

TD 21 : ESPACES EUCLIDIENS

PSI 1 2025-2026

vendredi 06 mars 2026

21.1 a. Soit $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice M . Puisque M est une matrice orthogonale, $\mathcal{B} = (C_1, \dots, C_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Comme la base canonique $\mathcal{B}_0$ est aussi une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique, on sait que, comme M est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$, on a $m_{i,j} = (e_i | C_j)$. Par conséquent, $\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} \right| = \left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} (e_i | C_j) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \left(e_i \left| \sum_{j=1}^n C_j \right. \right) \right| = \left| \left(\sum_{i=1}^n e_i \left| \sum_{j=1}^n C_j \right. \right) \right| = |(u|v)|$ en posant $u = \sum_{i=1}^n e_i$ et $v = \sum_{j=1}^n C_j$. Les deux vecteurs sont de norme $\sqrt{n}$ par PYTHAGORE. Par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, $|(u|v)| \leq \|u\| \|v\| = (\sqrt{n})^2 = n$ ainsi : $\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j} \right| \leq n \quad (I_1)$.

Il y a égalité dans l'inégalité (I_1) si et seulement si u et v sont des vecteurs colinéaires. Or comme u et v ont même norme, ils sont colinéaires si et seulement si $v = \pm u$. De plus, $v = Mu$. On peut donc conclure que : il y a égalité dans (I_1) si et seulement si u est vecteur propre de M (associé à la valeur propre 1 ou -1).

b. Comme M est orthogonale, on a $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^n m_{i,j}^2 = 1$ (car la norme de la j -ième colonne de la matrice M vaut 1) donc les coefficients $m_{i,j}$ sont dans l'intervalle $[-1; 1]$ et il vient $|m_{i,j}| \geq m_{i,j}^2$. En sommant : $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}| \geq \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j}^2 = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n m_{i,j}^2 \right) = \sum_{j=1}^n 1 = n \quad (I_2)$.

Il y a égalité dans (I_2) si et seulement s'il y a égalité dans les n^2 inégalités qu'on a sommé pour obtenir (I_2) , c'est-à-dire si $\forall (i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $|m_{i,j}| = m_{i,j}^2$ ou encore si et seulement si M ne contient que des 0, des 1 ou des -1 . Mais ceci ne peut se produire que s'il y a un seul ± 1 par ligne et par colonne. Il y a donc $2^n n!$ matrices pour lesquelles il y a égalité (choix des cases non nulles et des ± 1 pour ces n cases). On peut constater que cet ensemble de matrices constitue un sous-groupe de $O(n)$: c'est le groupe de l'hyper-cube en dimension n .

c. Pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on définit le nouveau vecteur $v_j = (|m_{1,j}|, \dots, |m_{n,j}|)$ et toujours $u = (1, \dots, 1)$. Alors $(u|v_j) = \sum_{i=1}^n |m_{i,j}| \leq \|u\| \|v_j\| \leq \sqrt{n} \times 1 = \sqrt{n}$. Par conséquent : $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}| = \sum_{j=1}^n (u|v_j) \leq n\sqrt{n} \quad (I_3)$.

Il y a égalité dans (I_3) si et seulement s'il y a égalité dans les n inégalités qu'on a sommé pour obtenir (I_3) , c'est-à-dire si et seulement si tous les v_j sont colinéaires à u , c'est-à-dire si et seulement si tous les coefficients de la matrice M sont égaux en valeur absolue. Mais comme la somme des carrés des coefficients d'une colonne vaut 1, cette valeur constante de la valeur absolue ne peut valoir que $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ainsi, il y a égalité dans (I_3) si et seulement si M est une matrice de $O(n)$ qui vérifie $\forall (i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $m_{i,j} = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ (matrice de

HADAMARD). Par exemple, $M = H_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Autre méthode : on se rappelle du produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $(A|B) = \text{Tr}(A^T B)$ qui s'écrit aussi $(A|B) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}$ après calculs. Posons $J = (j_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $j_{i,j} = 1$ si $m_{i,j} \geq 0$ et $j_{i,j} = -1$ si $m_{i,j} < 0$. Par construction, on a $m_{i,j} j_{i,j} = |m_{i,j}|$ donc $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}| = (M|J) \leq \|M\| \|J\|$ d'après

CAUCHY-SCHWARZ et $\|M\|^2 = \text{Tr}(M^T M) = \text{Tr}(I_n) = n$ et $\|J\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} 1 = n^2$ ce qui donne à nouveau $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |m_{i,j}| \leq \sqrt{n^3} = n\sqrt{n}$. Il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si M et J sont colinéaires si et seulement si les coefficients de M sont égaux en valeur absolue, et on retrouve les matrices de HADAMARD.

21.2 a. Clairement, $0 \in W$ donc $W \neq \emptyset$. De plus, si $(A, B) \in W^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout entier $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, on a $[A + \lambda B]_{k,1} = [A]_{k,1} + \lambda[B]_{k,1} = 0 + \lambda \times 0 = 0$ et $[A + \lambda B]_{1,k} = [A]_{1,k} + \lambda[B]_{1,k} = 0 + \lambda \times 0 = 0$ donc $A + \lambda B \in W$. Ainsi, W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc W est lui-même un espace vectoriel.

Comme $A \in W \iff A \in \text{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, \dots, E_{n,n})$ on a $W = \text{Vect}(E_{1,1}) \oplus \text{Vect}(E_{i,j} \mid (i,j) \in \llbracket 2; n \rrbracket^2)$. Comme cette famille $(E_{1,1}) \amalg (E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 2; n \rrbracket^2}$ est libre (sous-famille de la base canonique), elle constitue une base de W et, en comptant, on obtient $\dim(W) = 1 + (n-1)^2 = n^2 - 2n + 2$.

b. $v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est unitaire dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique donc (v_1) est une famille orthonormale. D'après le théorème de la base orthonormée incomplète, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. La matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à la base $\mathcal{B}$ est orthogonale car ce sont deux bases

orthonormales. La première colonne de P contient v_1 par définition : $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & * & \cdots & * \end{pmatrix} \in O(n)$.

c. Méthode 1 : notons f (resp. g) l'endomorphisme canoniquement associé à A (resp. à A^T). Avec la base $\mathcal{B}$ de la question précédente, par formule de changement de base, nous avons $B = P^T A P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $C = P^T A^T P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ car, comme P est orthogonale, on a $P^T = P^{-1}$. Si $u = (1, \dots, 1)$, la matrice A appartient à V si et seulement si u est un vecteur propre de f et de g par définition de V . Ceci équivaut au fait que la première colonne de $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ (resp. $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$) contient des termes nuls en dehors de la diagonale car ceci équivaut au fait que $Bu = b_{1,1}u$ et $Cu = c_{1,1}u$. Or, un calcul simple montre que $P^T A^T P = C = B^T = (P^T A P)^T$ donc la première colonne de C est la transposée de la première ligne de B .

Méthode 2 : en notant E_1 le vecteur colonne tel que $E_1^T = (1 \ 0 \cdots 0)$ et V_1 le vecteur colonne tel que $V_1^T = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \ \cdots \ \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, si on suppose que u est un vecteur propre de A et de A^T , c'est-à-dire, comme $u = \sqrt{n} V_1$, que $AV_1 = \lambda V_1$ et $A^T V_1 = \mu V_1$, on a $P^T A P E_1 = P^T A V_1 = \lambda P^T V_1 = \lambda E_1$ car $P^T V_1$ est le vecteur colonne tel que $(P^T V_1)^T = (\|V_1\|^2 \ (V_1|V_2) \ \cdots \ (V_1|V_n)) = (1 \ 0 \cdots 0)$ (V_j est la j -ième colonne de P). De même, on trouve $P^T A^T P E_1 = \mu E_1$ ce qui justifie bien que les premières colonnes de $P^T A P$ et de $P^T A^T P$ sont nulles en dehors de la diagonale donc, comme on a $P^T A^T P = (P^T A P)^T$, que la première colonne et la première ligne de $P^T A P$ sont nulles en dehors de la diagonale. La réciproque se fait de même.

