2t)dt$.

- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
- Justifier que f est solution d'une équation différentielle du second degré (E) qu'on déterminera.
- Conclure.

14.6 Officiel de la Taupe

14.85 *OdIT 2012/2013 X-Cachan PSI planche 75*

Soit $I =]a; b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Soit $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ n fois dérivables.

On appelle wronskien la fonction définie sur I par $W(f_1, \dots, f_n)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & \dots & \dots & f_n(t) \\ f_1'(t) & \dots & \dots & f_n'(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \dots & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$.

Montrer que si $(f_1, \dots, f_n)$ est liée, la fonction $W(f_1, \dots, f_n)$ est identiquement nulle.

Montrer que si $W(f_1, \dots, f_n) = 0$ et $f_1, \dots, f_n$ solutions de (E) : $y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_0(t)y = 0$ où les p_i sont continues de I dans $\mathbb{R}$, alors la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.

On choisit $I = \mathbb{R}$, $f_1(t) = t^2$ et $f_2(t) = t|t|$. Montrer que $W(f_1, f_2) = 0$ mais que (f_1, f_2) est libre.

On se propose de montrer que si $W(f_1, \dots, f_n) = 0$ alors $(f_1, \dots, f_n)$ est liée sur un segment $J = [\alpha; \beta] \subset I$.

Soit g une fonction $n - 1$ fois dérivable sur I . Montrer que $W(f_1 g, \dots, f_n g) = g^n W(f_1, \dots, f_n)$.

On suppose que f_1 ne s'annule pas sur I . Montrer que $W(f_1, \dots, f_n) = f_1^n W\left(\left(\frac{f_2}{f_1}\right)', \dots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)'\right)$.

Démontrer le résultat attendu. Que dire si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions polynomiales ?

14.86 *OdIT 2012/2013 X-Cachan PSI planche 76*

Soit a, b deux réels strictement positifs. Montrer que le système différentiel $\begin{cases} x' = -ax \\ y' = ax - by \\ z' = by \end{cases}$ avec les

conditions $x(0) = 1$ et $y(0) = z(0) = 0$ admet une unique solution (x, y, z) .

Montrer que : $\forall t > 0$, $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont strictement positifs. Montrer que : $\forall t > 0$, $x(t) + y(t) + z(t) = 1$.

En déduire que $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers 0 quand t tend vers $+\infty$ et que $z(t)$ tend vers 1. Résoudre le système.

À a et t fixés, on fait tendre b vers $+\infty$. Montrer que $x(t)$ est indépendant de b , que $y(t)$ tend vers 0 et que $z(t)$ tend vers $1 - x(t)$. Que se passe-t-il si l'on fait tendre a vers $+\infty$ à b et t fixés. Et si a tend vers 0 ?

14.87 *OdIT 2012/2013 Centrale PSI planche 129*

On donne l'équation différentielle (E) : $2x(1+x)y' + (1+x)y = f(x)$.

On suppose que $f = 1$, résoudre l'équation sur $]0; +\infty[$ et $] -1; 0[$. Donner les solutions sur $] -1; +\infty[$.

On suppose que f est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence $R \geq 1$.

Montrer qu'il existe une solution de (E) développable en série entière et exprimer ses coefficients en fonction de ceux de f . Montrer que le rayon de convergence de y est au moins égal à 1.

14.88 *OdIT 2012/2013 Mines PSI planche 172 II*

Résoudre l'équation (E) : $y'' - y = e^{-x} \left(x \ln |x| - \frac{1}{4x} \right)$.

14.89 *OdIT 2012/2013 Mines PSI planche 173 I*

Trouver les fonctions f de classe C^2 telles que $f + f'' \geq 0$ et montrer qu'elles vérifient $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(x + \pi) \geq 0$.

14.90 *OdIT 2012/2013 CCP PSI planche 214 II*

Trouver les solutions développables en série entière de (E) : $2xy'' + y' - y = 0$.

