

TD 23 : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PSI 1 2025-2026

vendredi 20 mars 2026

23.1 a. Tout d'abord, $g = \Phi(f)$ est de classe C^∞ si $f \in E$. De plus, la linéarité de Φ est claire par linéarité de la dérivation. Ainsi, Φ est un endomorphisme de E dont on va étudier le spectre.

• Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, cherchons $f \in E$ tel que $\Phi(f) = \lambda f$, c'est-à-dire tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) + tf(t) = \lambda f(t)$. On sait par CAUCHY-LIPSCHITZ que les solutions de $y' + ty = \lambda y \iff y' = (\lambda - t)y$ forment une droite de solutions sur $\mathbb{R}$ engendrée par la fonction $y_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t - \frac{t^2}{2}} = e^{\lambda t} e^{-\frac{t^2}{2}}$ car $t \mapsto \lambda t - \frac{t^2}{2}$ est une primitive de $t \mapsto \lambda - t$. Ainsi, il existe des fonctions non nulles vérifiant $\Phi(y) = \lambda y$ pour tout complexe λ ce qui prouve que tout $\lambda \in \mathbb{C}$ est dans le spectre de Φ . Ainsi $\text{Sp}(\Phi) = \mathbb{C}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $E_\lambda(\Phi) = \text{Vect}(y_\lambda)$.

b. • Pour le spectre de Φ^2 , on peut calculer, pour $f \in E$, $\Phi^2(f) = (f' + tf)' + t(f' + tf) = f'' + 2tf' + (1 + t^2)f$. Encore une fois, si $\lambda \in \mathbb{C}$, d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, on sait que l'ensemble $E_\lambda(\Phi^2)$ des fonctions de E qui vérifie $\Phi^2(y) = \lambda y$ est un plan donc λ est une valeur propre de Φ^2 . On a donc $\text{Sp}(\Phi^2) = \mathbb{C}$.

• Toujours pour le spectre de Φ^2 , soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et μ une racine de λ (il en existe dans $\mathbb{C}$), alors il existe d'après ce qui précède $y \neq 0$ telle que $\Phi(y) = \mu y$ ce qui donne $\Phi^2(y) = \Phi(\Phi(y)) = \Phi(\mu y) = \mu \Phi(y) = \mu^2 y = \lambda y$ et λ est bien une valeur propre de Φ^2 car $y \neq 0$. À nouveau et indépendamment, on en déduit que $\text{Sp}(\Phi^2) = \mathbb{C}$.

• Soit $\lambda = 0$, alors $y \in \text{Ker}(\Phi^2) \iff \Phi(y) \in \text{Ker}(\Phi) \iff \left(\exists \alpha \in \mathbb{C}, y' + ty = \alpha e^{-\frac{t^2}{2}} \right)$ d'après a.. Les solutions de l'équation homogène $y' + ty = 0$ sont les fonctions $y : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$. On fait varier la constante en écrivant $y = \lambda e^{-\frac{t^2}{2}}$ avec λ dérivable et, en remplaçant dans $y' + ty = \alpha e^{-\frac{t^2}{2}}$, on obtient $\lambda' = \alpha$ donc $\lambda = \alpha t + \beta$ avec $\beta \in \mathbb{C}$. Par conséquent, $y \in \text{Ker}(\Phi^2) \iff \left(\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, y = (\alpha t + \beta) e^{-\frac{t^2}{2}} \right)$. Alors le plan vectoriel $\text{Ker}(\Phi^2)$ peut s'écrire $\text{Ker}(\Phi^2) = E_0(\Phi^2) = \text{Vect}(t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}, t \mapsto t e^{-\frac{t^2}{2}})$.

• Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, il possède deux racines carrées complexes μ et $-\mu$. Mais si $y \in E_\mu(\Phi)$, alors $\Phi(y) = \mu y$ donc $\Phi^2(y) = \mu^2 y = \lambda y$. Ainsi $E_\mu(\Phi) \subset E_\lambda(\Phi^2)$. De même, $E_{-\mu}(\Phi) \subset E_\lambda(\Phi^2)$. Comme ces deux sous-espaces propres sont en somme directe car $\mu \neq -\mu$, le plan $E_\mu(\Phi) + E_{-\mu}(\Phi)$ est inclus dans le plan $E_\lambda(\Phi^2)$. On en déduit par inclusion et égalité des dimensions que $E_\mu(\Phi) \oplus E_{-\mu}(\Phi) = E_\lambda(\Phi^2)$. Par conséquent, les solutions de $y'' + 2ty' + (1 + t^2)y = \lambda y$ sont les $y : t \mapsto (\alpha e^{\mu t} + \beta e^{-\mu t}) e^{-\frac{t^2}{2}}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. Alors le plan vectoriel $\text{Ker}(\Phi^2 - \lambda \text{id}_E)$ peut s'écrire $\text{Ker}(\Phi^2 - \lambda \text{id}_E) = E_\lambda(\Phi^2) = \text{Vect}(t \mapsto e^{\frac{\mu t - t^2}{2}}, t \mapsto e^{\frac{-\mu t - t^2}{2}})$.

• $y'' + 2xy' + (x^2 - 1)y = 0 \iff y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = 2y \iff y \in E_2(\Phi^2) = E_{\sqrt{2}}(\Phi) \oplus E_{-\sqrt{2}}(\Phi)$ donc les solutions de cette équation (E) sont les $y : t \mapsto (\alpha e^{\sqrt{2}t} + \beta e^{-\sqrt{2}t}) e^{-\frac{t^2}{2}}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

23.2 a. Comme (E) est une équation différentielle linéaire sans second membre, l'ensemble S des solutions contient la fonction nulle et, par linéarité de la dérivation, est stable par combinaison linéaire. De plus, si y est solution de (E), y est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, comme $y'' = -qy$ et que q est continue sur $\mathbb{R}$, y'' est continue donc y est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Ainsi, S est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$: c'est donc lui-même un espace vectoriel. En considérant par exemple le problème de

CAUCHY en $t = 0$, si $(y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^2$ est fixé, il existe une unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie de plus $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y'_0$. Ainsi, l'application $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(y) = (y(0), y'(0))$ est linéaire (clair) et bijective, c'est donc un isomorphisme. Par conséquent, $\dim(S) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

b. D'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie cette condition de CAUCHY $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. En fait, $f = \varphi^{-1}(1, 0)$ (voir **a.**).

Supposons que f s'annule en $x_0 \in \mathbb{R}$. Si on avait $f'(x_0) = 0$, alors la fonction f vérifierait $f'' + qf = 0$ avec $f(x_0) = f'(x_0) = 0$. Or la fonction nulle est aussi solution de (E) et elle vérifie aussi la condition de CAUCHY $0(x_0) = 0'(x_0) = 0$. Par l'unicité au problème de CAUCHY, on aurait donc $f = 0$ qui est contredit par le fait que $f(0) = 1 \neq 0$. Par l'absurde, on a donc établi que $f'(x_0) \neq 0$.