Ainsi, $A \in V \iff$ (les premières colonne et ligne de B sont nulles en dehors de la diagonale) $\iff P^T A P \in W$.

La matrice nulle est clairement dans V . Soit $(A, A') \in V^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $P^T(\lambda A + A')P = \lambda P^T A P + P^T A' P \in W$ car $(P^T A P, P^T A' P) \in W^2$ d'après c.. V est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc un espace vectoriel lui-même. On peut aussi le démontrer en revenant à la définition des vecteurs propres.

L'application $f : V \rightarrow W$ définie par $f(A) = P^T A P$ est bien définie d'après c., clairement linéaire, et bijective

par l'équivalence de la question précédente, un antécédent de $B \in W$ par f est PBP^T . Par conséquent, f est un isomorphisme et, en tant que tel, conserve les dimensions des espaces : $\dim(V) = \dim(W) = (n-1)^2 + 1$.

21.3 a. ($\Leftarrow$) Il est clair que si $M = 0$, on a bien $(\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, X^T M Y = 0)$.

($\Rightarrow$) Supposons que $(\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, X^T M Y = 0)$. Pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, avec $X = E_i$ et $Y = E_j$ (vecteurs colonnes de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), alors $0 = E_i^T M E_j = m_{i,j}$ (case (i, j) de la matrice M) : $M = 0$.

Par double implication, on a l'équivalence $(\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, X^T M Y = 0) \iff (M = 0)$.

b. Il est logique d'après l'énoncé d'utiliser la question précédente même si c'est du cours car P étant une projection orthogonale et la base canonique étant orthonormée, on sait que P est symétrique.

Pour $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, décomposons $X = X_1 + X_2$ et $Y = Y_1 + Y_2$ avec $(X_1, Y_1) \in (\text{Ker}(P))^2$ et $(X_2, Y_2) \in (\text{Im}(P))^2$.

On a $X^T(P^T - P)Y = X^T P^T Y - X^T P Y = (PX)^T Y - X^T (PY) = (PX|Y) - (X|PY) = (X_2|Y_1 + Y_2) - (X_1 + X_2|Y_2)$ car $PX = X_2$, $PY = Y_2$ par définition de cette projection orthogonale P qui vérifie $\text{Im}(P) = \text{Im}(A)$ et $\text{Ker}(P) = (\text{Im}(A))^\perp$. Comme $X_1 \perp Y_2$ et $X_2 \perp Y_1$, il ne reste que $X^T(P^T - P)Y = (X_2|Y_2) - (X_2|Y_2) = 0$.

D'après la question précédente, $P^T - P = 0$ donc P est symétrique.

Comme $\text{Im}(P) = \text{Im}(A)$ par définition et que $\text{Ker}(I_n - P) = \text{Im}(P)$ car P est la matrice d'une projection, on a $\text{Im}(A) \subset \text{Ker}(I_n - P)$ donc $(I_n - P)A = 0$ ce qui se traduit par $PA = A$.

c. L'application $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \text{Tr}(M^T N)$ est le produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le cours. On applique CAUCHY-SCHWARZ au couple (P, A) et $|(P|A)| = |\text{Tr}(P^T A)| \leq \|P\| \cdot \|A\|$ ou, en élevant au carré, $\text{Tr}(P^T A)^2 \leq \|P\|^2 \|A\|^2$. Or $P^T = P$ et $PA = A$ donc $P^T A = A$ et $\|A\|^2 = \text{Tr}(A^T A)$. De plus, P étant la matrice dans la base canonique d'une projection p , dans une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D$ où r est la dimension de $\text{Im}(p)$, donc le rang de p . D et P représente le même endomorphisme p dans deux bases différentes, donc D et P sont semblables. Comme la trace est un invariant de similitude, $\text{Tr}(P^T P) = \text{Tr}(P^2) = \text{Tr}(P) = \text{Tr}(D) = r = \text{rang}(p) = \text{rang}(A)$ car $\text{Im}(P) = \text{Im}(A)$. Ainsi, $\text{Tr}(A)^2 \leq \text{rang}(A) \times \text{Tr}(A^T A)$.

Il y a égalité dans l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ si et seulement si les vecteurs sont colinéaires.

Analyse : supposons (A, P) liée, alors $P = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}, A = \lambda P$. Or $P = 0$ si et seulement si $A = 0$ car $\text{Im}(P) = \text{Im}(A)$. Dans les deux cas, $A = \lambda P$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et P une projection orthogonale.

Synthèse : si $A = \lambda Q$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et Q une projection orthogonale, traitons deux cas. Si $\lambda = 0$, alors $A = 0$ donc $P = 0$ et (A, P) liée. Si $\lambda \neq 0$, on a $\text{Im}(A) = \text{Im}(Q)$ donc P est la projection orthogonale sur $\text{Im}(Q)$, comme Q . Ainsi, $P = Q$ et $A = \lambda P$ donc (A, P) liée.

Par double implication, il y a égalité dans $\text{Tr}(A)^2 \leq \text{rang}(A) \times \text{Tr}(A^T A)$ si et seulement si A est le multiple d'une projection orthogonale, c'est-à-dire la composée d'une projection orthogonale et d'une homothétie.

21.4 a. Clairement, $I_n \in V_1$ car $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), I_n X = X$ donc tout vecteur non nul est propre pour I_n associé à la valeur propre 1 et on a bien $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(I_n) = \{1\}$.

Comme $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{1\}$ et que χ_M est scindé sur $\mathbb{C}$, on a $\chi_M = (X - 1)^n$. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, on a donc $(M - I_n)^n = 0$.

b. Posons $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (réduction de JORDAN), alors on a clairement $\chi_M = (X - 1)^4$ donc $M \in V_1$.

Comme $M - I_4 = E_{2,3} + E_{3,4}$, on a $(M - I_4)^2 = E_{2,4} \neq 0$ et $(M - I_4)^3 = (E_{2,3} + E_{3,4})E_{2,4} = 0$.

c. Soit $M \in S_n(\mathbb{R}) \cap V_1$ symétrique réelle et vérifiant $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{1\}$, alors comme $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ d'après le théorème spectral, 1 est la seule valeur propre de M . Mais comme M est orthosemblable à une matrice diagonale contenant sur sa diagonale les valeurs propres de M toujours d'après le théorème spectral, on en déduit que $M = P I_n P^T$ avec $P \in O(n)$ donc $M = I_n$.

d. Soit $M \in O(3)$ telle que $M \in V_1$. Si on avait $\det(M) = -1$, alors $\det(M + I_n) = \det(M + M^T M)$ donc $\det(M + I_n) = \det((I_n + M^T)M) = \det(I_n + M^T)\det(M) = -\det(I_n + M)$ car $(I_n + M^T) = (I_n + M)^T$ donc $\det(M + I_n) = 0$. Ainsi, -1 serait valeur propre de M ce qui contredit l'hypothèse $M \in V_1$. Ainsi, $M \in SO(3)$ mais on sait alors d'après le cours que $M = I_3$ ou que M est une vraie rotation d'angle $\theta \in]0; 2\pi[$ dont la matrice dans une base orthonormée directe adaptée est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = M_\theta$. Si $M = M_\theta$, alors $\chi_M = (X - 1)(X^2 - 2\cos(\theta)X + 1) = (X - 1)(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$ (après calculs) donc $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$ ce qui contredit encore $M \in V_1$. Ainsi, $M = I_3$.

