

PROGRAMME DE KHÔLLE SEMAINE 23

PSI 1 2025-2026

du lundi 30/03 au vendredi 03/04

1 Systèmes différentiels du premier ordre : voir programme précédent

2 Équations linéaires scalaires : voir programme précédent

3 Calcul différentiel :

- continuité des fonctions d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ (limite du programme, en pratique $p = 2$ ou 3) ;
- dérivées partielles de telles fonctions, notations $\partial_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$;
- opérations sur les dérivées partielles : combinaison linéaire, produit, composition, quotient ;
- fonctions de classe C^1 , développement limité d'ordre 1 d'une fonction de classe C^1 ; C^1 implique C^0 ;
- algèbre des fonctions de classe C^1 ; différentielle de f en a d'une fonction de classe C^1 ;
- règle de la chaîne pour la dérivée de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$ si tout est C^1 ;
- dérivées partielles pour les changements de variables $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ si tout est C^1 ;
- cas particulier des transformations linéaires ou du passage en coordonnées polaires à maîtriser pour la résolution d'équations aux dérivées partielles ;
- caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions C^1 sur un convexe ;
- gradient de f en a , rapport avec la différentielle, opérations sur les gradients ;
- dérivées partielles secondes, fonctions de classe C^2 ; C^2 implique C^1 ;
- opérations sur les fonctions de classe C^2 , théorème de SCHWARZ ;

4 Recherche d'extrema, courbes et surfaces :

- définition des différents types d'extrema : minima, maxima, locaux, globaux ;
- point critique et condition nécessaire d'extrema sur un ouvert ;
- utilisation de la continuité sur compact pour l'existence des extrema ;
- point régulier d'une courbe définie de manière implicite, équation de la tangente, vecteur normal ;
- point régulier d'une surface définie de manière implicite, équation du plan tangent, vecteur normal ;

QUESTIONS DE COURS :

- 1 définir ce qu'est une fonction de classe C^1 de $U \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ (déf. 15.2) ;
- 2 définir un point régulier d'une courbe ou d'une surface définie implicitement (déf. 15.10 et 15.11) ;
- 3 énoncer le théorème donnant le développement limité d'ordre 1 d'une fonction C^1 (th. 15.2) ;
- 4 énoncer la règle de la chaîne pour la dérivée de $g = f \circ x$ où $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $x : I \rightarrow U$ sont C^1 (th. 15.5) ;
- 5 énoncer le théorème de changement de coordonnées sur les dérivées partielles de $g = f \circ \varphi$ où $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : U \rightarrow V$ sont C^1 en fonction des dérivées partielles de f et des composantes de φ (prop. 15.6) ;
- 6 énoncer le théorème de SCHWARZ pour les fonctions de classe C^2 (th. 15.12) ;
- 7 énoncer une équation de la tangente à une courbe définie implicitement (prop. 15.15) ;
- 8 énoncer une équation du plan tangent à une surface définie implicitement (prop. 15.16) ;
- 9 prouver que $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ est constante sur le convexe C si $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est nul sur C (prop. 15.7) ;
- 10 prouver que si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 admet un extremum local en $a \in \overset{\circ}{U}$, $\overrightarrow{\text{grad}} f(a) = \vec{0}$ (prop. 15.13) ;