

TD 22 : ESPACES EUCLIDIENS

PSI 1 2025-2026

vendredi 13 mars 2026

22.1 a. Pour $(x, x', y) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(\alpha x + x', y) = (u(\alpha x + x')|y) = (\alpha u(x) + u(x')|y)$ par linéarité de u donc $\Phi(\alpha x + x', y) = \alpha(u(x)|y) + (u(x')|y) = \alpha\Phi(x, y) + \Phi(x', y)$ par bilinéarité du produit scalaire donc Φ est linéaire par rapport à sa première variable. De même, si on se donne $(x, y, y') \in E^2$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(x, \beta y + y') = (u(x)|\beta y + y') = \beta(u(x)|y) + (u(x)|y') = \beta\Phi(x, y) + \Phi(x, y')$ par bilinéarité du produit scalaire donc Φ est linéaire par rapport à sa seconde variable. Au final, Φ est bien bilinéaire.

Si Φ est symétrique, pour $(x, y) \in E^2$, $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$ donc $(u(x)|y) = (u(y)|x) = (x|u(y))$ par symétrie du produit scalaire donc u est un endomorphisme auto-adjoint. Par le théorème spectral, u est diagonalisable.

b. Montrons que Φ est un produit scalaire si et seulement si $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ (u symétrique défini positif).

($\Rightarrow$) Si Φ est un produit scalaire, soit λ une valeur propre de u , alors il existe un vecteur non nul x de E tel que $u(x) = \lambda x$. Comme $\Phi(x, x) > 0$ par hypothèse, on obtient $(u(x)|x) = (\lambda x|x) > 0$ donc $\lambda \|x\|^2 > 0$ d'où $\lambda > 0$ car $\|x\|^2 > 0$. Ainsi $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ et u est bien un endomorphisme symétrique défini positif.

($\Leftarrow$) Si $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$, soit $x \neq 0_E \in E$ et $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ strictement positives. On décompose $x = \sum_{k=1}^n x_k v_k$ et $\Phi(x, x) = (u(x)|x) = \left(u\left(\sum_{k=1}^n x_k v_k\right) \middle| \sum_{k=1}^n x_k v_k\right) = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k v_k \middle| \sum_{k=1}^n x_k v_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2$ car $\mathcal{B}$ est une base orthonormée donc $\Phi(x, x) > 0$ car au moins l'un des x_k est non nul et alors $\lambda_k x_k^2 > 0$. Ainsi, Φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive donc un produit scalaire.

c. u est diagonalisable d'après a. et son rang vaut 1. Comme $\dim(\text{Ker}(u)) = n - 1 > 0$ par la formule du rang, 0 est valeur propre de u . Comme E est la somme orthogonale de ses sous-espaces propres, il n'y a qu'une valeur propre non nulle de u , on la note λ . Alors, $E = \text{Ker}(u) \oplus E_\lambda(u)$ donc $E_\lambda(u) = \text{Vect}(v) = \text{Im}(u)$ (avec $v \neq 0_E$) est une droite et $\text{Ker}(u) \perp \text{Im}(u)$ donc $\text{Ker}(u) = (\text{Vect}(v))^\perp$.

Tout vecteur x de E s'écrit $x = x - \frac{(x|v)}{\|v\|^2} v + \frac{(x|v)}{\|v\|^2} v = p(x) + \varphi(x)v$ avec $p(x) = x - \frac{(x|v)}{\|v\|^2} v$ le projeté orthogonal de x sur $\text{Ker}(u)$ car $\left(x - \frac{(x|v)}{\|v\|^2} v \middle| v\right) = (x|v) - (x|v) = 0$ et $\varphi(x) = \frac{(x|v)}{\|v\|^2}$. L'application φ est une forme linéaire sur E par bilinéarité du produit scalaire. Ainsi $\Phi(x, y) = \Phi(p(x) + \varphi(x)v, p(y) + \varphi(y)v)$ donc $\Phi(x, y) = \Phi(p(x), p(y)) + \varphi(x)\Phi(v, p(y)) + \varphi(y)\Phi(p(x), v) + \varphi(x)\varphi(y)\Phi(v, v)$. Mais, comme $p(x) \in \text{Ker}(u)$, $\Phi(p(x), v) = (u(p(x))|v) = (0_E|v) = 0$. De même, il vient $\Phi(v, p(y)) = \Phi(p(y), v) = (u(p(y))|v) = (0_E|v) = 0$ et $\Phi(p(x), p(y)) = (u(p(x))|p(y)) = 0$ car $p(x) \in \text{Ker}(u)$ et $p(y) \in \text{Ker}(u)$. Ainsi $\Phi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)\Phi(v, v)$.

On considère alors trois cas :

- Si $\Phi(v, v) = 0$, on pose $\ell = 0 \in E^*$ la forme linéaire nulle et on a bien $\forall (x, y) \in E^2$, $\Phi(x, y) = \ell(x)\ell(y)$.
- Si $\Phi(v, v) > 0$, on pose $\gamma = \sqrt{\Phi(v, v)}$ et $\ell = \frac{\varphi}{\gamma} \in E^*$ et on a $\forall (x, y) \in E^2$, $\Phi(x, y) = \ell(x)\ell(y)$.
- Si $\Phi(v, v) < 0$, on pose $\gamma = \sqrt{-\Phi(v, v)}$ et $\ell = \frac{\varphi}{\gamma} \in E^*$ et on a $\forall (x, y) \in E^2$, $\Phi(x, y) = -\ell(x)\ell(y)$.

Dans les trois cas, il existe $\ell \in E^*$ tel que $\forall (x, y) \in E^2$, $\Phi(x, y) = \varepsilon \ell(x)\ell(y)$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

22.2 a. La matrice A est symétrique réelle donc, d'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale $P \in O(n)$ et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A (comptées avec leur ordre de multiplicité) telles $A = PDP^T$. Comme $P^T = P^{-1}$, A est diagonalisable.

b. Avec les notations précédentes, comme $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$, posons $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ de sorte que $D = \Delta^2$ donc que $A = (P\Delta)(\Delta P^T) = M^T M$ en posant $M = (\Delta P^T)$ car Δ est symétrique car diagonale.

c. Comme $0 \notin \text{Sp}(A)$, on a $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ par hypothèse. L'application $\varphi : (X, Y) \mapsto X^T A Y$ est bien définie si on identifie $X^T A Y$ à un réel. Sa bilinéarité vient de la distributivité du produit matriciel par rapport à la somme et de la linéarité de la transposition car, par exemple si $(X, X', Y) \in (\mathbb{R}^n)^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(\alpha X + X', Y) = (\alpha X + X')^T A Y = (\alpha X^T + X'^T) A Y = \alpha X^T A Y + X'^T A Y = \alpha \varphi(X, Y) + \varphi(X', Y)$. De plus, $\varphi(Y, X) = Y^T A X = (X^T A Y)^T = \varphi(X, Y)$ car A est symétrique donc φ est aussi symétrique. Si $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $X \neq 0$, en notant $\mathcal{B} = (V_1, \dots, V_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de A (avec $AV_k = \lambda_k V_k$), on décompose $X = \sum_{k=1}^n x_k V_k$ et on a $\varphi(X, X) = X^T A X = (X|AX) = \left(\sum_{i=1}^n x_i V_i \middle| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j V_j \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2$ car $\mathcal{B}$ est une base orthonormale. Comme $X \neq 0$, l'un des x_k est non nul donc l'un des $\lambda_k x_k^2$ est strictement positif. On en déduit que $\varphi(X, X) > 0$ donc que φ est définie positive. Au final, φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Soit la base canonique $\mathcal{B}_0 = (E_1, \dots, E_n)$, alors si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a $a_{i,j} = E_i^T A E_j = \varphi(E_i, E_j)$. On peut donc construire par le procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT une base orthonormale $\mathcal{B} = (W_1, \dots, W_n)$ pour le produit scalaire φ qui vérifie $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\text{Vect}(E_1, \dots, E_k) = \text{Vect}(W_1, \dots, W_n)$ et $\varphi(E_k, W_k) > 0$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_0$ est donc de la forme $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure avec ses coefficients diagonaux strictement positifs. Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormale pour φ , on a $B = (\varphi(E_j, W_i))_{1 \leq i,j \leq n}$. Ainsi, $B^T B$ est la matrice de GRAM telle que $B^T B = (\varphi(E_i, E_j))_{1 \leq i,j \leq n} = A$.