Les exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

14.91 *OdIT 2012/2013 ENSIIE PSI planche 251 II*

Déterminer toutes les fonctions f , continues sur $\mathbb{R}$, qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + \int_0^x (x-t)f(t)dt$ (on pourra montrer que f vérifie une équation différentielle du second ordre).

14.92 OdIT 2013/2014 CCP PSI planche 247 II

Montrer que $y(x) = x$ est solution de $(E_0) : (1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$. Dériver $\phi(x) = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

En déduire les solutions de $(E) : (1 + x^2)y'' + xy' - y = x\sqrt{1+x^2}$. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

14.93 OdIT 2013/2014 ENTPE/EIVP PSI planche 292 I

Résoudre $(E) : x^2y'' - xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

14.94 OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 154 I

a. Trouver la (ou les) solution(s) y de $(E) : xy''(x) + y'(x) + y(x) = 0$, DSE, telle(s) que $y(0) = 1$.

b. Montrer que la (ou les) solution(s) ne s'annule(nt) qu'une fois sur $]0; 2[$.

14.95 OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 159 II

Trouver les solutions de $(E) : (1 + x^2)y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 1$.

14.96 OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 160 II

Soit $q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $(E) : y'' + q(x)y = 0$. On suppose que $y(0) = 0$, $y'(0) > 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = \ell$.

Montrer que y' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+$.

14.97 OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 163 I

Montrer que l'application T défini par $T(f)(x) = \int_0^1 \min(x, t)f(t)dt$ est un endomorphisme de l'espace E des fonctions continues sur $[0; 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Trouver ses valeurs propres et vecteurs propres.

14.98 OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 171 I

Soit le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ avec $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique.

a. Montrer que $\|X(t)\|$ ne dépend pas de t .

b. Montrer, pour $Y \in \text{Ker}(A)$, que $(X(t)|Y)$ ne dépend pas de t .

c. Montrer que $X(t)$ est sur un cercle de $\mathbb{R}^3$.

14.99 OdIT 2014/2015 Mines PSI planche 172 I

Résoudre $4(1 - t^2)y''(t) - 4ty'(t) + y(t) = 0$.

14.100 OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 276 I

On note $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et Φ l'application de E dans E qui à f associe g définie par $g(x) = f'(x) - xf(x)$.

a. Φ est-elle linéaire ?

b. Donner ses valeurs propres. Donner $\text{Ker}(\Phi^2)$.

14.101 OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 278 I

Résoudre $(E) : t(t^2 - 1)y'(t) + 2y(t) = t^2$ sur un intervalle à préciser.

14.102 OdIT 2014/2015 CCP PSI planche 281 I

a. Parité de $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$?

b. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie une équation différentielle à déterminer.

c. Montrer que f est développable en série entière et déterminer ce développement.

14.103 *OdIT 2014/2015 ENSEA-ENSIIE PSI planche 326 I*

Trouver une solution DSE, dont on donnera le rayon, de $(E) : t^2 y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = \ln(1+t)$.

14.104 *OdIT 2014/2015 Télécom Sud Paris PSI planche 330 I*

Soit a_1 et a_2 continues sur $\mathbb{R}$.

On note y_1 une solution de $(E_1) : y'' + a_1 y = 0$ et y_2 une solution de $(E_2) : y'' + a_2 y = 0$. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, a_1(x) > a_2(x)$ et qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in]a; b[, y_1(x) > 0$ et $y_1(a) = y_1(b) = 0$.

Montrer que $\exists c \in]a; b[, y_2(c) = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde et étudier $\frac{y_1}{y_2}$).

14.105 *OdIT 2015/2016 X-Cachan PSI planche 39*

On donne $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \begin{cases} X_j'(t) &= A X_j(t) \\ X_j(0) &= e_j \end{cases}$ où e_j est le j -ième vecteur de la base canonique. On note $X_{i,j}(t)$ la i -ième coordonnée du vecteur $X_j(t)$ et $X(t) = (X_{i,j}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Montrer que $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, X_j(t)$ est bien défini sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \det(X(t)) \neq 0$ et trouver une équation différentielle vérifiée par $\det(X(t))$; en déduire que si $\text{Tr}(A) = 0$, alors $\forall t \in \mathbb{R}, \det(X(t)) = 1$.