21.5 a. On a $P_0 = 2, P_1 = X, P_2 = XP_1 - P_0 = X^2 - 2$ et $P_3 = XP_2 - P_1 = X^3 - 3X$. Posons, pour $n \geq 1$, $\mathcal{P}_n = "P_n \in \mathbb{R}[X], \deg(P_n) = n, P_n \text{ est de la parité de } n \text{ et } \text{dom}(P_n) = 1"$. D'après ce qui précède, les assertions $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont vraies. Soit $n \geq 3$ tel que $\mathcal{P}_{n-2}$ et $\mathcal{P}_{n-1}$ sont vraies. Comme $\mathbb{R}[X]$ est un anneau, $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2} \in \mathbb{R}[X]$. De plus, $\deg(XP_{n-1}) = 1 + \deg(P_{n-1}) = n > n - 2 = \deg(P_{n-2})$ donc $\deg(P_n) = \text{Max}(\deg(XP_{n-1}), \deg(P_{n-2})) = n$ et le coefficient dominant de P_n ne vient que de XP_{n-1} qui est unitaire car P_{n-1} l'est donc P_n est aussi unitaire. Comme P_{n-1} a la parité de $n - 1$, XP_{n-1} a la parité de n et P_{n-2} a la parité de $n - 2$, donc aussi celle de n et, par somme, $P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$ a la parité de n .

Par principe de récurrence double, $\forall n \geq 1, P_n \in \mathbb{R}[X], \deg(P_n) = n, P_n$ est de la parité de n et $\text{dom}(P_n) = 1$.

b. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{Q}_n = "P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}"$. Les assertions $\mathcal{Q}_0$ et $\mathcal{Q}_1$ sont vraies car $P_0\left(z + \frac{1}{z}\right) = 2 = 1 + \frac{1}{1} = z^0 + \frac{1}{z^0}$ et $P_1\left(z + \frac{1}{z}\right) = z + \frac{1}{z} = z^1 + \frac{1}{z^1}$. Soit $n \geq 2$ tel que $\mathcal{Q}_{n-2}$ et $\mathcal{Q}_{n-1}$ sont vraies. Alors $P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = \left(z + \frac{1}{z}\right)P_{n-1}\left(z + \frac{1}{z}\right) - P_{n-2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ donc, par hypothèse de récurrence, $P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^{n-1} + \frac{1}{z^{n-1}}\right) - \left(z^{n-2} + \frac{1}{z^{n-2}}\right) = z^n + \frac{1}{z^n} + z^{n-2} + \frac{1}{z^{n-2}} - z^{n-2} - \frac{1}{z^{n-2}} = z^n + \frac{1}{z^n}$.

Par principe de récurrence double, on a bien établi que $\forall n \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}^*, P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si on prend $z = e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$, comme $z + \frac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$ et

$z^n + \frac{1}{z^n} = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$, on a $P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)$. Ainsi, en prenant $\theta = \theta_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \in]0; \pi[$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a $P_n(\cos(\theta_k)) = \cos(n\theta_k) = \cos(k\pi + (\pi/2)) = 0$. Comme $0 < \theta_1 < \dots < \theta_{n-1} < \pi$ et que la fonction $\cos$ est injective et strictement décroissante sur $]0; \pi[$, les n valeurs $\cos(\theta_{n-1}) < \dots < \cos(\theta_0)$ sont distinctes et toutes racines du polynôme P_n qui est unitaire de degré n donc on a $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \cos(\theta_k))$. Le polynôme P_n admet donc n racines réelles distinctes, toutes dans $] -1; 1[$.

d. On sait que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a l'unique décomposition $A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$ avec $\frac{A+A^T}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{A-A^T}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Soit $U \in O(n)$, comme $O(n)$ est un groupe, $U^k \in O(n)$ donc $S_{U^k} = \frac{U^k + (U^k)^T}{2} = \frac{U^k + U^{-k}}{2}$ car $U^T = U^{-1}$. Comme $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $P_k\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^k + \frac{1}{z^k}$, on a $z^k P_k\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^{2k} + 1$ donc les polynômes $X^k P_k\left(X + \frac{1}{X}\right)$ et $X^{2k} + 1$ coïncident en une infinité de valeurs d'où $X^k P_k\left(X + \frac{1}{X}\right) = X^{2k} + 1$. En notant $P_k = \sum_{i=0}^k a_i X^i$, on a $X^k P_k\left(X + \frac{1}{X}\right) = \sum_{i=0}^k a_i (X^2 + 1)^i X^{k-i} = X^{2k} + 1$. En évaluant ceci en la matrice U , on a donc $\sum_{i=0}^k a_i (U^2 + I_n)^i U^{k-i} = U^{2k} + I_n$. On multiplie par U^{-k} pour obtenir $\sum_{i=0}^k a_i (U^2 + I_n)^i U^{-i} = U^k + U^{-k} = 2S_{U^k} = \sum_{i=0}^k a_i (U + U^{-1})^i = P_k(U + U^{-1}) = P_k(2S_U)$. Ainsi, en posant $Q_k = \frac{P_k(2X)}{2}$, on a bien $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ (avec $\deg(Q_k) = k$ et $\text{dom}(Q_k) = 2^{k-1}$) et $S_{U^k} = Q_k(S_U)$.

21.6 a. On reconnaît, pour $(M, M') \in E^2$, $(M|M') = \text{Tr}(M^T M')$ et on sait d'après le cours que cette application $(M, M') \mapsto (M|M')$ est bilinéaire, symétrique et positive. De plus, si $M \in E$ et qu'on suppose que $(M|M) = 0$, alors $a^2 + 2b^2 + c^2 = 0$ donc $a = b = c = 0$ donc $M = 0$ et $(\cdot|\cdot)$ est bien un produit scalaire sur E . C'est le produit scalaire induit par le produit scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans E .

b. Soit $f \in G$, alors pour toute matrice $M \in E$, on a $\|M\|^2 = \text{Tr}(M^T M) = \text{Tr}(M^2)$ car M symétrique or $\chi_M(M) = M^2 - \text{Tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0$ par CAYLEY-HAMILTON donc $\|M\|^2 = \text{Tr}(\text{Tr}(M)M - \det(M)I_2)$ et $\|M\|^2 = \text{Tr}(M)^2 - 2\det(M) = \text{Tr}(f(M))^2 - 2\det(f(M)) = \|f(M)\|^2$ avec le même calcul appliqué à $f(M)$. Ainsi, f conserve la norme dans E donc $f \in O(E)$ d'après le cours. On a donc déjà $G \subset O(E)$.

- Si $(f, g) \in G^2$ et $M \in E$, comme $f \in G$ et $g \in G$, on a $\text{Tr}(f \circ g(M)) = \text{Tr}(f(g(M))) = \text{Tr}(g(M)) = \text{Tr}(M)$ et $\det(f \circ g(M)) = \det(f(g(M))) = \det(g(M)) = \det(M)$ donc $f \circ g \in G$: G est stable par composition.
- Si $f \in G$ et $M \in E$, comme $f \in GL(E)$, $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(f(f^{-1}(M))) = \text{Tr}(f^{-1}(M))$ car $f \in G$ et on a aussi $\det(M) = \det(f(f^{-1}(M))) = \det(f^{-1}(M))$ car $f \in G$ donc $f^{-1} \in G$: G est stable par passage à l'inverse.

Comme $G \neq \emptyset$ car $\text{id}_E \in G$, ce qui précède montre que G est bien un sous-groupe de $O(E)$ pour la composition.

c. ($\implies$) Si $f \in G$, alors $f \in O(E)$ d'après **b.** On pose $F = \{M \in E \mid \text{Tr}(M) = 0\} = \text{Ker}(\text{Tr})$, comme Tr est une forme linéaire non nulle sur E , F est un hyperplan de E et $F^\perp = \text{Vect}(I_2)$ car $F = \{M \in E \mid (M|I_2) = 0\}$. Comme $f \in O(E)$ et F stable par f , d'après le cours, $F^\perp$ est aussi stable par f donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(I_2) = \lambda I_2$. Or $\text{Tr}(f(I_2)) = \text{Tr}(I_2) = 2 = 2\lambda$ donc $\lambda = 1$ et $f(I_2) = I_2$.

($\impliedby$) Méthode 1 : si $f \in O(E)$ et $f(I_2) = I_2$, pour une matrice $M \in E$, on la décompose $M = \lambda I_2 + N$ avec $N \in F$ et $\lambda I_2 \in F^\perp$ ce qui donne $f(M) = \lambda f(I_2) + f(N) = \lambda I_2 + f(N)$ et $\text{Tr}(f(N)) = 0$ car F est stable par f puisque $F^\perp$ l'est par hypothèse et que $f \in O(E)$. Ainsi, $\text{Tr}(f(M)) = 2\lambda = \text{Tr}(M)$.