22.3 a. Supposons U et V non inversibles, alors $\det(U) = \det(V) = 0$ et l'inégalité se résume à $\det(U + V) \geq 0$. Or $U + V$ est symétrique donc, par le théorème spectral, $U + V = PDP^T$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale. Or les valeurs propres de $U + V$ sont positives car, si $(U + V)X = \lambda X$ avec $X \neq 0$ donc $\|X\|^2 > 0$, alors il vient $((U + V)X|X) = \lambda \|X\|^2 = (UX|X) + (VX|X) \geq 0$ donc $\lambda \geq 0$. Ainsi, la diagonale de D est composée uniquement de termes positifs donc $\det(U + V) = \det(D) \geq 0$ et on a l'inégalité attendue.

b. • Si $U = I_n$, comme V est matrice symétrique positive, par le théorème spectral, il existe à nouveau $Q \in O(n)$ et $D' = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ avec $\mu_1, \dots, \mu_n$ positifs telles que $V = QD'Q^T$. Ainsi, on peut écrire $\det(I_n + V) = \det(QQ^T + QD'Q^T) = \det(Q(I_n + D')Q^T) = \det(Q)\det(I_n + D')\det(Q^T) = \det(I_n + D')$ donc, comme $\prod_{k=1}^n (1 + \mu_k) = 1 + \sum_{k=1}^n \mu_k + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu_i \mu_j + \dots + \prod_{k=1}^n \mu_k \geq 1 + \prod_{k=1}^n \mu_k$, on parvient à l'inégalité souhaitée, c'est-à-dire $\det(I_n + V) = \prod_{k=1}^n (1 + \mu_k) \leq 1 + \prod_{k=1}^n \mu_k = 1 + \det(V) = \det(I_n) + \det(V)$.

• Supposons seulement U inversible. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres strictement positives (comme avant et puisque 0 ne peut pas faire partie des valeurs propres d'une matrice inversible) de U (éventuellement répétées), $U = PDP^T$ avec P orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. En posant $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et

$S = P\Delta P^T$, il vient $S = S^T$ donc S est symétrique et inversible car $\det(S) = \prod_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k} > 0$ et, comme $P^T P = I_n$, on a $U = SS^T = S^2$. Alors $U + V = S^2 + SS^{-1}VS^{-1}S = S(I_n + W)S$ avec $W = S^{-1}VS^{-1}$. La matrice W est aussi symétrique car $W^T = (S^{-1})^T V^T (S^{-1})^T = (S^T)^{-1} V (S^T)^{-1} = S^{-1}VS^{-1} = W$ et elle vérifie $(WX|X) = X^T S^{-1}VS^{-1}X = Y^T VY \geq 0$ en posant $Y = S^{-1}X$. D'après le cas $U = I_n$ traité avant, on en déduit que $\det(I_n + W) \geq 1 + \det(W)$. Comme $\det(U + V) = \det(S(I_n + W)S) = \det(S)^2 \det(I_n + W)$ et $\det(U) + \det(V) = \det(S^2) + \det(SWS) = \det(S)^2(1 + \det(W))$, on a bien $\det(U + V) \geq \det(U) + \det(V)$.

• Si U est non inversible et V inversible, on échange les rôles et (I) est encore vérifiée.

Dans tous les cas, on a établi l'inégalité (I) : $\det(U + V) \geq \det(U) + \det(V)$ si U et V symétriques positives.

c. D'après la disjonction de cas précédente, (I) devient une égalité :

- si $n = 1$ car $U = (u)$ et $V = (v)$ avec $u, v \geq 0$ et $\det(U + V) = u + v = \det(U) + \det(V)$.
- si $U, V, U + V$ sont toutes trois non inversibles car alors $\det(U + V) = 0 = 0 + 0 = \det(U) + \det(V)$.
- si U est inversible et $n \geq 2$ et $\sum_{k=1}^n \mu_k + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu_i \mu_j + \dots = 0 \iff \mu_1 = \dots = \mu_n = 0$ car ces valeurs sont toutes positives, et dans ce cas $W = 0$ donc $V = SWS = 0$.
- si V est inversible et $n \geq 2$ et $U = 0$ par symétrie entre U et V .

Au final, il y a égalité dans (I) si $n = 1$, si l'une des matrices U et V est nulle ou si les trois matrices $U, V, U + V$ sont toutes non inversibles (par exemple si $U = E_{1,1}$ et $V = E_{2,2}$) quand $n \geq 3$).

22.4 a. D'après le cours, l'application $(A, B) \mapsto (A|B) = \text{Tr}(A^T B)$ définit un produit scalaire (le produit scalaire canonique) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $n : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $n(A) = \text{Tr}(A^T A) = \text{Tr}(AA^T) = \|A\|^2$.

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $n(AB) = \text{Tr}((AB)^T(AB)) = \text{Tr}(B^T A^T AB) = \text{Tr}(BB^T A^T A)$ par propriété de la trace donc $n(AB) = \text{Tr}(S'S)$ avec $S' = BB^T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $S = A^T A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Or, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^T S X = X^T A^T A X = \|AX\|^2 \geq 0$ et $X^T S' X = X^T B B^T X = \|B^T X\|^2 \geq 0$, donc les matrices S et S' sont symétriques positives (donc dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$). D'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ telle que $S = P D P^T$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres positives de S (répétées avec leurs ordres de multiplicité). Posons $C = P^T S' P$, donc $S' = P C P^T$ et $\text{Tr}(S'S) = \text{Tr}(P C P^T P D P^T) = \text{Tr}(P C D P^T) = \text{Tr}(C D)$ car $P C D P^T$ et $C D$ sont semblables. Comme $n(A) = \text{Tr}(A A^T) = \text{Tr}(A^T A) = \text{Tr}(S)$ et $n(B) = \text{Tr}(B B^T) = \text{Tr}(S')$, il s'agit donc d'établir que $n(AB) = \text{Tr}(S'S) \leq \text{Tr}(S) \text{Tr}(S') = n(A)n(B)$. Comme $\text{Tr}(S) = \text{Tr}(D)$ (resp. $\text{Tr}(C) = \text{Tr}(S')$) car S et D (resp. S' et C) sont semblables, on veut montrer que $\text{Tr}(C D) \leq \text{Tr}(C) \text{Tr}(D)$.