• Prenons par exemple $f'(x_0) > 0$, comme f est C^1 sur $\mathbb{R}$, f' est continue en x_0 donc, si $\varepsilon = \frac{f'(x_0)}{2} > 0$, $\exists \beta > 0, \forall x \in]x_0 - \beta; x_0 + \beta[, |f'(x) - f'(x_0)| \leq \frac{f'(x_0)}{2} \iff 0 < \frac{f'(x_0)}{2} \leq f'(x) \leq \frac{3f'(x_0)}{2}$ si $\varepsilon = \frac{f'(x_0)}{2} > 0$. La fonction f est alors strictement croissante sur l'intervalle $]x_0 - \beta; x_0 + \beta[$, elle y est donc injective, et elle ne s'annule donc qu'en x_0 sur cet intervalle, ce qui est la définition d'un zéro dit isolé.

c. Puisque f est de classe C^2 en tant que solution de (E), on sait que f^2 est convexe si et seulement si $(f^2)'' \geq 0$. Or $(f^2)'' = (2ff')' = 2f'^2 + 2ff'' = 2f'^2 - 2qf^2$ car $f'' = -qf$. Or q est négative, ainsi $(f^2)'' \geq 0$. On a bien montré que f^2 est convexe sur $\mathbb{R}$.

Posons $g = f^2$, alors $g'' \geq 0$ d'après la question précédente. Ainsi, la fonction g' est croissante, or $g'(0) = 0$ donc g' est négative sur $\mathbb{R}_-$ et g' est positive sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, g est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$ ce qui montre, comme $g(0) = 1$, que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f^2(x) \geq 1 = g(0)$. Comme f ne s'annule pas car $f^2 \geq 1$, f garde un signe constant par le théorème des valeurs intermédiaires, or $f(0) = 1$ donc f est positive sur $\mathbb{R}$. On en déduit bien que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{f^2(x)} \geq 1$.

23.3 On résout cette équation sur les trois intervalles $I_1 =]-\infty; -1[$, $I_2 =]-1; 0[$ et $I_3 =]0; +\infty[= \mathbb{R}_+^*$. Les solutions de $(E_0) : 2t(1+t)y' + (1+t)y = 0 \iff y' + \frac{1}{2t}y = 0$ sur chacun de ces intervalles sont, puisqu'une primitive de $t \mapsto \frac{1}{2t}$ est $t \mapsto \frac{\ln(|t|)}{2}$, les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{\frac{-\ln(|t|)}{2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{|t|}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Méthode 1 pour trouver une solution particulière :

Sur I_3 , par variation de la constante, on obtient $2t(1+t)\frac{\lambda'}{\sqrt{t}} = 1 \iff \lambda' = \frac{1}{2\sqrt{t}(1+t)}$. On peut prendre

$\lambda = \text{Arctan}(\sqrt{t})$. Les solutions de (E) sur I_3 sont donc les $y : t \mapsto \frac{\text{Arctan}(\sqrt{t}) + \lambda}{\sqrt{t}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sur I_1, I_2 , avec la même méthode, $2t(1+t)\frac{\lambda'}{\sqrt{-t}} = 1$ donc $\lambda' = -\frac{1}{2\sqrt{-t}(1+t)} = -\frac{1}{2\sqrt{-t}(1-(\sqrt{-t})^2)}$ et

on peut prendre par $\lambda = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}} \right|$ (il vaut mieux connaître la fonction Argth). Ainsi, les

solutions de (E) sur I_1 ou I_2 sont les fonctions $y : t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{-t}} \left(\ln \left| \frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}} \right| + \lambda \right)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Méthode 2 : on pouvait aussi chercher une solution particulière y sur $\mathbb{R}$ qui soit développable en série entière, c'est-à-dire $\forall t \in]-r; r[, y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ avec $r \leq 1$ (car -1 est exclu de I_1, I_2, I_3). On dérive terme à terme et

on remplace dans (E), ce qui donne $2t \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + 2t^2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n + t \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} t^{n-1} = 1$ ou encore, en mettant tout en t^n : $\sum_{n=0}^{+\infty} 2n a_n t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 2(n-1) a_{n-1} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} t^n = 1$ puis, en regroupant les termes : $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (2n a_n + 2(n-1) a_{n-1} + a_n + a_{n-1}) t^n = 1$. Ainsi, puisque $r > 0$ par hypothèse, on identifie et on a $a_0 = 1$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(2n+1)a_n + (2n-1)a_{n-1} = 0$. On montre par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ donc $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{2n+1}$. Puisque le rayon de cette série entière vaut clairement 1 (par D'ALEMBERT par exemple), les calculs précédents se remontent et prouvent que y est bien solution de (E) sur $] -1; 1[$. Comme $y(0) = 1$, il reste à exprimer y avec les fonctions usuelles pour $t \in] -1; 1[\setminus \{0\}$ et on distingue deux cas selon que $t < 0$ ou $t > 0$:

$$\text{si } t \in]0; 1[, \quad y(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{t})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\text{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}.$$

$$\text{si } t \in I_2, \quad y(t) = \frac{1}{\sqrt{-t}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{-t})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{-t}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{-t})^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{-t})^n}{n} \right) = \frac{\ln \left(\frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}} \right)}{2\sqrt{-t}}.$$

Méthode 3 : on pouvait enfin, sur I_3 par exemple, associer à $y : I_3 \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, la fonction $z : I_3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(u) = uy(u^2)$ ou $\frac{z(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = y(t)$. z est aussi dérivable sur I_3 et $\forall t > 0$, $y'(t) = \frac{z'(\sqrt{t})}{2t} - \frac{z(\sqrt{t})}{2t\sqrt{t}}$. Ainsi, y solution de (E) sur I_3 équivaut à $\forall t > 0$, $t(1+t) \left(\frac{z'(\sqrt{t})}{t} - \frac{z(\sqrt{t})}{t\sqrt{t}} \right) + (1+t) \frac{z(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = 1$ c'est-à-dire à $z'(\sqrt{t}) = \frac{1}{1+t}$ ou $\forall u \in I_3$, $z'(u) = \frac{1}{1+u^2} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u > 0$, $z(u) = \text{Arctan}(u) + \lambda$. On conclut en remplaçant que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $y(t) = \frac{z(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} = \frac{\text{Arctan}(\sqrt{t}) + \lambda}{\sqrt{t}}$.

Raccords : on va traiter les raccords en 0 et en -1 .

En 0 : soit $y :] -1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ solution de (E), alors $y(0) = 1$ en prenant $t = 0$ dans (E) et il existe d'après ce qui précède des constantes λ et μ réelles telles que $\forall t > 0$, $y(t) = \frac{\text{Arctan}(\sqrt{t}) + \lambda}{\sqrt{t}}$ et $\forall t \in] -1; 0[, y(t) = \frac{1}{2\sqrt{-t}} \left(\ln \left| \frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}} \right| + \mu \right)$. Comme y est continue en 0 et que si $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$ on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\mu}{\sqrt{t}} = \pm\infty$, on ne peut avoir que $\lambda = \mu = 0$. Ainsi, $y :] -1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $y(0) = 1$, $\forall t > 0$, $y(t) = \frac{\text{Arctan}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ et $\forall t \in] -1; 0[, y(t) = \frac{1}{2\sqrt{-t}} \left(\ln \left| \frac{1+\sqrt{-t}}{1-\sqrt{-t}} \right| \right)$. Réciproquement, cette fonction est solution de (E) sur $] -1; +\infty[$ et elle est développable en série entière sur $] -1; 1[$ donc elle y est de classe C^∞ . Comme elle est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations, elle est de classe C^∞ sur $] -1; +\infty[$ donc l'unique solution de (E) sur $] -1; +\infty[$.