De plus, $(M|M) = (f(M)|f(M))$ d'où, comme M et $f(M)$ sont symétriques, $\text{Tr}(M^2) = \text{Tr}(f(M)^2)$. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, on a $M^2 = \text{Tr}(M)M - \det(M)I_2$ et $f(M)^2 = \text{Tr}(f(M))f(M) - \det(f(M))I_2$ donc, en prenant la trace de ces deux relations et en soustrayant, $\det(M) = \det(f(M))$. Ainsi, $f \in G$.

Méthode 2 : si $f \in O(E)$ et $f(I_2) = I_2$, comme f conserve la norme et le produit scalaire par hypothèse et que la famille $(E_{1,1} + E_{2,2} = I_2, E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2} + E_{2,1})$ est une base orthogonale de E , on a les relations $\|f(E_{1,1} - E_{2,2})\|^2 = \|E_{1,1} - E_{2,2}\|^2 = \|f(E_{1,2} + E_{2,1})\|^2 = \|E_{1,2} + E_{2,1}\|^2 = 2$ pour les normes mais aussi $\text{Tr}(f(E_{1,1} - E_{2,2})) = \text{Tr}(f(E_{1,2} + E_{2,1})) = 0$ car on sait que $(f(E_{1,1} - E_{2,2})|f(I_2)) = (E_{1,1} - E_{2,2}|I_2) = 0$ et $(f(E_{1,2} + E_{2,1})|f(I_2)) = (E_{1,2} + E_{2,1}|I_2) = 0$ pour les produits scalaires. Ainsi, il existe des réels $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ tels que $f(E_{1,1} - E_{2,2}) = \alpha(E_{1,1} - E_{2,2}) + \beta(E_{1,2} + E_{2,1})$ et $f(E_{1,2} + E_{2,1}) = \alpha'(E_{1,1} - E_{2,2}) + \beta'(E_{1,2} + E_{2,1})$ (pour la trace nulle) avec $2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 = 2\alpha'^2 + 2\beta'^2$ (pour les normes). Il existe donc des angles θ et θ' tels que $\alpha = \cos(\theta)$, $\beta = \sin(\theta)$, $\alpha' = \cos(\theta')$ et $\beta' = 2\sin(\theta')$. De plus, comme f conserve le produit scalaire, $(f(E_{1,1} - E_{2,2})|f(E_{1,2} + E_{2,1})) = (E_{1,1} - E_{2,2}|E_{1,2} + E_{2,1}) = 0$, il vient $2\alpha\alpha' + 2\beta\beta' = 0$ donc $\cos(\theta - \theta') = 0$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \frac{a+c}{2}I_2 + \frac{a-c}{2}(E_{1,1} - E_{2,2}) + b(E_{1,2} + E_{2,1})$, avec ce qui précède et par linéarité de f , $f(M) = \frac{a+c}{2}I_2 + \frac{a-c}{2}(\cos(\theta)(E_{1,1} - E_{2,2}) + \sin(\theta)(E_{1,2} + E_{2,1})) + b(\cos(\theta')(E_{1,1} - E_{2,2}) + \sin(\theta')(E_{1,2} + E_{2,1}))$ donc $f(M) = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\cos(\theta) + b\cos(\theta') & \frac{a-c}{2}\sin(\theta) + b\sin(\theta') \\ \frac{a-c}{2}\sin(\theta) + b\sin(\theta') & \frac{a+c}{2} - \frac{a-c}{2}\cos(\theta) - b\cos(\theta') \end{pmatrix}$. On a ainsi à la relation $\text{Tr}(f(M)) = a + c = \text{Tr}(M)$ et, après calculs et simplifications grâce à la relation $\cos(\theta - \theta') = 0$, à $\det(f(M)) = \left(\frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\cos(\theta) + b\cos(\theta')\right)\left(\frac{a+c}{2} - \frac{a-c}{2}\cos(\theta) - b\cos(\theta')\right) - \left(\frac{a-c}{2}\sin(\theta) + b\sin(\theta')\right)^2$ d'où $\det(f(M)) = ac - b^2 = \det(M)$. Ainsi, $f \in G$.

Quelle que soit la méthode, par double implication, on a bien $G = \{f \in O(E) \mid f(I_2) = I_2\}$.

21.7 a. Si $A^2 = A^T$, alors $A^4 = (A^2)^2 = (A^T)^2 = (A^2)^T = (A^T)^T = A$ donc $X^4 - X = X(X^3 - 1)$ est annulateur de A . Comme A est inversible, $A^4 = A$ se simplifie en $A^3 = I_2$ donc $P = X^3 - 1$ est aussi annulateur de A . Mais comme les racines de $X^3 - 1$ sont les trois racines cubiques de l'unité, $P = (X - 1)(X - j)(X - j^2)$. Les valeurs propres de A étant forcément racines de tout polynôme annulateur de A , $\text{Sp}(A) \subset \{1, j, j^2\}$. De plus, comme P est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b. Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, $\det(A) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda^{m_\lambda(A)}$. On sait aussi que les ordres de multiplicité

de j et j^2 dans $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ sont les mêmes et $j^2 = \bar{j}$. Ainsi, $\det(A) = 1^{m_1(A)}(j \times j^2)^{m_j(A)} = 1$ car $j^3 = 1$.

On peut aussi écrire $\det(A^2) = \det(A^T) = \det(A)$ donc $\det(A) \in \{0, 1\}$. Comme A est inversible, $\det(A) = 1$.

Comme on sait que $\text{Sp}(A) \subset \{1, j, j^2\}$, traitons deux cas :

- Si j (resp. j^2) est valeur propre de A , alors $\bar{j} = j^2$ (resp. j) l'est aussi car A est une matrice réelle et on a alors $\chi_A = (X - j)(X - j^2) = X^2 + X + 1$.

- Si j n'est pas valeur propre de A , alors j^2 non plus et on a $\chi_A = (X - 1)^2$.

c. Comme $A^3 = I_2$ et $A^2 = A^T$, on a $AA^T = I_2$ donc $A \in O(2)$. Comme $\det(A^3) = \det(A)^3 = \det(I_2) = 1$, on a $\det(A) = 1$ et A est l'une des matrices R_θ du cours. Or $(R_\theta)^3 = R_{3\theta} = I_2$ implique alors $3\theta \equiv 0 [2\pi]$ donc $\theta \equiv 0 [2\pi]$ ou $\theta \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ ou $\theta \equiv \frac{4\pi}{3} [2\pi]$. Traitons les trois cas :

- Si $\theta \equiv 0 [2\pi]$, alors $A = I_2$.

- Si $\theta \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$, on a $A = R_{2\pi/3} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

- Si $\theta \equiv \frac{4\pi}{3} [2\pi]$, on a $A = R_{-2\pi/3} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

Réciproquement, ces trois matrices sont bien inversibles et vérifient $AA^T = I_2$ avec $A^3 = I_2$ donc $A^2 = A^T$.

21.8 a. Soit $(x, y) \in E^2$, en associant à x et à y les vecteurs colonnes contenant leurs coordonnées dans la base canonique X et Y , puisque cette base canonique est orthonormée dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, on a $(u(x)|y) = (AX|Y) = (AX)^T Y = (X^T A^T) Y = X^T (A^T Y) = (X|A^T Y) = (x|w(y))$.

b. Soit F est un sous-espace stable par u et $y \in F^\perp$. Pour tout vecteur $x \in E$, on a $(x|w(y)) = (u(x)|y)$ d'après a. donc $(x|w(y)) = 0$ car $y \in F^\perp$ et $u(x) \in F$ par stabilité de F par u . Ainsi, par définition, $u(y) \in F^\perp$.

On vient d'établir que $F^\perp$ est stable par w .

c. $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$ donc $\chi_A = \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -X \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ en effectuant $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

et par linéarité par rapport à la dernière colonne. On effectue maintenant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ et on

obtient $\chi_A = X \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = X^2(X-1) = \chi_{A^T}$ donc $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(A^T) = \{0, 1\}$.