La matrice C est symétrique car $C^T = (P^T S' P)^T = P^T S'^T (P^T)^T = P^T S' P = C$ car S' est elle-même symétrique. De plus, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^T C X = X^T P^T S' P X = Y^T S' Y = \|B^T Y\|^2 \geq 0$ en posant $Y = P X$. Ainsi, $C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. En notant $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on sait que $c_{i,j} = E_i^T C E_j$ donc $c_{k,k} = E_k^T C E_k \geq 0$ donc les termes diagonaux de C sont positifs. Ainsi, comme on a $C D = (c_{i,j} \lambda_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ par calcul matriciel, on obtient $\text{Tr}(C D) = \sum_{k=1}^n c_{k,k} \lambda_k \leq \left(\sum_{i=1}^n c_{i,i} \right) \times \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \right) = \text{Tr}(C) \text{Tr}(D)$ car $\text{Tr}(C) \text{Tr}(D) = \sum_{k=1}^n c_{k,k} \lambda_k + \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} c_{i,i} \lambda_j$ et $c_{i,i} \geq 0$ et $\lambda_j \geq 0$. Ainsi, $\text{Tr}(C D) \leq \text{Tr}(C) \text{Tr}(D)$ donc $\text{Tr}(S'S) \leq \text{Tr}(S) \text{Tr}(S')$ et $n(AB) \leq n(A)n(B)$.

b. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc, d'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale telles que $A = P D P^T$. Ainsi, $A A^T = P D P^T P D^T P^T = P D^2 P^T$ donc $n(A) = \text{Tr}(A A^T) = \text{Tr}(D^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$. Pour

tout couple $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a donc $2n(A) = \sum_{k=1}^n (2\lambda_k^2)$ donc $2n(A) \geq 2\lambda_i^2 + 2\lambda_j^2 \geq (\lambda_i - \lambda_j)^2$ car $2\lambda_i^2 + 2\lambda_j^2 \geq (\lambda_i - \lambda_j)^2 \iff 2\lambda_i^2 + 2\lambda_j^2 \geq \lambda_i^2 - 2\lambda_i\lambda_j + \lambda_j^2 \iff \lambda_i^2 + 2\lambda_i\lambda_j + \lambda_j^2 \iff (\lambda_i + \lambda_j)^2 \geq 0$ ce qui est clairement vrai. Ainsi, comme on a aussi $2n(A) = 2\|A\|^2 \geq 0 = (\lambda_i - \lambda_i)^2$, on peut affirmer que $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $2n(A) \geq (\lambda_i - \lambda_j)^2$. Mais comme les valeurs propres de A sont classées dans l'ordre croissant, la plus grande valeur de $(\lambda_i - \lambda_j)^2$ quand $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ est $(\lambda_n - \lambda_1)^2$ de sorte que la meilleure minoration de $n(A)$ obtenue par ce procédé est $(\lambda_n - \lambda_1)^2 \leq 2n(A)$ (I).

On a $2n(A) = 2 \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = 2\lambda_1^2 + 2\lambda_n^2 + \sum_{k=2}^{n-1} (2\lambda_k^2) = (\lambda_n - \lambda_1)^2 + (\lambda_1 + \lambda_n)^2 + \sum_{k=2}^{n-1} (2\lambda_k^2)$ donc on a égalité dans (I) si et seulement si $(\lambda_1 + \lambda_n)^2 + \sum_{k=2}^{n-1} (2\lambda_k^2) = 0$. Traitons plusieurs cas :

- Si $n = 1$, $A = (a) \in S_1(\mathbb{R})$ et $n(A) = \text{Tr}(AA^T) = a^2$ donc, comme $\lambda_n - \lambda_1 = a - a = 0$ car la seule valeur propre de A est a , on a égalité dans (I) si et seulement si A est la matrice nulle de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.
- Si $n = 2$, $2n(A) = (\lambda_2 - \lambda_1)^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)^2$ donc on a égalité dans (I) si et seulement si $\lambda_2 = -\lambda_1$ donc si et seulement si $\text{Tr}(A) = 0$ puisque $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$.
- Si $n \geq 3$, de même, on a égalité dans (I) si et seulement si $(\lambda_n + \lambda_1)^2 + \sum_{k=2}^{n-1} (2\lambda_k^2) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda_n + \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ qui équivaut à $A = 0$ ou $(\text{rang}(A) = 2 \text{ et } \text{Tr}(A) = 0)$.

Il y a égalité dans (I) si et seulement si $A = 0$ ou $(n = 2 \text{ et } \text{Tr}(A) = 0)$ ou $(n \geq 3 \text{ et } \text{Tr}(A) = 0 \text{ et } \text{rang}(A) = 2)$.

22.5 a. L'application f va de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même et sa linéarité provient de celle de la transposition ; on vérifie que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $f(\lambda A + B) = \lambda f(A) + f(B)$. Ainsi, f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Méthode 1 : pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f^2(M) = f(f(M)) = M + M^T + (M + M^T)^T = 2f(M)$ car $(M^T)^T = M$. Par conséquent, $X^2 - 2X = X(X - 2)$ est annulateur de f et scindé à racines simples donc f est diagonalisable.

Méthode 2 : munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $(A|B) = \text{Tr}(A^T B) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}$. Soit

$(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, alors $(f(A)|B) = (A + A^T|B) = (A|B) + (A^T|B) = (A|B) + \text{Tr}(AB) = (B|A) + \text{Tr}(BA)$ par bilinéarité et symétrie du produit scalaire et car on sait que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. Ainsi, on a la relation $(f(A)|B) = (B|A) + (B^T|A) = (f(B)|A) = (A|f(B))$. Ceci prouve que f est autoadjoint donc, d'après le théorème spectral, f est diagonalisable.

Si on a utilisé la méthode 1 ci-dessus, on sait que $\text{Sp}(f) \subset \{0, 2\}$.

Si M est symétrique, $f(M) = 2M$. De plus, $f(M) = 2M \iff M + M^T = 2M \iff M = M^T \iff M \in S_n(\mathbb{R})$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, $E_2(f) = S_n(\mathbb{R})$ est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Si M est antisymétrique, $f(M) = 0$. De plus, $f(M) = 0 \iff M + M^T = 0 \iff M = -M^T \iff M \in A_n(\mathbb{R})$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, $E_0(f) = A_n(\mathbb{R})$ est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Comme $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires (même orthogonaux pour le produit scalaire choisi) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il n'y a pas d'autres valeurs propres de f . Ainsi, on a $\text{Sp}(f) = \{0, 2\}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = E_0(f) \oplus E_2(f)$, $\text{Tr}(f) = n(n+1)$ et $\det(f) = 2$ si $n = 1$ et $\det(f) = 0$ si $n \geq 2$.

22.6 La matrice $A^T A$ est symétrique réelle donc, par le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale $P \in O(n)$ et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de

$A^T A$) telles que $A^T A = P D P^T$. Comme $A^T A$ est inversible car A (et donc A^T) l'est, les λ_j sont non nulles (et même strictement positives). Pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, notons X_j la j -ième colonne de P . On sait que les colonnes de P constituent une base orthonormale de E donc $(X_1, \dots, X_n)$ est une base orthonormale de E . Par formule de changement de base, on a $A X_j = \lambda_j X_j$ et $\|A X_j\|^2 = (A X_j | A X_j) = X_j^T A^T A X_j = X_j^T \lambda_j X_j = \lambda_j \|X_j\|^2 = \lambda_j$ pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ donc $\|A X_j\| \neq 0$ d'où $A X_j \neq 0$ et on a comme attendu $\lambda_j = \|A X_j\|^2 > 0$.

De plus, si $(j, j') \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ avec $j \neq j'$, on a $(A X_j | A X_{j'}) = X_j^T A^T A X_{j'} = X_j^T \lambda_{j'} X_{j'} = \lambda_{j'} (X_j | X_{j'}) = 0$ car $X_j \perp X_{j'}$. La famille $(A X_1, \dots, A X_n)$ est donc constituée de vecteurs non nuls et orthogonaux, on sait d'après le cours qu'elle est libre donc que c'est une base orthogonale de E car $\dim(E) = n$. La famille $\left(\frac{A X_1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{A X_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$, quant à elle est une base orthonormale de E .