En -1 : soit $y : \mathbb{R}_-^* \rightarrow \mathbb{R}$ solution de (E), alors en prenant $t = -1$ dans (E), on obtient $0 = 1$ qui est absurde. Ainsi, il n'y a aucune solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.

Il n'y a donc aucune solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

23.4 a. La fonction $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall u \in \mathbb{R}$, $z(u) = y(e^u)e^{-u/2}$ est bien définie car $\forall u \in \mathbb{R}$, $e^u \in \mathbb{R}_+^*$ et, en posant $u = \ln(t)$ si $t > 0$, on a $\forall t > 0$, $z(\ln(t)) = \frac{y(t)}{\sqrt{t}}$ de sorte que $y(t) = z(\ln(t))\sqrt{t}$.

b. On reporte dans (E) et, puisque $y'(t) = \frac{z(\ln(t))}{2\sqrt{t}} + \frac{z'(\ln(t))}{\sqrt{t}}$ et $y''(t) = -\frac{z(\ln(t))}{4t\sqrt{t}} + \frac{z''(\ln(t))}{t\sqrt{t}}$, on trouve

que $\forall t > 0, t^2 \left(-\frac{z(\ln(t))}{4t\sqrt{t}} + \frac{z''(\ln(t))}{t\sqrt{t}} \right) + z(\ln(t))\sqrt{t} = 0$ ce qui se simplifie en $\forall t > 0, z''(\ln(t)) + \frac{z(\ln(t))}{4} = 0$.

Mais comme $t \mapsto \ln(t)$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, on a donc (E') : $\forall u \in \mathbb{R}, z''(u) + \frac{z(u)}{4} = 0$.

c. Les solutions de (E') sont les $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $z(u) = A \cos\left(\frac{u}{2}\right) + B \sin\left(\frac{u}{2}\right)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Les solutions de (E) sont donc de la forme $y : t \mapsto \sqrt{t} \left(A \cos\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) + B \sin\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) \right)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Réciproquement, si y est l'une de ces fonctions, en remontant les calculs ou en dérivant deux fois et en remplaçant, on vérifie que y est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont toutes les fonctions de la forme $y : t \mapsto \sqrt{t} \left(A \cos\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) + B \sin\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) \right)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

23.5 a. Le domaine de définition de $f : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}$ est $\mathbb{R}_+^*$ et f est continue sur cet intervalle $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$f(t) \underset{0}{\sim} \sqrt{t}$ car $\ln(1+t) \underset{0}{\sim} t$ donc f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Ainsi, f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ donc, d'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$: c'est la primitive de f qui s'annule en 0. Alors, le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+$.

Comme $f(t) \underset{0}{\sim} \sqrt{t}$, on s'attend à avoir l'équivalent $F(x) \underset{0}{\sim} \int_0^x \sqrt{t} dt = \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^x = \frac{2}{3} x^{3/2}$, ce qui équivaut à

$F(x) - \frac{2}{3} x^{3/2} = o\left(x^{3/2}\right)$. Or, pour $x \geq 0, F(x) - \frac{2}{3} x^{3/2} = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} dt - \int_0^x \sqrt{t} dt = \int_0^x \left(\frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} - \sqrt{t} \right) dt$.

Ainsi, $F(x) - \frac{2}{3} x^{3/2} = \int_0^x \frac{\ln(1+t) - t}{\sqrt{t}} dt$. Définissons $g : t \mapsto \frac{\ln(1+t) - t}{\sqrt{t}} = f(t) - \sqrt{t}$ sur $[0; 1]$. Comme

$\ln(1+t) \underset{0}{=} t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, on a $g(t) \underset{0}{\sim} -\frac{t^{3/2}}{2}$ donc $h : t \mapsto \frac{g(t)}{t^{3/2}}$ est continue sur le segment $[0; 1]$ en

posant $h(0) = -\frac{1}{2}$ donc h est bornée sur le segment $[0; 1]$ par le théorème des bornes atteintes. Ainsi, on a

l'existence d'un réel $M \geq 0$ tel que $\forall x \in [0; 1], |h(t)| \leq M$. Par conséquent, pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a la majoration $\left| F(x) - \frac{2}{3} x^{3/2} \right| \leq \int_0^x |g(t)| dt = \int_0^x t^{3/2} |h(t)| dt \leq M \int_0^x t^{3/2} dt = \frac{2M}{5} x^{5/2}$. On en déduit donc

que $F(x) - \frac{2}{3} x^{3/2} = o\left(x^{3/2}\right)$ (car $5/2 > 3/2$) et on a bien $F(x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{3} x^{3/2}$.

b. L'équation homogène (E₀) associée à (E) est (E₀) : $2xy' + y = 0$ dont les solutions réelles sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ car une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{2x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto -\frac{\ln(x)}{2}$. On fait varier la

constante pour avoir une solution particulière ce qui amène l'équation $2\sqrt{x} \lambda' = \ln(1+x)$ et on peut prendre $\lambda = \frac{F}{2}$. Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $y_\lambda : x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{x}} + \frac{F(x)}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(2\lambda + \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} dt \right)$.

Si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$, elle l'est à fortiori sur $\mathbb{R}_+^*$ donc de la forme ci-dessus et il existe $a = 2\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0, y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(a + \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} dt \right)$. De plus, $0 \cdot y'(0) + y(0) = \ln(1+0) = 0$

donc $y(0) = 0$. D'après la question b., $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(2\lambda + \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} dt \right) = 0$ car $3/2 > 1/2$. De plus, si

$a \neq 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a}{2\sqrt{x}} = \pm\infty$. Ainsi, par continuité de y en 0, on a forcément $a = 0$ et $y : x \mapsto \frac{F(x)}{2\sqrt{x}}$. Comme

$F(x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{3} x^{3/2}$, on a $y(x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{3} x$ donc $y(x) \underset{0}{=} \frac{2}{3} x + o(x)$ ce qui garantit qu'on a $y'(0) = \frac{2}{3}$ une fois prolongée la

fonction par continuité en posant $y(0) = 0$. La fonction $y : x \mapsto \frac{F(x)}{2\sqrt{x}}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}_+$, elle est l'unique solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+$.

c. $\forall t \in]0; 1], f(t) = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{n-1/2}}{n}$ et cette relation est vraie aussi pour $t = 0$ car $f(0) = 0$.

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = \frac{(-1)^{n+1} t^{n-\frac{1}{2}}}{n}$. Soit $x \in]0; 1]$ fixé.

(H₁) $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement vers f sur $[0; x]$ (on en vient).

(H₂) Les fonctions f_n sont continues sur $[0; x]$ donc y sont intégrables.

(H₃) f est continue sur $[0; x]$ (déjà vu).