Comme $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T) = 2$ car les deux premières colonnes de A forment une famille libre, on a $\dim(\text{Ker}(A)) = \dim(\text{Ker}(A^T)) = 2$ par la formule du rang donc les ordres de multiplicité géométrique et algébrique de 0 ne sont pas égaux pour A et A^T qui ne sont donc pas diagonalisables.

Soit F un sous-espace vectoriel de E . Traitons quatre cas :

dim(F) = 0 on a clairement $F = \{0\}$.

dim(F) = 1 F est une droite stable par u donc, d'après le cours, elle est engendrée par un vecteur propre de u . On résout $AX = 0$ et on trouve $\text{Ker}(u) = E_0(u) = \text{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1, 0, -1)$. On résout $AX = X$ et on a $\text{Ker}(u - \text{id}_E) = E_1(u) = \text{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = (0, 1, 1)$.

dim(F) = 2 F est un plan stable par u donc, avec $b_\bullet$, $F^\perp$ et une droite stable par w , engendrée par un vecteur propre de w . On résout $A^T X = 0$ et on trouve $\text{Ker}(w) = E_0(w) = \text{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = (1, -1, 1)$. On résout $A^T X = X$ et $\text{Ker}(w - \text{id}_E) = E_1(w) = \text{Vect}(v_4)$ avec $v_4 = (1, 0, 1)$.

dim(F) = 3 on a clairement $F = E = \mathbb{R}^3$.

En conclusion, les seuls sous-espaces de E stables par u sont $\{0\}$, les droites $D_1 = \text{Vect}(v_1)$ et $D_2 = \text{Vect}(v_2)$, les plans $P_1 = (\text{Vect}(v_3))^\perp$ et $P_2 = (\text{Vect}(v_4))^\perp$ et $\mathbb{R}^3$.

21.9 D'abord, f_a est clairement un endomorphisme de E pour tout réel a .

a. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $x \in E$, $f_a \circ f_b(x) = f_a(x + b(x|u)u) = f_a(x) + b(x|u)f_a(u)$ par linéarité de u . Or $f_a(u) = (1 + a||u||^2)u = (1 + a)u$ car u est unitaire, donc on a bien la relation $f_a \circ f_b = f_{a+b+ba}$ car on a $f_a \circ f_b(x) = x + a(x|u)u + b(1 + a)(x|u)u = x + (a + b + ba)(x|u)u = f_{a+b+ba}(x)$.

Comme $a + b + ba = b + a + ab$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ par commutativité de la somme et du produit dans $\mathbb{R}$, on a bien $f_a \circ f_b = f_b \circ f_a$.

b. Soit $a \in \mathbb{R}$, on a bien $f_a^0 = \text{id}_E = f_0 = f_{(a+1)^0-1}$ et $f_a^1 = f_a = f_{(a+1)-1}$. Soit un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait $f_a^p = f_{(a+1)^p-1}$, alors d'après la question **a.** et par hypothèse de récurrence, on obtient $f_a^{p+1} = f_a \circ f_a^p = f_a \circ f_{(a+1)^p-1} = f_{a+(a+1)^p-1+((a+1)^p-1)a} = f_{(a+1)^{p+1}-1}$.

Par principe de récurrence, on a $\forall a \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, f_a^p = f_{(a+1)^p-1}$.

Si $a \neq -1$, il existe b tel que $a + b + ba = 0$, c'est $b = -\frac{a}{a+1}$ on a $f_a \circ f_b = f_b \circ f_a = f_0 = \text{id}_E$ donc f_a est un automorphisme de E . Si $a = -1$, $f_{-1}(u) = u - ||u||^2 u = 0_E$ donc $\text{Ker}(f_{-1}) \neq \{0_E\}$ donc $f_{-1} \notin \text{GL}(E)$.

Ainsi, f_a est inversible si et seulement si $a \neq -1$.

c. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \in E^2$, on a $(f_a(x)|y) = (x + a(x|u)u|y) = (x|y) + a(x|u)(u|y) = (x|y) + a(x|u)(y|u)$ donc $(f_a(x)|y) = (x|y + a(y|u)u) = (x|f_a(y))$ par symétrie du produit scalaire, donc f_a est autoadjoint.

d. Analyse : soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f_a \in O(E)$. Alors $f_a(u)$ est unitaire car u l'est. Comme $f_a(u) = (1 + a)u$, on en déduit que $||f_a(u)|| = |1 + a|||u|| = |1 + a| = 1$. Ainsi, $1 + a = \pm 1$ ce qui donne $a = 0$ ou $a = -2$.

Synthèse : • Si $a = 0$, $f_a = \text{id}_E$ donc $f_0 \in O(E)$ (isométrie directe s'il en est).

• Si $a = -2$, $f_{-2}^2 = f_{-2-2+4} = f_0 = \text{id}_E$ donc f_{-2} est une symétrie, et comme c'est aussi un endomorphisme autoadjoint, c'est une symétrie orthogonale d'après le cours. Or $f_{-2}(x) = x \iff (x|u) = 0 \iff x \in \text{Vect}(u)^\perp$ ce qui montre que $E_1(f_{-2}) = \text{Vect}(u)^\perp$. Comme f_{-2} est orthogonale, $E_{-1}(f_{-2}) = E_1(f_{-2})^\perp = \text{Vect}(u)$. Dans ce cas, f_{-2} est la réflexion d'hyperplan $\text{Vect}(u)^\perp$.

Conclusion : il existe donc seulement deux isométries parmi les f_a : $f_0 = \text{id}_E \in SO(E)$ et $f_{-2} \in O(E) \setminus SO(E)$ qui est la réflexion d'hyperplan $\text{Vect}(u)^\perp$.

Pour aller plus loin : toutes les questions précédentes justifient qu'en posant $\mathcal{F} = \{f_a \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$:

- La loi $\circ$ est interne dans $\mathcal{F}$ d'après la question **a.** car si $a \neq -1$ et $b \neq -1$, $f_a \circ f_b = f_{a+b+ab}$ et $(a+b+ab)+1 = (a+1)(b+1) \neq 0$ donc $a+b+ab \neq -1$ et $f_a \circ f_b \in \mathcal{F}$.
- La loi $\circ$ est commutative dans $\mathcal{F}$ d'après la question **b.**
- La loi $\circ$ est toujours associative.
- $f_0 = \text{id}_E$ est neutre pour $\circ$ dans $\mathcal{F}$ car $-1 \neq 0$.
- Tous les éléments f_a de $\mathcal{F}$ (avec $a \neq -1$) sont inversibles dans $\mathcal{F}$ car en posant $b = -\frac{a}{a+1}$, on a $f_a \circ f_b = f_b \circ f_a = \text{id}_E = f_0$ d'après **d.** et $-\frac{a}{a+1} + 1 = \frac{1}{a+1} \neq 0$ donc $b \neq -1$.

Ceci justifie que $\mathcal{F}$ est un groupe abélien pour la loi $\circ$.

De plus, l'application $\theta : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathcal{F}$ définie par $\forall a \in \mathbb{R}^*, \theta(a) = f_{a-1}$ est bien définie d'après **d.** car $a-1 \neq -1$ si $a \neq 0$. Elle est surjective par définition de $\mathcal{F}$, injective car $f_a = f_b$ équivaut à $a = b$ (évaluer par exemple en $x = u$), ainsi θ est bijective. Enfin, pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$, $\theta(a \times b) = f_{ab-1}$ et $\theta(a) \circ \theta(b) = f_{a-1} \circ f_{b-1} = f_{(a-1)+(b-1)+(a-1)(b-1)} = f_{ab-1}$ donc $\theta(a \times b) = \theta(a) \circ \theta(b)$, ce qui montre que θ est un isomorphisme de groupes entre $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathcal{F}, \circ)$.