22.7 a. Posons $P = \chi_{M(a,b,c)} = \begin{vmatrix} X-a & 0 & -c \\ 0 & X-b & 0 \\ -c & 0 & X-a \end{vmatrix}$. En développant par rapport à la deuxième colonne, $P = (X-b) \begin{vmatrix} X-a & -c \\ -c & X-a \end{vmatrix} = (X-b)((X-a)^2 - c^2)$ donc $\text{Sp}(M(a,b,c)) = \{a-c, a+c, b\}$.

b. Comme P est scindé sur $\mathbb{R}$ (on le savait déjà car $M(a,b,c)$ est symétrique réelle), on sait d'après le cours que $d = \det(M(a,b,c)) = -P(0) = b(a^2 - c^2)$ (ou avec SARRUS). On sait déjà que $\text{Im}(M(a,b,c))$ et $\text{Ker}(M(a,b,c))$ sont orthogonaux car $M(a,b,c)$ est symétrique. Traitons quelques cas :

- Si $a = b = c = 0$, alors $M(a,b,c) = 0$ donc $\text{Ker}(M(a,b,c)) = \mathbb{R}^3$ et $\text{Im}(M(a,b,c)) = \{0\}$.
- Si $b = 0$ et $a = c \neq 0$, alors $\text{rang}(M(a,b,c)) = 1$ et on a $\text{Ker}(M(a,b,c)) = \text{Vect}((1,0,-1), (0,1,0))$ et $\text{Im}(M(a,b,c)) = \text{Vect}((1,0,1))$.
- Si $b = 0$ et $a = -c \neq 0$, alors $\text{rang}(M(a,b,c)) = 1$ et on a $\text{Ker}(M(a,b,c)) = \text{Vect}((1,0,1), (0,1,0))$ et $\text{Im}(M(a,b,c)) = \text{Vect}((1,0,-1))$.
- Si $b = 0$ et $a^2 \neq c^2$, les colonnes 1 et 3 de $M(a,b,c)$ sont indépendantes donc $\text{rang}(M(a,b,c)) = 2$ et $\text{Ker}(M(a,b,c)) = \text{Vect}((0,1,0))$ et $\text{Im}(M(a,b,c)) = \text{Vect}((1,0,1), (1,0,-1))$.
- Si $b \neq 0$ et $a = c = 0$, alors $M = bE_{2,2}$ donc $\text{rang}(M(a,b,c)) = 1$ et on trouve comme avant $\text{Ker}(M(a,b,c)) = \text{Vect}((1,0,0), (0,0,1))$ et $\text{Im}(M(a,b,c)) = \text{Vect}((0,1,0))$.
- Si $b \neq 0$ et $a = c \neq 0$, les colonnes 1 et 2 de $M(a,b,c)$ sont indépendantes donc $\text{rang}(M(a,b,c)) = 2$ et $\text{Ker}(M(a,b,c)) = \text{Vect}((1,0,-1))$ et $\text{Im}(M(a,b,c)) = \text{Vect}((1,0,1), (0,1,0))$.
- Si $b \neq 0$ et $a = -c \neq 0$, les colonnes 1 et 2 de $M(a,b,c)$ sont indépendantes donc $\text{rang}(M(a,b,c)) = 2$ et $\text{Ker}(M(a,b,c)) = \text{Vect}((1,0,1))$ et $\text{Im}(M(a,b,c)) = \text{Vect}((1,0,-1), (0,1,0))$.

c. $M(a,b,c)$ est symétrique réelle donc diagonalisable, et même orthodiagonalisable par le théorème spectral.

d. Les conditions imposées à a, b, c montrent que $a - c \neq a + c$, que $a + c \neq b$ et que $a - c \neq b$. La matrice $M(a,b,c)$ admet donc trois valeurs propres distinctes donc les sous-espaces propres associés sont des droites.

Comme $M(a,a,c) - (a+c)I_3 = \begin{pmatrix} -c & 0 & c \\ 0 & -c & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix}$, on constate que $(M(a,a,c) - (a+c)I_3)v_1 = 0$ donc que

$M(a,a,c)v_1 = (a+c)v_1$ avec $v_1 = (1,0,1)$. Il est clair que $M(a,a,c)v_2 = bv_2$ pour $v_2 = (0,1,0)$. De même, on $M(a,a,c)v_3 = (a-c)v_3$ avec $v_3 = (1,0,-1)$. La famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est libre car formée de vecteurs

propres associés à des valeurs propres différentes donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de cette famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique est donc inversible. Par formule de changement de base, on a $M(a, a, c) = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(a + c, a, a - c)$.

En général, pour a, b, c quelconques, avec les mêmes vecteurs v_1, v_2 et v_3 et la même matrice P , on a $M(a, b, c)v_1 = (a + c)v_1$, $M(a, b, c)v_2 = bv_2$ et $M(a, b, c)v_3 = (a - c)v_3$ donc, par la formule de changement de base, on a $M(a, b, c) = PDP^{-1}$ en notant $D = \text{diag}(a + c, b, a - c)$. On pourrait imposer P orthogonale grâce au théorème spectral en prenant plutôt $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ mais ce n'est pas demandé.

22.8 a. Soit $X \in \mathbb{R}^n$, en se rappelant que si $U = (u) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $MU = uM$, on a l'équivalence $X \in \text{Ker}(M) \iff (AB^T + BA^T)X = 0 \iff AB^TX + BA^TX = 0 \iff (B|X)A + (A|X)B = 0 \iff (A|X) = (B|X) = 0$ car $A^TX = (A|X)$, $B^TX = (B|X)$ (il est implicite que $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique) et que (A, B) est libre. Ainsi, $\text{Ker}(M) = (\text{Vect}(A))^\perp \cap (\text{Vect}(B))^\perp = \text{Vect}(A, B)^\perp$.

Ainsi, $\dim(\text{Ker}(M)) = n - \dim(\text{Vect}(A, B)) = n - 2$ car (A, B) est libre. Par la formule du rang, $\text{rang}(M) = n - \dim(\text{Ker}(M)) = 2$. Soit $Y \in \text{Im}(M)$, $\exists X \in \mathbb{R}^n$, $Y = MX$ et $Y = (B|X)A + (A|X)B \in \text{Vect}(A, B)$ donc $\text{Im}(M) \subset \text{Vect}(A, B)$. Par égalité des dimensions, $\text{Im}(M) = \text{Vect}(A, B)$.

b. Comme $M^T = (AB^T + BA^T)^T = BA^T + AB^T = M$ donc M est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral. Mieux, il existe $P \in O(n)$ et D diagonale telles que $M = PDP^T$.

Comme $\mathbb{R}^n = \text{Vect}(A, B)^\perp \oplus \text{Vect}(A, B)$, en prenant $(V_1, \dots, V_{n-2})$ une base de $\text{Ker}(M)$, la famille $\mathcal{B} = (V_1, \dots, V_{n-2}, A, B)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Si on note Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à $\mathcal{B}$, comme $\text{Ker}(M)$ et $\text{Im}(M)$ sont stables par M , on a $Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 0_{n-2, n-2} & 0_{n-2, 2} \\ 0_{2, n-2} & N \end{pmatrix} = M'$ (par blocs) qui représente la matrice de l'endomorphisme f canoniquement associé à M dans la base $\mathcal{B}$. Comme on a $MA = (AB^T + BA^T)A = (A|B)A + \|A\|^2B$ et $MB = (AB^T + BA^T)B = \|B\|^2A + (A|B)B$, on connaît $N = \begin{pmatrix} (A|B) & \|A\|^2 \\ \|B\|^2 & (A|B) \end{pmatrix}$ qui représente la matrice dans (A, B) de l'application induite par f dans $\text{Im}(M)$. Ainsi, $\chi_M = \chi_{M'} = X^{n-2}\chi_N = X^{n-2}(X^2 - 2(A|B)X + (A|B)^2 - \|A\|^2\|B\|^2) = X^{n-2}((X - (A|B))^2 - (\|A\|\|B\|)^2)$. Par identité remarquable, on trouve donc $\chi_M = X^{n-2}(X - (A|B) + \|A\|\|B\|)(X - (A|B) - \|A\|\|B\|)$ ce qui montre que $\text{Sp}(M) = \{0, (A|B) + \|A\|\|B\|, (A|B) - \|A\|\|B\|\}$. Ces deux dernières valeurs propres vérifient $(A|B) + \|A\|\|B\| > 0$ et $(A|B) - \|A\|\|B\| < 0$ par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ et son cas d'égalité.

22.9 a. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ d'après le théorème spectral et il existe donc une matrice $P \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^T$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Comme A et D sont semblables, on a $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(D) = D_1 + D_2 = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\det(A) = \det(D) = D_1D_2 - a^2 = \lambda_1\lambda_2$.