(H₄) Pour $n \geq 1$, $\int_0^x |f_n(t)| dt = \int_0^x \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{n} dt = \frac{2x^{n-\frac{1}{2}}}{n(2n+1)}$ et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{2x^{n-\frac{1}{2}}}{n(2n+1)}$ converge par comparaison aux séries de RIEMANN car $\frac{2x^{n-\frac{1}{2}}}{n(2n+1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Par le théorème d'intégration terme à terme, $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x^{n-\frac{1}{2}}}{n(2n+1)}$. Alors, la fonction y de la question précédente vérifie $\forall x \in [0; 1]$, $y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x^{n-\frac{1}{2}}}{n(2n+1)}$ qui s'écrit aussi $y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n(2n+1)}$ et y est bien développable en série entière sur $[0; 1]$.

23.6 a. (E) : $y'' = ay' + by$ est sous forme normalisée, d'ordre 2 avec $a : x \mapsto \frac{x}{2}$ et $b : x \mapsto \frac{1}{2}$ continues sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et on impose les valeurs de $y(0)$ et de $y'(0)$. D'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, il y a existence et unicité d'une fonction y vérifiant $-2y'' + xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$.

b. Analyse : supposons que cette unique $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est développable en série entière sur $] -r; r[$ avec $r > 0$, alors $\forall x \in] -r; r[$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On peut dériver terme à terme dans l'intervalle ouvert de convergence et $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ donc $xy'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$ et $y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$. En reportant dans (E), on a $\forall x \in] -r; r[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-2(n+2)(n+1) a_{n+2} + n a_n + a_n) x^n = 0$ donc, par unicité, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-2(n+2)(n+1) a_{n+2} + n a_n + a_n = 0$ d'où $a_{n+2} = \frac{1}{2(n+2)} a_n$. Comme on impose $a_0 = y(0) = \sqrt{\pi}$ et $a_1 = y'(0) = 0$, la relation précédente montre, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = \frac{1}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}$.

On a donc $y(x) = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2/4)^n}{n!} = \sqrt{\pi} e^{\frac{x^2}{4}}$.

Synthèse : $y : x \mapsto \sqrt{\pi} e^{\frac{x^2}{4}}$ est bien C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $y'(x) = \frac{\sqrt{\pi} x}{2} e^{\frac{x^2}{4}}$ et $y''(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{x^2}{4}} + \frac{\sqrt{\pi} x^2}{4} e^{\frac{x^2}{4}}$ donc $-2y''(x) + xy'(x) + y(x) = e^{\frac{x^2}{4}} \left(-\sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{\pi} x^2}{2} + \frac{\sqrt{\pi} x^2}{2} + \sqrt{\pi} \right) = 0$ avec $y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$.

Ainsi, l'unique solution du problème de CAUCHY de la question **a.** est la fonction $y : x \mapsto \sqrt{\pi} e^{\frac{x^2}{4}}$.

c. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = e^{tx-t^2}$ de sorte que $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, t) dt$.

(H₁) Pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

(H₂) Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $e^{tx-t^2} = o(e^{-t^2/2}) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées. La fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = t e^{tx-t^2}$ est aussi continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ car on a encore $t e^{tx-t^2} = o(e^{-t^2/2}) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Enfin, $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) = t^2 e^{tx-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(H₃) Pour $a > 0$, $x \in [-a; a]$ et $t \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq t^2 e^{a|t|-t^2} = \varphi_a(t)$ avec φ_a qui est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ par croissances comparées comme avant.

Par théorème de dérivation sous le signe somme, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{tx-t^2} dt$ et $f''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{tx-t^2} dt$. On a bien $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ (intégrale de GAUSS classique) et aussi $f'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt = 0$ par imparité ou car $f'(0) = \left[-\frac{e^{-t^2}}{2} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$. De plus, par croissances comparées, $-2f''(x) + xf'(x) + f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2t^2 e^{tx-t^2} + xte^{tx-t^2} + e^{tx-t^2}) dt = [te^{tx-t^2}]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ donc f vérifie (E). D'après les questions précédentes, on peut conclure que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\pi} e^{\frac{x^2}{4}}$.

Une dernière méthode consistait à écrire $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n t^n e^{-t^2}}{n!} \right) dt$ et à intervertir terme à terme en calculant par récurrence, grâce à une intégration par parties, les intégrales $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

Ce n'est pas demandé mais on pouvait trouver toutes les solutions de (E) par la méthode de LAGRANGE en posant, pour une fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, la fonction $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(x) = y(x)e^{\frac{-x^2}{4}}$. La fonction z est aussi de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $y(x) = z(x)e^{\frac{x^2}{4}}$ donc, en calculant $y'(x) = \left(\frac{xz(x)}{2} + z'(x) \right) e^{\frac{x^2}{4}}$ et $y''(x) = \left(\frac{z(x)}{2} + xz'(x) + z''(x) + \frac{x^2 z(x)}{4} \right) e^{\frac{x^2}{4}}$ et en reportant dans (E), on a l'équivalence (les $z(x)$ s'éliminent) : $(y \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R}) \iff (\forall x \in \mathbb{R}, -2\left(\frac{z(x)}{2} + xz'(x) + z''(x) + \frac{x^2 z(x)}{4}\right) + \frac{x^2 z(x)}{2} + xz'(x) + z(x) = 0)$. Ainsi, $(y \text{ solution de (E) sur } \mathbb{R}) \iff (z \text{ est solution de (F) sur } \mathbb{R})$ où (F) : $2z'' + xz' = 0$. On résout facilement (F), et $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, z(x) = \lambda + \mu \int_0^x e^{\frac{-t^2}{4}} dt$.

Par conséquent, les solutions de (E) sont de la forme $y : x \mapsto \lambda e^{\frac{x^2}{4}} + \mu e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{4}} dt$, elles forment un plan (on le savait) engendré par les deux fonctions développables en séries entières sur $\mathbb{R}$ (ce qui fait que toutes les solutions de (E) le sont) $y_1 : x \mapsto e^{\frac{x^2}{4}}$ (paire) et $y_2 : x \mapsto e^{\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{4}} dt$ (impaire).

23.7 a. Analyse : soit $r > 0$ et une fonction $f :]-r; r[\rightarrow \mathbb{R}$ solution de (E) telle que $\forall x \in]-r; r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Ainsi, il vient $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$ et $xf'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n$ alors que l'on a $x^2 f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n$ et $xf''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)na_{n+1}x^n$ donc, en remplaçant dans (E) : $x^2 f''(x) - xf''(x) + 4f'(x) + xf'(x) - f(x) = 0$, on obtient $\forall x \in]-r; r[, \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1)a_n - (n+1)na_{n+1} + 4(n+1)a_{n+1} + na_n - a_n)x^n = 0$. Par unicité du développement en série entière, $\forall n \in \mathbb{N}, n(n-1)a_n - (n+1)na_{n+1} + 4(n+1)a_{n+1} + na_n - a_n = 0$ donc, en simplifiant, $(n+1)((n-4)a_{n+1} - (n-1)a_n) = 0$. Pour $n = 0$, on a $a_0 = 4a_1$. Pour $n = 1$, il vient $3a_2 = 0$. Pour $n = 2$, $2a_3 + a_2 = 0$ donc $a_3 = 0$. Pour $n = 3$, $a_4 + 2a_3 = 0$ donc $a_4 = 0$. Ainsi, $a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Comme $n+1 \neq 0$, il vient $\forall n \geq 5, (n-4)a_{n+1} = (n-1)a_n$ donc $(n-2)(n-3)(n-4)a_{n+1} = (n-1)(n-2)(n-3)a_n$ ce qui montre que la suite $\left(\frac{a_n}{(n-2)(n-3)(n-4)} \right)_{n \geq 5}$ est constante. On en déduit donc, pour tout entier $n \geq 5$, on a $a_n = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6} a_5 = \binom{n-2}{3} a_5$. Comme a_n est polynomiale en n , le rayon de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ vaut $R = +\infty$ si $a_5 = 0$ (c'est même un polynôme) et $R = 1$ si $a_5 \neq 0$. Par conséquent, $\forall x \in]-1; 1[$ (au moins), on a $f(x) = a_1(x+4) + a_5 \sum_{n=5}^{+\infty} \binom{n-2}{3} x^n = a_1(x+4) + a_5 x^5 \sum_{n=5}^{+\infty} \binom{n-2}{3} x^{n-5}$. Or