21.10 a. Pour $(x, y) \in E^2$, $(f(x)|y) = (x - \lambda(x|v)v|y) = (x|y) - \lambda(x|v)(y|v)$ donc, par symétrie des rôles joués par x et y , on a aussi $(f(y)|x) = (y|x) - \lambda(y|v)(x|v)$ donc, par symétrie du produit scalaire, $(f(x)|y) = (x|f(y))$. Ainsi, f est un endomorphisme autoadjoint de E pour toute valeur de λ .

b. Analyse : si $f \in O(E)$, on a $\|f(v)\| = \|v\|$. Or $f(v) = v - \lambda\|v\|^2 v = (1 - \lambda\|v\|^2)v$ et, comme $\|v\| > 0$ car $v \neq 0_E$, on obtient $|1 - \lambda\|v\|^2| = 1$ donc $\lambda = 0$ quand $1 - \lambda\|v\|^2 = 1$ ou $\lambda = \frac{2}{\|v\|^2}$ quand $1 - \lambda\|v\|^2 = -1$.

Synthèse : Traitons les deux cas :

- Si $\lambda = 0$, on a $\forall x \in E, f(x) = x$ donc $f = \text{id}_E \in O(E)$.
- Si $\lambda = \frac{2}{\|v\|^2}$, $\forall x \in E, f(x) = x - \frac{2(v|x)}{\|v\|^2}v$. Alors $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2 - 2\frac{2(v|x)}{\|v\|^2}(x|v) + \left(\frac{2(v|x)}{\|v\|^2}\right)^2\|v\|^2 = \|x\|^2$ donc $\|f(x)\| = \|x\|$ et f est bien une isométrie.

Par conséquent, f est-il une isométrie vectorielle si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda = \frac{2}{\|v\|^2}$.

c. Si $f = \text{id}_E$, pas grand chose à dire. Si $f : x \mapsto x - \frac{2(v|x)}{\|v\|^2}v$, comme $f(x) = x \iff (v|x) = 0$, on a $E_1(f) = \text{Ker}(f - \text{id}_E) = \text{Vect}(v)^\perp$ qui est un hyperplan. De plus, on a $f(v) = v - \frac{2(v|v)}{\|v\|^2}v = -v$ donc $v \in E_{-1}(f) = \text{Ker}(f + \text{id}_E)$. Comme $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$ sont en somme directe, on a $E_{-1}(f) = \text{Vect}(v)$. Ainsi, f est diagonalisable et $\text{Sp}(f) = \{-1, 1\}$ donc f est une symétrie, et comme c'est une isométrie vectorielle, c'est une symétrie orthogonale : la réflexion d'hyperplan $\text{Vect}(v)^\perp$.

d. soit s_1, s_2 les réflexions par rapport à $H_1 = \text{Vect}(v_1)^\perp$ et $H_2 = \text{Vect}(v_2)^\perp$ avec $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$.

Analyse : on suppose que $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1$. Alors $s_1 \circ s_2(v_1) = s_2 \circ s_1(v_1)$ donc $s_1(s_2(v_1)) = -s_2(v_1)$ car $s_1(v_1) = -v_1$ ce qui montre que $s_2(v_1) \in E_{-1}(s_1) = \text{Vect}(v_1)$. Il existe donc $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que $s_2(v_1) = \lambda_2 v_1$. Mais comme s_2 est une isométrie, on a $\|s_2(v_1)\| = |\lambda_2|\|v_1\| = \|v_1\|$ donc $\lambda_2 = \pm 1$.

- si $\lambda_2 = 1$, $s_2(v_1) = v_1$ donc $v_1 \in E_1(s_2) = H_2$ et $v_1 \perp v_2$. H_1 et H_2 sont alors dits perpendiculaires (ce qui signifie que les droites $H_1^\perp$ et $H_2^\perp$ sont orthogonales).

- si $\lambda_2 = -1$, $s_2(v_1) = -v_1$ donc $v_1 \in E_{-1}(s_2) = \text{Vect}(v_2)$ et $v_1 = \pm v_2$ car v_1 et v_2 sont unitaires.

Synthèse : on traite les deux cas vus ci-dessus :

- si $v_1 = \pm v_2$, alors $\text{Vect}(v_1) = \text{Vect}(v_2)$ donc $H_1 = H_2$, donc $s_1 = s_2$ et $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1 = \text{id}_E$.
- si $v_1 \perp v_2$, on complète (v_1, v_2) en une base orthonormale $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ de E de sorte que

l'on ait $A_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ et $A_2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$. On obtient donc

$s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1$ car $A_1 A_2 = A_2 A_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$, et $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1$ est la symétrie

orthogonale par rapport au sous-espace $\text{Vect}(v_1, v_2)^\perp$ de dimension $n - 2$.

Les réflexions s_1 et s_2 commutent si et seulement si $H_1 = H_2$ ou H_1 et H_2 perpendiculaires.

21.11 a. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, alors $h(z) = \frac{1-z}{1+z}$ est bien défini car $1+z \neq 0$. De plus $h(z)+1 = \frac{1-z}{1+z}+1 = \frac{2}{1+z} \neq 0$

donc $h(z) \neq -1$. On peut donc définir la restriction $\tilde{h}$ de h qui va de $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

- Soit $(z, z') \in (\mathbb{C} \setminus \{-1\})^2$ tel que $\tilde{h}(z) = \frac{1-z}{1+z} = \frac{1-z'}{1+z'} = \tilde{h}(z')$, on a donc $z = z'$ après simplifications dans

$(1-z)(1+z') = 1-z+z'-zz' = 1-z'+z-zz' = (1-z')(1+z)$. Ainsi, $\tilde{h}$ est injective (et h aussi d'ailleurs).

- Soit $(z, z') \in (\mathbb{C} \setminus \{-1\})^2$, alors $\tilde{h}(z) = z' \iff \frac{1-z}{1+z} = z' \iff 1-z = z' + zz' \iff z = \frac{1-z'}{1+z'}$. Comme on a

déjà vu que $\frac{1-z'}{1+z'} \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ si $z' \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, on a bien trouvé un antécédent par $\tilde{h}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ à tout

$z' \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Par conséquent, $\tilde{h}$ est surjective (mais h ne l'est pas).

Ainsi, $\tilde{h} : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ est une involution donc une bijection (transformation de MÖBIUS).

Si $z \in \mathbb{U}'$, on a $|z| = 1$ donc $|z|^2 = z\bar{z} = 1$ donc $\overline{h(z)} = \frac{\overline{1-z}}{\overline{1+z}} = \frac{1-\bar{z}}{1+\bar{z}} = \frac{1-(1/z)}{1+(1/z)} = \frac{z-1}{z+1} = -h(z)$ donc

$h(z) \in i\mathbb{R}$. On peut donc définir la restriction $\hat{h} : \mathbb{U}' \rightarrow i\mathbb{R}$ de h .

- Comme $\hat{h}$ est une restriction de $\tilde{h}$, $\hat{h}$ est aussi injective.

- Soit $z \in i\mathbb{R}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $z = ix$. Or $\tan$ est une bijection de $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ dans $\mathbb{R}$ donc il existe

$\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ tel que $x = \tan(\theta)$. Ainsi, $ix = i \tan(\theta) = \frac{i \sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{2i(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{2i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}$ (formules d'EULER).

Alors $ix = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \frac{1 - e^{-2i\theta}}{1 + e^{-2i\theta}} = \hat{h}(e^{-2i\theta})$ car $e^{-2i\theta} \in \mathbb{U}'$ puisque $2\theta \in]-\pi; \pi[$. Ainsi, $\hat{h}$ est surjective.