14.106 *OdIT 2015/2016 Mines PSI planche 129I*

Résoudre $4(1-t^2)y'' - 4ty' + y = 0$ sur $] -1; 1[$.

14.107 *OdIT 2015/2016 Centrale PSI planche 181*

Si a , de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ est intégrable, a-t-on $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = 0$?

On pose $g(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t)a(t)f(t)dt$ où f est solution sur $\mathbb{R}_+$ de $y''(x) + (1+a(x))y(x) = 0$; montrer que g est C^2 sur $\mathbb{R}_+$ puis que $g'' + g = 0$.

Montrer que $\exists c \in \mathbb{R}_+, \forall x \geq 0, |f(x)| \leq c + \int_0^x |a(t)||f(t)|dt$.

Montrer que toutes les solutions de $y''(x) + (1+a(x))y(x) = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

14.108 *OdIT 2015/2016 Centrale PSI planche 182*

On note E l'ensemble des f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f'(x) = \alpha f(x) + f(\lambda x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in]-1; 1[$.

Montrer que les fonctions de E sont C^∞ .

Déterminer celles qui sont développables en série entière et sont non nulles.

Montrer que si $f(0) = 0$, alors f est nulle.

Déterminer complètement E .

14.109 *OdIT 2015/2016 Centrale PSI planche 186II*

Donner la méthode de résolution de $X'(t) = AX(t)$ où A est réelle, diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

14.110 *OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 234II*

Trouver une solution polynomiale de $x^2 y'' + xy' - y = 0$. En déduire les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*$.

On suppose que $\sum b_n x^n$ est solution de $x^2 y'' + xy' - y = \sum a_n x^n$; exprimer les a_n en fonction des b_n puis donner une condition sur les b_n pour qu'une telle solution existe.

14.111 *OdIT 2015/2016 CCP PSI planche 239I*

On donne l'équation différentielle : $x^{(3)} - 5x'' + 7x' - 3x = 0$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle qu'avec $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \end{pmatrix}$, on ait $X' = AX$. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation.

14.112 *OdIT 2015/2016 ENSAM PSI planche 269I*

a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)} x^{2n+1}$.

Soit $f :]-R; R[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{n!}{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)} x^{2n+1}$.

b. Montrer que f est solution de (E) : $(x^2 - 2)y' + xy + 2 = 0$.

c. En déduire une expression de $f(x)$ avec des fonctions usuelles.

14.113 *OdIT 2016/2017 Centrale PSI planche 163 abordable dès la 1^{ère} année*

On cherche à résoudre (E) : $2xy'(x) - 2y(-x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Montrer que toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Montrer que le problème, sous certaines conditions supplémentaires que l'on précisera, se ramène à deux équations différentielles d'ordre 1 et résoudre.

14.114 *OdIT 2016/2017 CCP PSI planche 215I*

Donner les éléments propres de $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & 4t \\ -2t & 1+3t \end{pmatrix}$. Si $A(t)$ est diagonalisable, donner la matrice de passage P . Résoudre le système différentiel $Y'(t) = A(t)Y(t)$.

14.115 *OdIT 2016/2017 EIVP PSI planche 246I abordable dès la 1^{ère} année*

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation (E_c) : $x(x+1)y' - (3x+c)y = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Éléments propres de ϕ défini sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $\phi(P)(X) = X(X+1)P'(X) - 3XP(X)$.

14.116 *OdIT 2016/2017 Mines-Télécom PSI planche 247I*

a. Trouver les fonctions développables en séries entières solutions de (E) : $x^2y'' + 6xy' + (6-x^2)y = -1$.

b. Exprimer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ à l'aide de fonctions usuelles.

c. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

14.117 *Compléments OdIT 2017/2018 CCP PSI planche 460II*

Montrer que $f(x) = \sqrt{1-x^2} \operatorname{Arcsin} x$ est C^1 sur un intervalle à préciser et chercher trois polynômes a , b , c tels que $a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$.

Chercher une solution impaire de cette équation sous forme de série entière.