pour $x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=5}^{+\infty} \binom{n-2}{3} x^{n-5} = \frac{1}{6} \sum_{p=3}^{+\infty} p(p-1)(p-2)x^{p-3}$ en posant $p = n-2$. On reconnaît la dérivée troisième $\left(\frac{1}{1-x}\right)''' = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} x^p\right)''' = \sum_{p=3}^{+\infty} p(p-1)(p-2)x^{p-3} = \frac{6}{(1-x)^4}$ donc $f(x) = a_1(x+4) + a_5 \frac{x^5}{(1-x)^4}$.

Synthèse : réciproquement, si f est définie sur $] -1; 1[$ par $f(x) = a_1(x+4) + a_5 \frac{x^5}{(1-x)^4}$, alors f est développable en série entière sur $] -1; 1[$ et, en remontant les calculs, f est solution de (E).

Ainsi, les solutions de (E) développables en série entière sur $] -1; 1[$ forment le plan $\text{Vect}(f_1, f_2)$ avec les fonctions f_1 et f_2 définies sur $] -1; 1[$ par $f_1(x) = x+4$ et $f_2(x) = \frac{x^5}{(1-x)^4}$.

• Ces fonctions f_1 et f_2 respectivement polynomiale et rationnelle sont de classe C^∞ sur tout intervalle I qui ne contient pas 1. La fonction f_1 est clairement solution de (E) sur $\mathbb{R}$ car $f_1'' = 0$ et elle vérifie donc l'équation $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^2 - x)f_1''(x) + (x+4)f_1'(x) - f_1(x) = x+4 - (x+4) = 0$. Si I ne contient pas 1, on a $f_2'(x) = \frac{(5-x)x^4}{(1-x)^5}$ et $f_2''(x) = \frac{20x^3}{(1-x)^6}$ donc f_2 est solution de (E) car elle vérifie l'équation $\forall x \in I$, $(x^2 - x)f_2''(x) + (x+4)f_2'(x) - f_2(x) = \frac{-20x^4 + (x+4)(5-x)x^4 - x^5(1-x)}{(1-x)^5} = 0$.

Ainsi, si $I_1 =]-\infty; 0[$, $I_2 =]0; 1[$ et $I_3 =]1; +\infty[$, d'après le cours, comme (E) est normalisée sur I_k ($k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$), l'ensemble des solutions de (E) sur I_k est un plan engendré par les fonctions f_1 et f_2 (restreintes à I_k).

b. Pour répondre à cette question, cherchons à raccorder les solutions en 0.

Analyse : soit $y :]-\infty; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E). D'après ce qui précède, il existe quatre constantes réelles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ telles que $\forall x \in]-\infty; 0[$, $y(x) = \lambda_1(x+4) + \lambda_2 \frac{x^5}{(1-x)^4}$ et $\forall x \in]0; 1[$, $y(x) = \lambda_3(x+4) + \lambda_4 \frac{x^5}{(1-x)^4}$. Par continuité de y en 0, on a forcément $4\lambda_1 = y(0) = 4\lambda_3$ donc $\lambda_1 = \lambda_3$. Grâce au x^5 en facteur, aucune condition n'est imposée à λ_1, λ_3 et λ_4 en ce qui concerne l'aspect dérivable et deux fois dérivable de y en 0.

Synthèse : réciproquement, soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et la fonction $y_{a,b,c} :]-\infty; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par la relation $y(x) = a(x+4) + b \frac{x^5}{(1-x)^4}$ pour $x \in]-\infty; 0[$, $y(x) = a(x+4) + c \frac{x^5}{(1-x)^4}$ pour $x \in]0; 1[$ et $y(0) = 4a$. Alors, y est C^∞ sur $] -\infty; 0[$ et $]0; 1[$ par opérations et, comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x) = a$ (calcul), on en déduit que y est de classe C^1 sur $] -\infty; 1[$ avec $y'(0) = a$ par le théorème de prolongement C^1 . De même, $\lim_{x \rightarrow 0^-} y''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y''(x) = 0$ donc y est de classe C^2 sur $] -\infty; 1[$ avec $y''(0) = 0$.

Par conséquent, les fonctions y solutions de (E) sur $] -\infty; 1[$ forment l'espace vectoriel $\text{Vect}(g_1, g_2, g_3)$ avec $g_1(x) = x+4$, $g_2(x) = \frac{x^5}{(1-x)^4}$ si $x \in]-\infty; 0[$ et $g_2(x) = 0$ si $x \in]0; 1[$ et $g_3(x) = 0$ si $x \in]-\infty; 0[$ et $g_3(x) = \frac{x^5}{(1-x)^4}$ si $x \in]0; 1[$ (car la fonction y ci-dessus s'écrit $y = ag_1 + bg_2 + cg_3$).

Pour répondre à la question posée, il existe des solutions de (E) non développables en série entière sur $] -1; 1[$, ce sont les fonctions $y = ag_1 + bg_2 + cg_3$ avec $b \neq c$ car les ba_n diffèrent des ca_n dès que $n \geq 5$ dans ce cas (y est alors développable en série entière sur $] -1; 0[$ et sur $]0; 1[$ mais avec des coefficients différentes de part et d'autre de 0).

Pour être complet, l'espace vectoriel des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$ est la droite engendré par la fonction g_1 car aucune fonction avec du $\frac{x^5}{(1-x)^4}$ ne peut "passer" 1.