Par conséquent, $\hat{h}$ est une bijection de $\mathbb{U}'$ dans $i\mathbb{R}$.

b. $\mathbb{U}'$ est le cercle unité privé du point d'affixe -1 (à l'ouest du cercle). Si $\theta \in]-\pi; \pi[$, $e^{i\theta} \in \mathbb{U}'$ donc $h(e^{i\theta}) = \hat{h}(e^{i\theta}) = i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ d'après les calculs précédents. Soit O l'origine du repère, A le point d'affixe 1 et

M celui d'affixe $e^{i\theta}$, on trace à la règle et au compas la bissectrice $\mathcal{D}$ de AOM en O qui est la droite passant par O faisant un angle de $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe (Ox) , ensuite on prend l'intersection entre $\mathcal{D}$ et la droite (Ay) et on

obtient le point M' d'affixe $1 + i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - h(e^{i\theta})$.

c. Si $M \in O'$, $-1 \notin \text{Sp}(M)$ donc $M + I_2$ est inversible, ce qui montre que $H(M) = (I_2 - M)(I_2 + M)^{-1}$ existe. L'application H est donc bien définie. Comme $(I_2 - M)(I_2 + M) = (I_2 + M)(I_2 - M)$, en multipliant par l'inverse de $I_2 + M$ à gauche et à droite, on a $(I_2 - M)(I_2 + M)^{-1} = (I_2 + M)^{-1}(I_2 - M) = H(M)$.

On a vu dans le cours que puisque $-1 \notin \text{Sp}(M)$, on a forcément $M \in \text{SO}(2)$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = R_\theta$. Ainsi, $\chi_M = \begin{vmatrix} X - \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & X - \cos \theta \end{vmatrix} = (X - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = X^2 - 2X \cos \theta + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$.

• Si $M = I_2$, $H(M) = 0$ donc $\text{Sp}(H(M)) = \{0\}$.

• Si $M \neq I_2$, $\theta \not\equiv 0[\pi]$ (car $M \neq -I_2$) donc $\text{Sp}(M) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$. Comme χ_M est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $\exists P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $M = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$. Il vient $H(M) = P(I_2 - D)P^{-1}[P(I_2 + D)P^{-1}]^{-1} = P(I_2 - D)(I_2 + D)^{-1}P^{-1} = PH(D)P^{-1}$ donc, comme $H(M)$ et $H(D)$ sont semblables, $\text{Sp}(H(M)) = \text{Sp}(H(D))$. Or $H(D) = \text{diag}(h(e^{i\theta}), h(e^{-i\theta}))$. Par conséquent $\text{Sp}(H(M)) = \left\{ -i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right), -i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \subset i\mathbb{R}$ d'après **b.**.

d. Méthode 1 : pour $M = R_\theta \in O'$, si on résout $MX = e^{i\theta}X$ et $MX = e^{-i\theta}X$, on trouve qu'en posant $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, on a $P\bar{P}^T = I_2$ et $M = P\bar{D}P^T$ avec $D = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ même pour $\theta = 0$ car $\bar{P}^T = P^{-1}$.

Comme avant, $H(M) = PH(D)\bar{P}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \tan(\theta/2) & 0 \\ 0 & -i \tan(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$, on calcule et on obtient l'expression $H(M) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \tan(\theta/2) \\ -2 \tan(\theta/2) & 0 \end{pmatrix} = A_\theta$. Comme toute matrice de $A \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ s'écrit A_θ pour θ unique défini modulo 2π car $\tan$ est π -périodique, A admet un unique antécédent par H dans O' car $M \in O'$ s'écrit $M = R_\theta$ avec θ unique modulo 2π .

Méthode 2 : soit $A \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ (sous-espace des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$). Comme A s'écrit $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$, on a $\det(I_2 + A) = 1 + a^2 > 0$ et $I_2 + A$ est inversible.

Analyse : supposons que $H(M) = A$ pour $M \in O'$, alors $(I_2 - M)(I_2 + M)^{-1} = A$ donc $I_2 - M = A(I_2 + M)$ et $(I_2 + A)M = I_2 - A$ donc $M = (I_2 - A)(I_2 + A)^{-1}$. Ceci justifie l'unicité de l'éventuel antécédent de A par H et donc l'injectivité de l'application H .

Synthèse : soit $M = (I_2 - A)(I_2 + A)^{-1}$, alors $M^T M = [(I_2 - A)(I_2 + A)^{-1}]^T [(I_2 - A)(I_2 + A)^{-1}]$ donc $M^T M = (I_2 + A^T)^{-1} (I_2 - A^T) (I_2 - A) (I_2 + A)^{-1}$ et, comme tout commute et que $A^T = -A$ par hypothèse, on obtient $M^T M = (I_2 - A)^{-1} (I_2 + A) (I_2 - A) (I_2 + A)^{-1} = (I_2 - A)^{-1} (I_2 - A) (I_2 + A) (I_2 + A)^{-1} = I_2$. De plus, $I_2 + M = I_2 + (I_2 - A)(I_2 + A)^{-1} = (I_2 + A + I_2 - A)(I_2 + A)^{-1} = 2(I_2 + A)^{-1}$ est inversible donc $I_2 + M$ est inversible et $-1 \notin \text{Sp}(M)$ ce qui montre que $M \in O'$. Or $M = (I_2 - A)(I_2 + A)^{-1}$ donc $M(I_2 + A) = I_2 - A$ qui s'écrit aussi $(I_2 + M)A = I_2 - M$ et on a vu que $I_2 + M$ est inversible donc $A = (I_2 + M)^{-1} (I_2 - M) = (I_2 - M)(I_2 + M)^{-1} = H(M)$ donc M est bien un antécédent de A par H . Tout ceci nous permet de conclure que H est bien surjective.

Quelle que soit la méthode, H réalise une bijection entre O' et $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.

21.12 a. A est diagonale propre, par définition, si et seulement si $\chi_A = (X - a)(X - d)$. Or on sait d'après le cours que $\chi_A = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A) = \chi_A = X^2 - (a + d)X + ad - bc$.

Ainsi, comme $X^2 - (a + d)X + ad - bc = (X - a)(X - d) = X^2 - (a + d)X + ad$ si et seulement si $bc = 0$, on en déduit que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est à diagonale propre si et seulement si $b = 0$ ou $c = 0$, c'est-à-dire si et seulement si A est triangulaire inférieure (si $b = 0$) ou triangulaire supérieure (si $c = 0$).

b. • Si A est symétrique, pour le produit scalaire canonique sur les matrices défini par $(A|B) = \text{Tr}(A^T B)$,

on a $\|A\|^2 = \text{Tr}(A^T A) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2$. Or, d'après le théorème spectral, on a $A = P D P^T$ avec P orthogonale et D diagonale contenant les valeurs propres de A (comptées avec leurs ordres de multiplicité). Ainsi, il vient $\|A\|^2 = \text{Tr}(A^T A) = \text{Tr}(P D^2 P^T) = \text{Tr}(D^2)$ car deux matrices semblables ont même trace. Or $\text{Tr}(D^2) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda(A) \lambda^2$ ce qui donne bien la relation $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda(A) \lambda^2$ (1).

Si $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n$, on a donc $\|A\|^2 = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda(A) \lambda^2$ mais, par hypothèse, les valeurs propres de A sont

$a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$ donc $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m_\lambda(A) \lambda^2 = \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2$ (2). Ainsi, $\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} a_{i,j}^2 = 0$ (1) - (2) ce qui montre que

$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i \neq j \implies a_{i,j} = 0$ et enfin A diagonale. Ainsi, $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n = \mathcal{D}_n$ (les matrices diagonales) car réciproquement, les matrices diagonales (donc triangulaires) sont symétriques et à diagonale propre.

• Si $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n$, alors par hypothèse $\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - 0) = X^n$ car les termes diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls. Par CAYLEY-HAMILTON, $A^n = 0$ donc A est nilpotente. Comme A^2 est symétrique réelle donc diagonalisable par le théorème spectral et qu'elle est aussi nilpotente, elle est forcément nulle car elle est semblable à une matrice diagonale avec des 0 sur la diagonale. Ainsi $A^2 = 0 = -A^T A$ donc $A^T A = 0$ ce qui donne $\|A\|^2 = \text{Tr}(A^T A) = 0$ donc $A = 0$. Par conséquent $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$.

c. Soit F un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $F \subset \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, d'après la question précédente, $F \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$. Par la formule de GRASSMANN, on a $\dim(F) = \dim(F + \mathcal{A}_n) - \dim(\mathcal{A}_n) = \dim(F + \mathcal{A}_n) - \frac{n(n-1)}{2}$ (classique).

