

PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 21

PSI 1 2025-2026

du lundi 16/03 au vendredi 20/03

1 Groupes orthogonaux : voir programme précédent

2 Isométries du plan et de l'espace :

- orientation d'un espace euclidien ; produit mixte en dimension quelconque ;
- en dimension 2 ou 3, interprétation comme aire du parallélogramme ou volume du parallélépipède ;
- produit vectoriel dans un espace euclidien orienté ; propriétés et relations dans une B.O.N.D. ;
- matrices de $O_2(\mathbb{R})$; $SO_2(\mathbb{R})$ contient les matrices de rotation et est commutatif ;
- rotations du plan, réflexions, groupe $O(E)$ si $\dim(E) = 2$; classification complète des isométries du plan : dimension des sous-espaces propres associés à 1 et -1 et nombre de réflexions pour l'engendrer ;
- rotation de l'espace sauf id_E : matrice classique dans une base orthonormée adaptée à la décomposition $E = D \oplus D^\perp$ si D est l'axe de la rotation et angle si on oriente cette droite ;
- détermination pratique de la rotation si on se donne sa matrice dans une base orthonormée ;
- expression vectorielle d'une rotation, autre détermination pratique ;
- reconnaissance des symétries orthogonales de l'espace par la trace ;
- étude d'une "rotation-miroir" : axe, angle, matrice dans une B.O.N.D. adaptée, expression vectorielle d'une telle isométrie, reconnaissance des symétries orthogonales de l'espace par la trace ;
- classification complète des isométries directes ou indirectes de l'espace ;
- (HP) matrices et déterminants de GRAM et application au calcul de la distance d'un vecteur à un sous-espace dans un espace préhilbertien réel ;

3 Réduction des endomorphismes autoadjoints : soit E un espace euclidien

- théorème spectral vectoriel : tout endomorphisme autoadjoint diagonalise dans une base orthonormée ;
- analogue matriciel : toute matrice orthogonale réelle est orthoséparable à une matrice diagonale ;
- endomorphismes antisymétriques ($\langle u(x)|x \rangle = 0$) : équivalence avec $\langle u(x)|y \rangle = -\langle x|u(y) \rangle$ pour tout $(x, y) \in E^2$ ou matrice antisymétrique dans n'importe quelle base orthonormale ;
- endomorphismes symétriques positifs et définis positifs et équivalences associées ;
- matrices symétriques positives et définies positives : écriture tBB d'une telle matrice ;

QUESTIONS DE COURS :

- 1 définir une isométrie vectorielle (déf. 13.1)
- 2 définir de deux manières équivalentes un endomorphisme antisymétrique (rem. 13.32)
- 3 définir un endomorphisme symétrique défini positif (déf. 13.12 et th. 13.33)
- 4 énoncer le théorème de caractérisation des isométries (th. 13.1)
- 5 énoncer le théorème de caractérisation des matrices orthogonales (prop. 13.5)
- 6 énoncer la propriété et la définition du produit mixte (prop. 13.11 et déf. 13.7)
- 7 énoncer les propriétés du produit vectoriel en dimension 3 (prop. 13.12 et 13.13)
- 8 énoncer la forme des matrices de $O(2)$ et la structure de $O(2)$ et $SO(2)$ (prop. 13.14 et 13.15)
- 9 énoncer la description des isométries directes en dimension 3 (th. 13.21)
- 10 énoncer le théorème spectral dans sa version vectorielle (th. 13.30)
- 11 prouver la propriété de stabilité de l'orthogonal par une isométrie (prop. 13.3)
- 12 prouver que $u \in O(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O(n)$ si $\mathcal{B}$ bon (th. 13.6)
- 13 prouver que si $A \in O(n)$ et $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $|\lambda| = 1$ (rem. 13.11)
- 14 prouver que si $A \in SO(n)$ et si n impair, alors 1 est valeur propre de A (rem. 13.11)
- 15 prouver les relations permettant de trouver l'angle d'une rotation (prop. 13.22)
- 16 prouver que u est symétrique $\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique si $\mathcal{B}$ bon (th. 13.26)
- 17 prouver que si F est stable par u symétrique, alors $F^\perp$ est aussi stable par u (prop. 13.28)
- 18 prouver que si u est symétrique, $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont supplémentaires orthogonaux (prop. 13.31)