23.8 a. Comme $f(a) = 0$, si on avait aussi $f'(a) = 0$, la fonction f et la fonction nulle seraient toutes les deux

solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ avec les mêmes conditions de CAUCHY en a : c'est absurde d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ qui s'applique ici puisque les fonctions p et q sont continues sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f'(a) \neq 0$. Puisque f' est continue car f est au moins deux fois dérivable donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que solution de (E), il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [a - \eta; a + \eta]$, $f'(x) \neq 0$. Soit $x \in [a - \eta; a + \eta] \setminus \{a\}$, par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a; x[\subset [a - \eta; a + \eta]$ tel que $f(x) - f(a) = (x - a)f'(c) = (x - a)f(c) \neq 0$ d'après ce qui précède. On a bien établi que $\forall x \in [a - \eta; a + \eta] \setminus \{a\}$, $f(x) \neq 0$.

b. Comme f et g sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, par opérations, W est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour $t \in \mathbb{R}$, $W'(t) = f'(t)g'(t) + f(t)g''(t) - f'(t)g'(t) - f''(t)g(t) = f(t)(-p(t)g'(t) - q(t)g(t)) - (-p(t)f'(t) - q'(t)f(t))g(t)$ donc $W'(t) = -p(t)(f(t)g'(t) - f'(t)g(t)) = -p(t)W(t)$. Ainsi, W est solution sur $\mathbb{R}$ de (F) : $y' + py = 0$. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, notons $P : t \mapsto \int_{t_0}^t p(u)du$ la primitive de p qui s'annule en t_0 , on sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de (F) sont les fonctions $y : t \mapsto \lambda e^{-P(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. En évaluant en t_0 , on a bien sûr $\lambda = W(t_0)$ car $P(t_0) = 0$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $W(t) = W(t_0)e^{-P(t)}$.

c. Supposons qu'il existe un réel t_1 tel que $W(t_1) = \begin{vmatrix} f(t_1) & g(t_1) \\ f'(t_1) & g'(t_1) \end{vmatrix} = 0$. Alors les colonnes de cette matrice sont liées ce qui montre l'existence de $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tel que $\lambda \begin{pmatrix} f(t_1) \\ f'(t_1) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} g(t_1) \\ g'(t_1) \end{pmatrix} = 0$. Posons $h = \lambda f + \mu g$, comme l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel puisque (E) est linéaire et homogène, la fonction h est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. De plus, $h(t_1) = h'(t_1) = 0$. L'unicité de la solution à un problème de CAUCHY montre que $h = 0$. Ainsi, comme $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ et $\lambda f + \mu g = 0$, la famille (f, g) est liée contrairement à l'hypothèse de l'énoncé. Par l'absurde, on en déduit que W ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

d. Comme f est continue sur $]a; b[$ et qu'elle ne s'y annule pas, elle y garde un signe constant, supposons par exemple que f est strictement positive sur $]a; b[$. Ainsi, $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$ car $f(x) - f(a) = f(x) > 0$ et $x - a > 0$ si $x \in]a; b[$. De même, $f'(b) \leq 0$. Si on avait $f'(a) = 0$, comme en **a.**, f serait la fonction nulle ce qui n'est pas le cas. Plus précisément, on a donc $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.

Comme W ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, par continuité, W garde aussi un signe constant. Ainsi, $W(a) = -f'(a)g(a)$ et $W(b) = -f'(b)g(b)$ sont de même signe, ce qui impose à $g(a)$ et $g(b)$ d'être de signes différents. Par le théorème des valeurs intermédiaires, puisque g est continue, il existe $c \in]a; b[$ tel que $g(c) = 0$.

Supposons que g s'annule au moins deux fois sur $]a; b[$, en c et en e et supposons par exemple que $e > c$. Posons $d = \inf(A)$ avec $A = \{x \in]c; e] \mid g(x) = 0\}$; d existe car A est non vide puisque $e \in A$ et A est minorée par c . Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = d$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(a_n) = 0$, par continuité de g , on a donc $g(d) = 0$ par passage à la limite et caractérisation séquentielle de la continuité. Ainsi, $d = \inf(A) = \min(A)$. D'après la question **a.** appliquée à g , il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [c - \eta; c + \eta] \setminus \{c\}$, $g(x) \neq 0$ donc $A \subset [c + \eta; e]$ ce qui prouve que $d \geq c + \eta > c$. Par construction, $g(c) = g(d) = 0$ et g ne peut pas s'annuler sur $]c; d[$. Par symétrie des rôles joués par f et g , on a prouvé précédemment que f s'annulait alors sur $]c; d[\subset]a; b[$, ce qui contredit l'hypothèse faite initialement sur f .

Par l'absurde, on a donc montré que g s'annulait une fois et une seule sur $]a; b[$.

23.9 a. Pour $f \in E$, par CHASLES, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = e^x \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt - e^x \int_0^x e^{-t} f(t) dt$. Comme $g : t \mapsto e^{-t} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'intégration, la fonction $G : x \mapsto \int_0^x e^{-t} f(t) dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive de g qui s'annule en 0. En notant $I = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$, on a $F(x) = I e^x - e^x G(x)$ donc F est de classe C^1 par opérations.

De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) = I e^x - e^x G'(x) = F(x) - e^x g(x) = F(x) - e^x e^{-x} f(x) = F(x) - f(x)$ et on a bien la relation $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = F'(x) + f(x)$.

b. Soit par exemple $f : t \mapsto |t|$, alors $f \in E$ car $g : t \mapsto |t| e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $g(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc g est intégrable sur tout intervalle $[x; +\infty[$. D'après la question **a.**, on ne peut pas avoir $f = \varphi(h)$ pour $h \in E$ car f n'est pas de classe C^1 et $\varphi(h)$ l'est. Par conséquent, φ n'est pas surjective car $\text{Im}(\varphi) \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Analyse : soit $f \in E$ un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $\lambda = 0$, on a $\varphi(f) = 0 \cdot f = 0$ donc, avec la question **a.**, $f = F' - F = 0$ ce qui est impossible pour un vecteur propre. Ainsi, 0 n'est pas valeur propre de φ ce qui montre que φ est injective.
- Si $\lambda \neq 0$, alors $\varphi(f) = \lambda f$ donc, avec la question **a.**, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda f(x) = \lambda f'(x) + f(x)$ donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $E_\lambda : y' = \frac{\lambda-1}{\lambda} y$ donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha e^{\frac{(\lambda-1)x}{\lambda}}$ (car $f \neq 0$).

Mais comme $f \in E$, $\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ converge pour tout x , or $e^{-t} f(t) = \alpha e^{\frac{(\lambda-1)t}{\lambda} - t}$ ce qui impose $\lambda > 0$.

Synthèse : soit $\lambda > 0$, la fonction $f : x \mapsto e^{\frac{(\lambda-1)x}{\lambda}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $e^{-t} f(t) = e^{\frac{-t}{\lambda}}$ donc $t \mapsto e^{-t} f(t)$ est intégrable sur $[x; +\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $\lambda > 0$ donc $\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ converge. Ainsi, $f \in E \setminus \{0\}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi(f)(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{\frac{-t}{\lambda}} dt = e^x \left[-\lambda e^{\frac{-t}{\lambda}} \right]_x^{+\infty} = e^x \lambda e^{\frac{-x}{\lambda}} = \lambda f(x)$ donc f est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ .

Ainsi, $\text{Sp}(\varphi) = \mathbb{R}_+^*$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $E_\lambda(\varphi) = \text{Vect}(f_\lambda)$ avec $f_\lambda : t \mapsto e^{\frac{(\lambda-1)t}{\lambda}}$.

c. Pour $x \in \mathbb{R}$, la nature de $\int_x^{+\infty} e^{-t} f'(t) dt$ est la même que celle de $\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ par intégration par parties car les fonctions $u = f$ et $v : t \mapsto e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[x; +\infty[$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) = 0$ car f est bornée sur $\mathbb{R}$. Mais comme $f \in E$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ converge donc $\int_x^{+\infty} e^{-t} f'(t) dt$ converge aussi et, comme f' est continue, ceci assure que $f' \in E$. De plus, par l'intégration par parties précédente, en notant $F = \varphi(f)$ comme avant, $\varphi(f')(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f'(t) dt = e^x \left([e^{-t} f(t)]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} (-e^{-t}) f(t) dt \right)$ d'où $\varphi(f')(x) = -e^x e^{-x} f(x) + e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt = -f(x) + F(x) = F'(x)$ d'après **a.**. On a donc bien $(\varphi(f))' = \varphi(f')$.

d. Par intersection de sous-espaces vectoriels, F est un sous-espace vectoriel de E car l'ensemble des fonctions bornées en est un et celui des fonctions de classe C^1 aussi. Soit $f \in F$, on sait d'après la question **a.** que $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Comme $f \in F$, f est bornée sur $\mathbb{R}$ et on peut définir $\|f\|_{\infty, \mathbb{R}} \in \mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}$, par inégalité triangulaire sur les intégrales, $|\varphi(f)(x)| = |F(x)| \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt$ donc on a la majoration $|F(x)| \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} \|f\|_{\infty, \mathbb{R}} dt = \|f\|_{\infty, \mathbb{R}} e^x [-e^{-t}]_x^{+\infty} = \|f\|_{\infty, \mathbb{R}} e^x e^{-x} = \|f\|_{\infty, \mathbb{R}}$. Ainsi, $\varphi(f) \in F$ ce qui justifie que F est stable par φ . Comme les vecteurs propres de φ_F sont a fortiori des vecteurs propres de φ , et que la fonction f_λ n'est bornée sur $\mathbb{R}$ que si $\lambda = 1$ car f_1 est la fonction constante égale à 1, on en déduit que $\text{Sp}(\varphi_F) = \{1\}$. On peut dire aussi que φ_F est 1-lipschitzienne (pour $\|\cdot\|_{\infty, \mathbb{R}}$) donc

continue. Question de cours : si les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ sont respectivement de rayons R et R' , alors la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ est de rayon $R'' \geq \min(R, R')$ et on a la relation $\forall x \in]-\min(R, R'); \min(R, R')[, \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right).$

23.10 a. $\forall t \in I, w(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = \varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)$. Comme φ et ψ sont deux fois dérivables sur I par hypothèse, w est dérivable sur I et on a $\forall t \in I, w'(t) = \varphi'(t)\psi'(t) - \varphi''(t)\psi(t) + \varphi(t)\psi''(t) - \varphi'(t)\psi'(t)$ donc $w'(t) = -(\alpha(t)\varphi'(t) + \beta(t)\varphi(t))\psi(t) + \varphi(t)(\alpha(t)\psi'(t) + \beta(t)\psi(t)) = \alpha(t)w(t)$. Ainsi, la fonction w est solution sur I de l'équation (F) : $y' = \alpha y$.

b. Si φ ne s'annule pas sur I , la fonction $\frac{\psi}{\varphi}$ est bien définie et dérivable sur I et on a $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)' = \frac{\psi'\varphi - \psi\varphi'}{\varphi^2} = \frac{w}{\varphi^2}$.

c. Supposons qu'il existe une fonction y développable en série entière qui soit solution de l'équation (E), alors $\exists R > 0, \forall t \in]-R; R[, y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Alors, par théorème, $\forall t \in]-R; R[, y'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}t^n$ et $\forall t \in]-R; R[, y''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)na_{n+1}t^{n-1}$ donc $ty''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)na_{n+1}t^n$.

Ainsi, $\forall t \in]-R; R[, \sum_{n=0}^{+\infty} (2(n+1)na_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - a_n)t^n = 0$ et par unicité des coefficients (comme $R > 0$), on parvient à la relation $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)(2n+1)a_{n+1} = a_n$.

Réciproquement, si $a_0 \in \mathbb{R}^*$ et si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie cette propriété, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ est infini par D'ALEMBERT car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, et les calculs précédents montrent que $\forall t \in \mathbb{R}, 2ty''(t) + y'(t) - y(t) = 0$ donc y ainsi définie est bien solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

Pour $n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n-1)} = \frac{a_{n-1}}{n(2n-1)} \times \frac{a_{n-2}}{(n-1)(2n-3)} = \dots = \frac{a_0}{n(2n-1)(n-1)(2n-3) \dots 1.1}$. En rajoutant au dénominateur les termes pairs qui manquent $a_n = \frac{(2n)(2n-2) \dots 2.a_0}{n!(2n)!} = \frac{2^n}{(2n)!} a_0$.

Ainsi, les fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) et développables en série entière sont proportionnelles à la fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n t^n}{(2n)!}$. Il existe donc une unique fonction φ solution de (E), développable en série entière et vérifiant $\varphi(0) = 1$, il s'agit de $\varphi : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n t^n}{(2n)!}$.

On distingue selon le signe de t :

- si $t \geq 0$, on a $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n (\sqrt{t})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2t})^{2n}}{(2n)!} = \text{ch}(\sqrt{2t})$.
- si $t \leq 0$, on a $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n (\sqrt{-t})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{-2t})^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{-2t})$.

On vient de voir que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) et qui sont développables en série entière constitue la droite $\text{Vect}(\varphi)$.

d. Comme (E) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 sous forme normalisée sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, on sait que l'ensemble de ses solutions sur chacun de ces deux intervalles est un plan. On se sert du wronskien pour trouver une autre solution non proportionnelle à φ .

Sur $\mathbb{R}_+^*$: soit $\psi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$, comme φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, on sait d'après la question b. que $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)' = \frac{w}{\varphi^2}$. Ici, $w' = -\frac{w}{2t}$ donc $w : t \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{t}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)' = \frac{\lambda}{\sqrt{t}(\text{ch}(\sqrt{2t}))^2}$.

On reconnaît, comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, $\frac{\psi}{\varphi} = \sqrt{2}\lambda \operatorname{th}(\sqrt{2}t) + \mu$ avec $\mu \in \mathbb{R}$. Comme on veut ψ non proportionnelle à φ , on peut prendre $\mu = 0$ et $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour avoir $\psi(t) = \operatorname{th}(\sqrt{2}t)\varphi(t) = \operatorname{sh}(\sqrt{2}t)$. Par théorème de structure, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les $t \mapsto a \operatorname{ch}(\sqrt{2}t) + b \operatorname{sh}(\sqrt{2}t)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Pour $y : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, soit $z : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(u) = y\left(\frac{u^2}{2}\right)$ d'où $y(t) = z(\sqrt{2}t)$. Par composition, z est aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $z'(u) = uy'\left(\frac{u^2}{2}\right)$ et $z''(u) = y'\left(\frac{u^2}{2}\right) + u^2y''\left(\frac{u^2}{2}\right)$. Ainsi, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ équivaut à $\forall t > 0, 2ty''(t) + y'(t) - y(t) = 0$ ou, en changeant de variable, à $\forall u > 0, u^2y''\left(\frac{u^2}{2}\right) + y'\left(\frac{u^2}{2}\right) - y\left(\frac{u^2}{2}\right) = z''(u) - z(u) = 0$. Or $z'' = z$ si et seulement si z est combinaison linéaire de ch et sh et on retrouve bien les solutions ci-dessus.