Or $F + \mathcal{A}_n \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\dim(F + \mathcal{A}_n) \leq n^2$ et on obtient donc $\dim(F) \leq n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

On a obtenu une majoration de la dimension des sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des matrices à diagonale propre, mais c'est un maximum car le sous-espace des matrices triangulaires supérieures (par exemple) est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ et il est inclus dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

21.13 D'abord, on constate que Φ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par linéarité du produit scalaire en la première variable donc, comme $\dim(\mathbb{R}) = 1$ donc $\text{rang}(\Phi) \leq 1$, on a deux cas :

- soit $\text{rang}(\Phi) = 1$ donc $\dim(\text{Im}(\Phi)) = \dim(\mathbb{R})$ alors que $\text{Im}(\Phi) \subset \mathbb{R}$ donc $\text{Im}(\Phi) = \mathbb{R}$.
- soit $\text{rang}(\Phi) = 0$, alors $\Phi = 0$ donc $\text{Im}(\Phi) = \{0\}$.

De plus, si $X^T = (x_1 \dots x_n)$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, par calcul matriciel, $\Phi(M) = \langle MX, X \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j} x_i x_j$.

• Comme $X \neq 0$ et que $\Phi(I_n) = \langle X|X \rangle = \|X\|^2 \neq 0$, on a $\text{rang}(\Phi) = 1$ donc $\text{Im}(\Phi) = \Phi(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$.

• Pour $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a $|\Phi(M)| = |\langle MX, X \rangle| \leq \|MX\| \|X\|$. Comme $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|MX\| = \|X\|$ donc $|\Phi(M)| \leq \|X\|^2$ et $\Phi(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) \subset [-\|X\|^2, \|X\|^2]$. Traitons deux cas :

Si $n = 1$, on a $\mathcal{O}_1(\mathbb{R}) = \{I_1, -I_1\}$ donc $\Phi(\mathcal{O}_1(\mathbb{R})) = \{\langle X|X \rangle, \langle -X|X \rangle\} = \{-\|X\|^2, \|X\|^2\}$.

Si $n \geq 2$, posons $X_1 = \frac{X}{\|X\|}$, comme la famille (X_1) est orthonormée, on peut donc la compléter en une base orthonormale $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Soit u l'isométrie de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} R_\theta & 0_{2, n-2} \\ 0_{n-2, 2} & I_{n-2} \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, on note M la matrice de u dans la base canonique. Ainsi, $MX = u(\|X\|X_1) = \|X\|u(X_1) = \|X\|(\cos(\theta)X_1 - \sin(\theta)X_2)$ donc $\Phi(M) = \langle MX, X \rangle = \|X\| \cos(\theta)$.

Pour tout $y \in [-||X||^2; ||X||^2]$, en posant $\theta = \text{Arccos}\left(\frac{y}{||X||^2}\right)$, on a $\langle MX, X \rangle = y \in \Phi(O_n(\mathbb{R}))$.

Par conséquent, par double inclusion, on obtient $\Phi(O_n(\mathbb{R})) = [-||X||^2; ||X||^2]$.

21.14 a. (C) Comme $A^T A = A A^T$ par hypothèse, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $X \in \text{Ker}(A)$, on a $AX = 0$ donc $A^T AX = A A^T X = 0$ donc $||A^T X||^2 = (A^T X)^T (A^T X) = X^T A A^T X = X^T 0 = 0$ ce qui montre que $A^T X = 0$ et que $X \in \text{Ker}(A^T)$. Ainsi, $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(A^T)$.

(D) Par symétrie des rôles joués par A et A^T dans les hypothèses de l'énoncé, la première inclusion montre aussi que $\text{Ker}(A^T) \subset \text{Ker}((A^T)^T) = \text{Ker}(A)$.

Par double inclusion, on a donc l'égalité $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^T)$.

Soit $X \in \text{Ker}(A)$ et $Y \in \text{Im}(A)$, alors il existe $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = AZ$ et $X \in \text{Ker}(A^T)$ d'après a.. Ainsi, $\langle X|Y \rangle = X^T Y = X^T AZ = (A^T X)^T Z = (A^T X|Z) = \langle 0|Z \rangle = 0$ donc $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ sont orthogonaux donc en somme directe. Comme $\dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A)) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$ par la formule du rang, on en déduit que $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

b. Prenons une base orthonormale $\mathcal{B}_1$ de $\text{Ker}(A)$ et une base orthonormale $\mathcal{B}_2$ de $\text{Im}(A)$ (il en existe), alors la famille concaténée $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \amalg \mathcal{B}_2$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ d'après la question précédente. En notant α l'endomorphisme canoniquement associé à A , comme $\text{Im}(A) = \text{Im}(\alpha)$ est stable par α , on peut écrire $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ par blocs avec U qui représente d'après le cours la matrice de l'endomorphisme induit par α dans $\text{Im}(A)$. Par la formule de changement de base, en notant P la matrice de passage entre la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$, on a donc $A = PBP^{-1}$. Comme la base canonique et $\mathcal{B}$ sont des bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$, on sait d'après le cours que P est orthogonale donc que $P^{-1} = P^T$. Comme $\text{Im}(A)$ est un supplémentaire de $\text{Ker}(A)$, on sait d'après le théorème du rang que α induit un automorphisme entre $\text{Im}(A)$ et $\text{Im}(A)$, donc que U est une matrice inversible de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ en notant r le rang de A , donc la dimension de $\text{Im}(A)$. Ainsi, il existe $r \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et $P \in O(n)$ tels que $A = PBP^T$ avec $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $U \in GL_r(\mathbb{R})$.

21.15 a. La matrice $S = M^T M$ est symétrique car $S^T = (M^T M)^T = M^T (M^T)^T = M^T M = S$ et elle est à coefficients réels donc elle est diagonalisable d'après le théorème spectral.

On a $S^2 = (M^T M)(M^T M) = M^T (M M^T) M = M^T (M^T M) M$ par hypothèse car $M^T M = M M^T$. Comme on a $M^2 = -2I_2$, $S^2 = (M^T)^2 M^2 = (M^2)^T M^2 = (-2I_2)^2 = 4I_2$. Ainsi, le polynôme $X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2)$ annule S et on sait d'après le cours que ceci implique que $\text{Sp}(S) = \text{Sp}(M^T M) \subset \{-2, 2\}$.

b. Soit $\lambda \in \text{Sp}(M^T M)$, il existe par définition un vecteur $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $SX = M^T M X = \lambda X$. Ainsi, $X^T M^T M X = \lambda X^T X$ donc $||MX||^2 = \lambda ||X||^2$ d'où $\lambda = \frac{||MX||^2}{||X||^2} \geq 0$ car $||X||^2 > 0$. Or, $\text{Sp}(M^T M) \subset \mathbb{R}_+$ et $\text{Sp}(M^T M) \subset \{-2, 2\}$ implique $\text{Sp}(M^T M) = \{2\}$ car $\text{Sp}(M^T M) \neq \emptyset$ d'après le théorème spectral.

c. Comme S est diagonalisable et n'a qu'une valeur propre, S est semblable à la matrice diagonale avec des 2 sur la diagonale. Comme S est semblable à $2I_2$, on a $S = P(2I_2)P^{-1} = 2I_2 = M^T M$ donc $\left(\frac{M}{\sqrt{2}}\right)^T \left(\frac{M}{\sqrt{2}}\right) = I_2$ ce qui montre que $\frac{M}{\sqrt{2}} \in O(2)$.

Posons $A = \frac{M}{\sqrt{2}}$, on a donc $A \in O(2)$ et $A^2 = -I_2$ d'après **d.** et par hypothèse, donc $\det(A) = 1$ car si on avait $\det(A) = -1$, on aurait $A^2 = I_2$ (réflexion) d'après le cours. Ainsi, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = R_\theta$ et $A^2 = R_{2\theta} = -I_2 = R_\pi$ donc $2\theta \equiv \pi \pmod{2\pi} \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ donc $\theta \equiv \pm \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. Ainsi, les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^T M = M M^T$ et $M^2 + 2I_2 = 0$ sont $M_1 = \sqrt{2} R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \sqrt{2} R_{-\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ (elles conviennent).