Méthode 1 : comme (E_1, E_2) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, on sait que $D_1 = (E_1|AE_1)$ et $D_2 = (E_2|AE_2)$. Soit (V_1, V_2) la base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ telle que V_1 est la première colonne de $P \in O(2)$ et V_2 sa seconde. Les vecteurs colonnes V_1 et V_2 sont donc des vecteurs propres de A associés respectivement

aux valeurs propres λ_1 et λ_2 . On peut décomposer $E_1 = x_1 V_1 + x_2 V_2$ dans la base (V_1, V_2) , ce qui revient à poser $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P^{-1} E_1 = P^T E_1$, ce qui équivaut à $E_1 = PX$ (formule de changement de coordonnées).

Ainsi, $D_1 = (E_1 | A E_1) = (x_1 V_1 + x_2 V_2 | A(x_1 V_1 + x_2 V_2)) = (x_1 V_1 + x_2 V_2 | \lambda_1 x_1 V_1 + \lambda_2 x_2 V_2) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$, ce qui donne $D_1 \leq \lambda_1(x_1^2 + x_2^2) = \lambda_1$ car $\lambda_2 \leq \lambda_1$ et $x_2^2 \geq 0$ et que $x_1^2 + x_2^2 = 1$ car $\|E_1\|^2 = 1$. On pouvait aussi écrire $D_1 = (E_1 | A E_1) = E_1^T A E_1 = E_1^T P D P^T E_1 = X^T D X$ et effectuer directement le calcul matriciel.

On a donc $\lambda_1 + \lambda_2 = D_1 + D_2$, $\lambda_1 \geq D_1$ et $\lambda_2 = D_2 - (\lambda_1 - D_1) \leq D_2$.

Méthode 2 : en posant $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $P D = \begin{pmatrix} \alpha \lambda_1 & \beta \lambda_2 \\ \gamma \lambda_1 & \delta \lambda_2 \end{pmatrix}$ donc $P D P^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 & * \\ * & \lambda_1 \gamma^2 + \lambda_2 \delta^2 \end{pmatrix} = A$ et, en identifiant, $D_1 = \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 \leq \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_1 \beta^2 = \lambda_1(\alpha^2 + \beta^2) = \lambda_1$ car $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ car $P P^T = I_2$. De même, $D_2 = \lambda_1 \gamma^2 + \lambda_2 \delta^2 \geq \lambda_2 \gamma^2 + \lambda_2 \delta^2 = \lambda_2$ car $\gamma^2 + \delta^2 = 1$.

b. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ symétrique telle que λ_1 et λ_2 soient ses deux valeurs propres réelles (pas forcément distinctes - grâce au théorème spectral) et $D_1 \geq D_2$ des réels tels que $\lambda_1 \geq \lambda_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = D_1 + D_2$, $\lambda_1 \geq D_1$, on va montrer qu'il existe un réel a tel que A soit orthoséparable à la matrice $\begin{pmatrix} D_1 & a \\ a & D_2 \end{pmatrix}$.

Posons $m = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{D_1 + D_2}{2}$ le milieu commun des segments $[\lambda_2; \lambda_1]$ et $[D_2; D_1]$ car $\lambda_1 + \lambda_2 = D_1 + D_2$, le réel $\alpha = D_1 - m \geq 0$ car $D_1 \geq D_2$ et $\beta = \lambda_1 - m \geq \alpha$ car $\lambda_1 \geq \lambda_2$ et $\lambda_1 \geq D_1$ (tracer $\lambda_2 \leq D_2 \leq D_1 \leq \lambda_1$). Alors, $D_1 D_2 - \lambda_1 \lambda_2 = (m + \alpha)(m - \alpha) - (m + \beta)(m - \beta) = m^2 - \alpha^2 - (m^2 - \beta^2) = \beta^2 - \alpha^2 \geq 0$. On peut donc poser $a = \sqrt{D_1 D_2 - \lambda_1 \lambda_2}$ de sorte que $D_1 D_2 - a^2 = \lambda_1 \lambda_2$. Comme on a $D_1 D_2 - a^2 = \lambda_1 \lambda_2$ et $D_1 + D_2 = \lambda_1 + \lambda_2$, on est en bonne voie pour montrer que $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} D_1 & a \\ a & D_2 \end{pmatrix}$ sont semblables car $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(D)$ et $\det(M) = \det(D)$.

D'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $A = P D P^T$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ car λ_1, λ_2 sont les deux valeurs propres de A . Or $\chi_M = X^2 - \text{Tr}(M)X + \det(M) = X^2 - (D_1 + D_2)X + D_1 D_2 - a^2$ donc $\chi_M = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1 \lambda_2 = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$. Traitons deux cas :

Si $\lambda_1 = \lambda_2$, alors A et M sont orthoséparables à $D = \lambda_1 I_2$ donc $A = M = \lambda_1 I_2$ et on a $\lambda_2 = D_2 = D_1 = \lambda_1$ dans ce cas avec $a = 0$ donc $M = I_2 A I_2^T$ avec $I_2 \in O_2(\mathbb{R})$.

Si $\lambda_1 > \lambda_2$, A et M étant symétriques réelles avec $\chi_A = \chi_M = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$, il existe deux matrices P, Q orthogonales telles que $A = P D P^T$ et $M = Q D Q^T$ donc $M = (Q P^T) D (Q P^T)^T$ avec $Q P^T \in O_2(\mathbb{R})$ par stabilité de $O_2(\mathbb{R})$ par produit donc A et M sont orthoséparables.

Ainsi, M et D sont orthoséparables dans les deux cas. Il suffisait de montrer que A et D (resp. M et D) sont orthoséparables, et comme la relation binaire d'orthosimilitude est une relation d'équivalence car $O_2(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, M et A sont elles aussi orthoséparables.

Pour aller plus loin : si on veut expliciter une matrice $P \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $M = P D P^T$, on peut chercher P sous la forme d'une matrice R_θ (le faire aussi avec des S_θ). Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $M_\theta = R_\theta D R_\theta^T = R_\theta D R_{-\theta}$ donc $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta & (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \theta \cos \theta \\ (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \theta \cos \theta & \lambda_1 \sin^2 \theta + \lambda_2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}$.

Traitons deux cas :

Si $\lambda_1 = \lambda_2$, alors A est semblable à $D = \lambda_1 I_2$ donc $A = \lambda_1 I_2$. De plus, comme $\lambda_2 \leq D_2 \leq D_1 \leq \lambda_1$, on a

$D_1 = D_2 = \lambda_1$ donc $a = 0$ et $M = D$ et on peut prendre $P = I_2 = R_0$.

Si $\lambda_1 > \lambda_2$, avec le calcul précédent, on veut prendre $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $(\lambda_1 - \lambda_2) \sin \theta \cos \theta = a$, ce qui s'écrit aussi $\sin(2\theta) = \frac{2a}{\lambda_1 - \lambda_2}$. Il faut donc vérifier que $2a \leq \lambda_1 - \lambda_2$. Ces quantités étant positives, $2a \leq \lambda_1 - \lambda_2 \iff 4a^2 \leq (\lambda_1 - \lambda_2)^2 \iff 4(D_1 D_2 - \lambda_1 \lambda_2) \leq \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2$ donc on a encore $2a \leq \lambda_1 - \lambda_2 \iff 4D_1 D_2 \leq (\lambda_1 + \lambda_2)^2 = (D_1 + D_2)^2$. Or, il est classique que $4D_1 D_2 \leq (\lambda_1 + \lambda_2)^2 = (D_1 + D_2)^2 \iff (D_1 - D_2)^2 \geq 0$ est vrai. Ainsi, $\frac{2a}{\lambda_1 - \lambda_2} \in [0; 1]$, posons donc $\theta = \frac{1}{2} \text{Arcsin} \left(\frac{2a}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right]$ d'où $\sin(2\theta) = \frac{2a}{\lambda_1 - \lambda_2}$. Comme $2\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$, $\cos(2\theta) \geq 0$ donc $\cos(2\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(2\theta)} = \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{\lambda_1 - \lambda_2} \right)^2} = \frac{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4a^2}}{\lambda_1 - \lambda_2}$ et on trouve $\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta = \lambda_1 \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} + \lambda_2 \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \cos(2\theta)$, ce qui donne $\lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta = \frac{D_1 + D_2}{2} + \frac{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4a^2}}{2} = \frac{D_1 + D_2}{2} + \frac{\sqrt{(D_1 - D_2)^2}}{2} = D_1$ (voir ci-dessus). On obtient, par un calcul analogue, $\lambda_1 \sin^2 \theta + \lambda_2 \cos^2 \theta = D_2$. Par conséquent, on a $M_\theta = M = \begin{pmatrix} D_1 & a \\ a & D_2 \end{pmatrix} = R_\theta D R_\theta^T$.

22.10 a. Soit f autoadjoint, on sait qu'alors $E = \bigoplus_{k=1}^r E_{\lambda_k}(f)$ en notant $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \subset \mathbb{R}$ avec ces sous-espaces propres qui sont orthogonaux et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ distincts.

($\implies$) Si f est une contraction (je dirais plutôt f 1-lipschitzienne), soit $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, il existe $x_k \neq 0_E$ tel que $f(x_k) = \lambda_k x_k$ et $\|f(x_k)\| = |\lambda_k| \|x_k\| \leq \|x_k\|$ donc, comme $\|x_k\| > 0$, on en déduit que $|\lambda_k| \leq 1$.

($\impliedby$) pour un vecteur $x \in E$, on le décompose avec $x = \sum_{k=1}^r x_k$ avec $\forall k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $x_k \in E_{\lambda_k}(f)$. Ainsi, par PYTHAGORE, on a $\|f(x)\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^r \lambda_k x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^r \lambda_k^2 \|x_k\|^2 \leq \sum_{k=1}^r \lambda_k^2 \|x_k\|^2 = \|x\|^2$ car $\forall k \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $\lambda_k^2 \leq 1$. En passant à la racine, $\|f(x)\| \leq \|x\|$ et f est contractante.

Par conséquent, si f est autoadjoint, f est une contraction si et seulement si $\forall \lambda \in \text{Sp}(f)$, $|\lambda| \leq 1$.

b. f^2 est autoadjoint si f l'est car $\forall x \in E$, $(f^2(x)|x) = (f(f(x))|x) = (f(x)|f(x)) = (x|f(f(x))) = (x|f^2(x))$.

Par une récurrence simple, on établit que $\forall i \in \mathbb{N}$, f^i est aussi autoadjoint. Ainsi, si $P = \sum_{i=0}^d a_i X^i$, alors

$P(f) = \sum_{i=0}^d a_i f^i$ est auto-adjoint. De plus, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de vecteurs propres de f telle que $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $f(e_j) = \mu_j e_j$, on a $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $P(f)(e_j) = \sum_{i=0}^d a_i f^i(e_j) = \sum_{i=0}^d a_i \lambda_j^i e_j = P(\lambda_j) e_j$ donc $\mathcal{B}$ est encore une base orthonormale de vecteurs propres de $P(f)$ et $\text{Sp}(P(f)) = \{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)\} = P(\text{Sp}(f))$ car $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ (les valeurs propres λ_k sont distinctes, pas les μ_j).

Enfin, pour $x \in E$, en décomposant $x = \sum_{j=1}^r \alpha_j e_j$, on a $P(f)(x) = \sum_{j=1}^r \alpha_j P(f)(e_j) = \sum_{j=1}^r \alpha_j P(\lambda_j) e_j$ donc, avec PYTHAGORE, $\|P(f)(x)\|^2 = \sum_{j=1}^r \alpha_j^2 P(\lambda_j)^2 \leq \left(\sup_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (|P(\lambda)|) \right)^2 \sum_{j=1}^r \alpha_j^2 = \left(\sup_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (|P(\lambda)|) \right)^2 \|x\|^2$ donc $\|P(f)(x)\| \leq \left(\sup_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (|P(\lambda)|) \right) \|x\|$ en passant à la racine.

22.11 a. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in E, f(x) = (u(x)|x)$. On a $f = g \circ h$ avec $h : E \rightarrow E \times E$ telle que $h(x) = (u(x), x)$ et $g : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = (x|y)$. Comme h est linéaire et g bilinéaire en dimension finie, h et g sont continues donc f l'est aussi par composition. Comme S est un fermé borné et que E est de dimension finie, par le théorème des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses bornes sur S .

Comme u est autoadjoint, par le théorème spectral, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_p)$ de E composée de vecteurs propres de u tels que $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, u(v_k) = \lambda_k v_k$. Pour $x \in S$ qu'on écrit $x = \sum_{k=1}^p x_k v_k$, on a $u(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k v_k$ donc $f(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k x_k^2$ car $\mathcal{B}$ est orthonormée. Comme $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lambda_k \geq \lambda_1$, il vient $f(x) \geq \lambda_1 \sum_{k=1}^p x_k^2 = \lambda_1 \|x\|^2 = \lambda_1$ donc λ_1 est un minorant de f sur S . De plus, comme v_1 est dans S et que $f(v_1) = (u(v_1)|v_1) = (\lambda_1 v_1|v_1) = \lambda_1 \|v_1\|^2 = \lambda_1$, ce minorant fait partie de $f(S)$ ce qui justifie que $\lambda_1 = \inf(f(S)) = \min(f(S))$ de sorte que $\lambda_1 = \min_{x \in S} ((u(x)|x))$.

c. Minorant : soit $F \in \mathcal{E}_2$ et l'hyperplan $H = \text{Vect}(v_2, \dots, v_p)$, d'après la formule de GRASSMANN, on a $\dim(F \cap H) = \dim(F) + \dim(H) - \dim(F + H)$. Or $F + H \subset E$ donc $\dim(F + H) \leq p$ et on a donc $\dim(F \cap H) \geq 2 + (p - 1) - p = 1$ et il existe un vecteur v unitaire dans $F \cap H \cap S$ car $F \cap H$ est au moins une droite. Pour $v = \sum_{k=2}^p \alpha_k v_k$, comme avant $f(v) = (u(v)|v) = \sum_{k=2}^p \lambda_k \alpha_k^2 \geq \lambda_2 \sum_{k=2}^p \alpha_k^2 = \lambda_2 \|v\|^2 = \lambda_2$ donc $\lambda_2 \leq \max_{x \in S \cap F} ((u(x)|x))$ (ce maximum existe car f est continue sur le fermé borné $S \cap F$ comme avant). On vient de montrer que λ_2 est un minorant de l'ensemble $A = \left\{ \max_{x \in S \cap F} ((u(x)|x)) \mid F \in \mathcal{E}_2 \right\}$.

Minimum : Soit $F_0 = \text{Vect}(v_1, v_2) \in \mathcal{E}_2$, on a $f(v_2) = (u(v_2)|v_2) = (\lambda_2 v_2|v_2) = \lambda_2 \|v_2\|^2 = \lambda_2$ et $v_2 \in F_0$ donc $\lambda_2 = \max_{x \in S \cap F_0} ((u(x)|x))$ et $\lambda_2 \in A$.

Par conséquent, $\lambda_2 = \min(A) = \min_{F \in \mathcal{E}_2} \left(\max_{x \in S \cap F} ((u(x)|x)) \right)$.

22.12 a. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite de FIBONACCI et ses premiers termes sont $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1,$

$$f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8. \text{ Ainsi, } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières colonnes de A_n forment une famille libre car $f_0 = 0$ et $f_1 = 1$. De plus, par construction, en notant C_j la j -ième colonne de A_n , on a $\forall j \in \llbracket 1; n - 2 \rrbracket, C_{j+2} = C_{j+1} + C_j$ ce qui montre que les colonnes $C_3, \dots, C_n$ sont des combinaisons linéaires des colonnes précédentes donc des colonnes C_1 et C_2 . Ainsi, $\text{rang}(A_n) = 2$ de qui montre, avec la formule du rang, que $\dim(\text{Ker}(A_n)) = \dim(E_0(A_n)) = n - 2$. Comme A_n est symétrique réelle car $f_{i+j-2} = f_{j+i-2}$, la matrice A_n est diagonalisable d'après le théorème spectral. Par conséquent, l'ordre de multiplicité de 0 dans χ_{A_n} est égal à $\dim(E_0(A_n)) = n - 2$.

b. D'après la question précédente et toujours grâce au théorème spectral, $\chi_{A_n} = X^{n-2}(X - \lambda_n)(X - \mu_n)$ avec des réels λ_n, μ_n car on sait que χ_{A_n} est scindé sur $\mathbb{R}$, et qu'il est unitaire de degré n .

• Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $X^T = (1 \ -1 \ 0 \ \dots \ 0) \neq 0$. On a $X^T A_n X = -1 < 0$ donc A_n n'est pas symétrique positive, il existe donc d'après le cours une valeur propre $\alpha_n < 0$ de A_n .

• Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ défini par $X^T = (1 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0) \neq 0$. On a $X^T A_n X = 3 > 0$ donc A_n n'est pas symétrique négative, il existe donc d'après le cours une valeur propre $\beta_n > 0$ de A_n .

Les valeurs propres de A_n sont donc $\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-2 \text{ fois}}, \alpha_n, \beta_n$.

c. Soit $X_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre unitaire de A_n associé à la valeur α_n , d'où $A_n X_n = \alpha_n X_n$. On considère le vecteur $Y_{n+1} = \begin{pmatrix} X_n \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Par un calcul par blocs, comme $A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & * \\ * & f_{2n} \end{pmatrix}$, $Y_{n+1}^T A_{n+1} Y_{n+1} = X_n^T A_n X_n = \alpha_n X_n^T X_n = \alpha_n \|X_n\|^2 = \alpha_n$. Grâce au théorème spectral, les espaces propres de A_{n+1} sont supplémentaires orthogonaux et $\mathbb{R}^{n+1} = E_0(A_{n+1}) \oplus E_{\alpha_{n+1}}(A_{n+1}) \oplus E_{\beta_{n+1}}(A_{n+1})$. Ainsi, $Y_{n+1} = U_{n+1} + V_{n+1} + W_{n+1}$ avec $(U_{n+1}, V_{n+1}, W_{n+1}) \in E_0(A_{n+1}) \times E_{\alpha_{n+1}}(A_{n+1}) \times E_{\beta_{n+1}}(A_{n+1})$ et $\alpha_n = Y_{n+1}^T A_{n+1} Y_{n+1} = \alpha_{n+1} \|V_{n+1}\|^2 + \beta_{n+1} \|W_{n+1}\|^2 \geq \alpha_{n+1} \|V_{n+1}\|^2 + \alpha_{n+1} \|W_{n+1}\|^2 \geq \alpha_{n+1}$ car on a $\|V_{n+1}\|^2 + \|W_{n+1}\|^2 \leq \|U_{n+1}\|^2 + \|V_{n+1}\|^2 + \|W_{n+1}\|^2 = \|Y_{n+1}\|^2 = \|X_n\|^2 = 1$.

Ainsi, $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$ et on peut conclure que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

Avec la même méthode, la suite $(\beta_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

Comme $f_1 = 1 \in \mathbb{N}^*$, $f_2 = 1 \in \mathbb{N}^*$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, comme $\forall n \geq 2$, $f_{n+1} - f_n = f_{n-1} \geq 1$, la suite $(f_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante et $\forall n \geq 2$, $f_n = f_2 + \sum_{k=2}^{n-1} (f_{k+1} - f_k) \geq n - 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = +\infty$. Comme $\text{Tr}(A_n) = \sum_{k=0}^n f_{2k} \geq f_{2n}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Tr}(A_n) = +\infty$. Or $\text{Tr}(A_n) = \alpha_n + \beta_n \leq \beta_n$ donc, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = +\infty$.

Il semble que $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ soit convergente, mais c'est une autre histoire !

22.13 Analyse : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^T M M^T = I_n$. La matrice $A = M^T M$ est symétrique réelle, et on a $M = A^{-1}$ par hypothèse. Ainsi, $M^T = (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1} = M$ ce qui justifie que M est aussi symétrique réelle. Par conséquent, on a $M^T M M^T = M^3 = I_n$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O(n)$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = P D P^T$, ce qui donne $M^3 = P D^3 P^T = I_n = P P^T$ donc $D^3 = 1$. Mais comme les termes diagonaux de D sont des réels et que l'application $t \mapsto t^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a forcément $D = I_n$. Par conséquent, $M = P I_n P^T = P P^T = I_n$.

Synthèse : si $M = I_n$, on a bien $M^T M M^T = I_n^3 = I_n$.

Conclusion : la seule matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^T M M^T = I_n$ est $M = I_n$.

22.14 a. Pour $(P, Q) \in E^2$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur le segment $[-1; 1]$ donc l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien définie sur E^2 et à valeurs dans $\mathbb{R}$ car le réel $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ existe.

Symétrie : pour $(P, Q) \in E^2$, comme $PQ = QP$, on a $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$ donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

Bilinéarité : pour $(P_1, P_2, Q) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle \lambda P_1 + P_2, Q \rangle = \int_{-1}^1 (\lambda P_1(t) + P_2(t))Q(t)dt$ donc on obtient $\langle \lambda P_1 + P_2, Q \rangle = \int_{-1}^1 (\lambda P_1(t) + P_2(t))Q(t)dt + \int_{-1}^1 (\lambda P_1(t) + P_2(t))Q(t)dt = \lambda \langle P_1, Q \rangle + \langle P_2, Q \rangle$ par linéarité de l'intégrale et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire en la première variable ce qui montre, par symétrie, que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est aussi linéaire en la seconde. Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.

Définie positivité : pour $P \in E$, $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 P(t)^2 dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale car $P(t)^2 \geq 0$ pour

$t \in [-1; 1]$ et que $-1 \leq 1$. De plus, si $\langle P, P \rangle = 0$, comme la fonction $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $[-1; 1]$, elle y est nulle donc le polynôme P admet une infinité de racines et $P = 0$.

Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit bien un produit scalaire sur E .

b. Soit $(P_1, P_2) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par définition de f_A , on a $P_1 = AQ_1 + R_1$ et $P_2 = AQ_2 + R_2$ où $R_1 = f_A(P_1)$ et $R_2 = f_A(P_2)$ donc $\lambda P_1 + P_2 = A(\lambda Q_1 + Q_2) + (\lambda R_1 + R_2)$ donc $R = \lambda R_1 + R_2$ est bien le reste de la division euclidienne de $\lambda P_1 + P_2$ par A car $\deg(\lambda R_1 + R_2) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(A) \leq n$, ce qui montre la linéarité de f_A car $f_A(\lambda P_1 + P_2) = \lambda R_1 + R_2 = \lambda f_A(P_1) + f_A(P_2)$. Comme $\forall P \in E$, $f_A(P) \in E$ par construction, f_A est bien un endomorphisme de E .

c. Soit $P \in E$ et $R = f_A(P)$ de sorte que $P = AQ + R$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$. Comme $R = A \cdot 0 + R$ avec $\deg(R) < \deg(A)$, R est le reste de la division euclidienne de R par A donc $f_A(R) = R = f_A^2(P) = f_A(P)$ ce qui montre que f_A est un projecteur de E quelle que soit la valeur de A . Notons $p = \deg(A) \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Méthode 1 : on procède par analyse synthèse :

Analyse : supposons que f_A est un projecteur orthogonal, on sait d'après le cours que f_A est alors un endomorphisme autoadjoint. Pour $(i, j) \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket \times \llbracket 0; n-p \rrbracket$, posons $P_1 = X^{n-p}A + X^i \in E$ et $P_2 = X^jA \in E$, alors $f_A(P_1) = X^i$ et $f_A(P_2) = 0$ de sorte que $(X_i | X^jA) = (f_A(P_1) | P_2) = (P_1 | f_A(P_2)) = 0$ donc $(A | X^{i+j}) = 0$. On en déduit que $A \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$.

Synthèse Si $A \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$, pour $(P_1, P_2) \in E^2$, si $P_1 = AQ_1 + R_1$ et $P_2 = AQ_2 + R_2$ où $R_1 = f_A(P_1)$ et $R_2 = f_A(P_2)$, $\langle f_A(P_1), P_2 \rangle = \langle P_1, f_A(P_2) \rangle = \langle R_1, AQ_2 + R_2 \rangle = \langle AQ_1 + R_1, R_2 \rangle = \langle A, R_1Q_2 - R_2Q_1 \rangle$. Or $(R_1, R_2) \in (\mathbb{R}_{p-1}[X])^2$ et $(Q_1, Q_2) \in (\mathbb{R}_{n-p}[X])^2$ donc $u \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on a bien $\langle A | u \rangle = 0$ donc $\langle f_A(P_1), P_2 \rangle = \langle P_1, f_A(P_2) \rangle$ et f_A est autoadjoint donc f_A est un projecteur orthogonal.

Méthode 2 : pour $P \in E$, $f_A(P) = 0 \iff A$ divise P car $f_A(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par A . Ainsi, $\text{Ker}(f_A) = E_0(f_A) = A \mathbb{R}_{n-p}[X]$ (les multiples de A de degrés inférieurs ou égaux à n). Par définition du reste, $\text{Im}(f_A) = E_1(f_A) \subset \mathbb{R}_{p-1}[X]$ et on a même égalité car $\forall R \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$, $f_A(R) = R$. Par conséquent, f_A est un projecteur orthogonal si et seulement si $A \mathbb{R}_{n-p}[X] \perp \mathbb{R}_{p-1}[X]$, ce qu'on peut écrire $\forall (u, v) \in \mathbb{R}_{n-p}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X]$, $(Au | v) = (A | uv) = 0$. Comme tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ s'écrit uv avec $(u, v) \in \mathbb{R}_{n-p}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X]$, on a $A \mathbb{R}_{n-p}[X] \perp \mathbb{R}_{p-1}[X] \iff A \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$.

Quelle que soit la méthode, f_A est un projecteur orthogonal si et seulement si $A \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$.

d. Dans cette question, on prend $n = 3$ et on cherche $A = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_2[X]^\perp$.

Méthode 1 : $A \in \mathbb{R}_2[X]^\perp$ si et seulement si $\langle A, 1 \rangle = \langle A, X \rangle = \langle A, X^2 \rangle = 0$ car $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Or $\langle A, 1 \rangle = \frac{2b}{3} + 2d$, $\langle A, X \rangle = \frac{2a}{5} + \frac{2c}{3}$ et $\langle A, X^2 \rangle = \frac{2b}{5} + \frac{2d}{3}$. Or $\frac{2a}{5} + \frac{2c}{3} = 0 \iff c = -\frac{3a}{5}$ et $\frac{2b}{3} + 2d = \frac{2b}{5} + \frac{2d}{3} = 0 \iff b = d = 0$. Ainsi, $A \in \mathbb{R}_2[X]^\perp$ si et seulement si $A = a(X^3 - \frac{3X}{5})$ avec $a \neq 0$.

Méthode 2 : avec l'algorithme de GRAM-SCHMIDT, on orthogonalise la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $E = \mathbb{R}_3[X]$. On prend $E_0 = 1$, puis $E_1 = X - \frac{\langle X, E_0 \rangle}{\|E_0\|^2} E_0 = X - \frac{0}{2} E_0 = X$ (on ne norme pas les vecteurs), puis $E_2 = X^2 - \frac{\langle X^2, E_0 \rangle}{\|E_0\|^2} E_0 - \frac{\langle X^2, E_1 \rangle}{\|E_1\|^2} E_1 = X^2 - \frac{(2/3)}{2} E_0 - \frac{0}{(2/3)} E_1 = X^2 - \frac{1}{3}$ et enfin le dernier vecteur

$E_3 = X^3 - \frac{\langle X^3, E_0 \rangle}{\|E_0\|^2} E_0 - \frac{\langle X^3, E_1 \rangle}{\|E_1\|^2} E_1 - \frac{\langle X^3, E_2 \rangle}{\|E_2\|^2} E_2 = X^3 - \frac{0}{2} E_0 - \frac{(2/5)}{(2/3)} E_1 - \frac{0}{(8/45)} E_2 = X^3 - \frac{3X}{5}$. Comme $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(E_0, E_1, E_2)$ et que (E_0, E_1, E_2, E_3) est une base orthogonale de $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathbb{R}_2[X]^\perp = \text{Vect}(E_3)$. Quelle que soit la méthode, les polynômes A tels que f_A est une projection orthogonale sont les polynômes non nuls proportionnels au polynôme $E_3 = X^3 - \frac{3X}{5}$.

22.15 Comme S est symétrique réelle, il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in O(n)$ telle que $S = PDP^T$. Puisque S est définie positive, $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $Y^T S Y > 0$. Soit λ une valeur propre de S , alors $\lambda \in \mathbb{R}$ par le théorème spectral et il existe $Y \neq 0$ tel que $SY = \lambda Y$. Ainsi, $Y^T S Y = \lambda Y^T Y = \lambda \|Y\|^2$ donc $\lambda = \frac{Y^T S Y}{\|Y\|^2} > 0$. Classons les valeurs propres de S , notons-les $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_r$

(avec $r \leq n$). On sait d'après le théorème spectral que $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(S)$.

Pour tout vecteur $X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on le décompose $X = \sum_{i=1}^r X_i$ avec $(X_1, \dots, X_r) \in E_{\lambda_1}(S) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}(S)$.

Ainsi, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $S^k X = \sum_{i=1}^r S^k X_i$. Or $SX_i = \lambda_i X_i$ par définition donc, par une récurrence simple,

on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $S^k X_i = \lambda_i^k X_i$. Par conséquent, $S^k X = \sum_{i=1}^r \lambda_i^k X_i$.

Soit $j = \text{Max}(\{i \in \llbracket 1; r \rrbracket \mid X_i \neq 0\})$ le plus grand entier tel que X_i est non nul, j existe bien car, comme $X \neq 0$, il existe forcément un indice $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$ tel que $X_i \neq 0$. Par définition de j , $S^k X = \sum_{i=1}^j \lambda_i^k X_i \neq 0$

pour $k \in \mathbb{N}$. Par PYTHAGORE, comme $(X_1, \dots, X_j)$ est orthogonale, on a $\|S^k X\|^2 = \sum_{i=1}^j \lambda_i^{2k} \|X_i\|^2$ donc

$\|S^k X\|^2 \underset{+\infty}{\sim} \lambda_j^{2k} \|X_j\|^2$ et $\|S^k X\| \underset{+\infty}{\sim} \lambda_j^k \|X_j\|$ (tout est positif). Comme $\forall i \in \llbracket 1; j-1 \rrbracket$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_i^k}{\|S^k X\|} = 0$ car

$\lambda_i < \lambda_j$ et que $Y_k = \frac{\lambda_j^k}{\|S^k X\|} X_j + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\lambda_i^k}{\|S^k X\|} X_i$, ce qui précède montre que $\lim_{k \rightarrow +\infty} Y_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_j^k}{\|S^k X\|} X_j = \frac{X_j}{\|X_j\|}$

(car $\|S^k X\| \underset{+\infty}{\sim} \lambda_j^k \|X_j\|$) qui est bien un vecteur propre (et même unitaire) de S associé à la valeur propre λ_j .