Sur $\mathbb{R}_-^*$: $y : \mathbb{R}_-^* \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, soit $z : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(u) = y\left(-\frac{u^2}{2}\right)$ ce qui revient à $y(t) = z(\sqrt{-2}t)$. Par composition, z est aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $z'(u) = -uy'\left(-\frac{u^2}{2}\right)$ et $z''(u) = -y'\left(-\frac{u^2}{2}\right) + u^2y''\left(-\frac{u^2}{2}\right)$. Ainsi, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ équivaut à $\forall t < 0, 2ty''(t) + y'(t) - y(t) = 0$ ou, en changeant de variable, à $\forall u > 0, -u^2y''\left(-\frac{u^2}{2}\right) + y'\left(-\frac{u^2}{2}\right) - y\left(-\frac{u^2}{2}\right) = -z''(u) - z(u) = 0$. Or $z'' + z = 0$ si et seulement si z est combinaison linéaire de $\cos$ et $\sin$ et les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les $t \mapsto a \cos(\sqrt{-2}t) + b \sin(\sqrt{-2}t)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

e. Analyse : soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ solution de (E). D'après la question précédente, il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall t > 0, y(t) = a \operatorname{ch}(\sqrt{2}t) + b \operatorname{sh}(\sqrt{2}t)$ et $\forall t < 0, y(t) = c \cos(\sqrt{-2}t) + d \sin(\sqrt{-2}t)$. La continuité de y en 0 prouve que $a = c$ avec $y(0) = a = c$. La dérivabilité de y en 0 impose $b = d = 0$ car, par exemple, si $t > 0, \frac{y(t) - y(0)}{t} = \frac{a(\operatorname{ch}(\sqrt{2}t) + b \operatorname{sh}(\sqrt{2}t)) - a}{t} \underset{0}{\sim} \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{t}}$ qui tend vers $\pm\infty$ quand t tend vers 0^+ . Ainsi, $y = a\varphi$.

Synthèse : si on pose $y = a\varphi$, on a vu en question **c.** que y est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : on en déduit que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions proportionnelles à φ .

23.11 a. Clairement, $y : x \mapsto x^2$ est une solution polynomiale de (E_0) . Si on ne la voit pas, en notant n le degré d'une solution polynomiale $y : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ de (E_0) avec $a_n \neq 0$, en identifiant les termes en x^n dans (E_0) , on a $n(n-1)a_n - 2a_n = 0$ donc, comme $a_n \neq 0$, il vient $n(n-1) - 2 = n^2 - n - 2 = (n-2)(n+1) = 0$ donc $n = 2$ car $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, s'il existe une solution polynomiale de (E_0) , elle est forcément de degré 2. Ensuite, en notant $y(x) = ax^2 + bx + c$ et en reportant dans (E_0) , il reste $\forall x \in \mathbb{R}, 2ax^2 - 2(ax^2 + bx + c) = -2bx - c = 0$ donc $b = c = 0$ et on a bien $y(x) = ax^2$.

b. C'est la méthode de LAGRANGE. Si on se donne une fonction v de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, en posant $z(x) = \frac{v(x)}{x^2}$, la fonction z est aussi de classe C^2 et $v(x) = x^2 z(x)$ donc $v'(x) = 2xz(x) + x^2 z'(x)$ puis $v''(x) = 2z(x) + 4xz'(x) + x^2 z''(x)$. Ainsi, v est solution de (E_0) sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$ si et seulement si $\forall x \in I, 2x^2 z(x) + 4x^3 z'(x) + x^4 z''(x) - 2x^2 z(x) = 0$ ou encore (F) : $xz''(x) + 4z'(x) = 0$. Classiquement, z' vérifie (G) : $xw' + 4w = 0$ sur I si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, z'(x) = \frac{\lambda}{x^4}$ et les solutions de (F) sont donc les fonctions $z : x \mapsto \frac{\alpha}{x^3} + \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. En prenant $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, on trouve donc

$z(x) = \frac{1}{x^3}$ donc $v : x \mapsto \frac{1}{x}$ est une solution de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ et elle est bien indépendante de u .

c. Comme (E_0) est linéaire d'ordre 2, homogène et normalisée, d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ linéaire, l'espace vectoriel de ses solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ est de dimension 2, il est donc engendré par u et v d'après les deux questions précédentes. Les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont donc toutes les fonctions $y : x \mapsto \frac{\alpha}{x} + \beta x^2$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On constate, comme en **a.**, que $y_p : x \mapsto \frac{x^3}{4}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Par structure affine des solutions, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont toutes les fonctions $y : x \mapsto \frac{\alpha}{x} + \beta x^2 + \frac{x^3}{4}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

d. Analyse : soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, ainsi y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Les restrictions de y à $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont les solutions vues en **c.** donc il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x < 0, y(x) = \frac{\alpha_1}{x} + \beta_1 x^2 + \frac{x^3}{4}$ et $\forall x > 0, y(x) = \frac{\alpha_2}{x} + \beta_2 x^2 + \frac{x^3}{4}$. En prenant $x = 0$ dans (E) , on a $y(0) = 0$. La continuité de y en 0 implique que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Alors on a $y'(0) = 0$ (par taux d'accroissements par exemple) et $\forall x < 0, y'(x) = 2\beta_1 x + \frac{3x^2}{4}$ et $\forall x > 0, y'(x) = 2\beta_2 x + \frac{3x^2}{4}$. Comme y est deux fois dérivable en 0, on a $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y'(x) - y'(0)}{x - 0} = 2\beta_1 = 2\beta_2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y'(x) - y'(0)}{x - 0} = y''(0)$ donc $\beta_1 = \beta_2$.

Synthèse : Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \beta x^2 + \frac{x^3}{4}$, alors y est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et y est bien solution de (E) sur $\mathbb{R}$ car $y''(x) = 2\beta + \frac{3}{2}x$ donc $x^2 y''(x) - y(x) = 2\beta x^2 + \frac{3}{2}x^3 - 2\beta x^2 - \frac{x^3}{2} = x^3$.

Conclusion : les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les $y : x \mapsto \beta x^2 + \frac{x^3}{4}$ avec $\beta \in \mathbb{R}$. C'est un sous-espace affine de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, écrit $S = y_p + \text{Vect}(y_0)$ avec $y_p : x \mapsto \frac{x^3}{4}$ et $y_0 : x \mapsto x^2$. S est une droite affine.

23.12 a. Comme φ est continue sur $\mathbb{R}$, cette équation différentielle linéaire normalisée d'ordre 2 vérifie les hypothèses du théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ. Pour tout $(t_0, y_0, y'_0) \in \mathbb{R}^3$, il existe une unique solution y de (E) telle que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y'_0$. Ainsi, en prenant $t_0 = 0, y_0 = 0$ et $y'_0 = 1$, il existe une unique solution $y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de (E) telle que $y_1(0) = 0$ et $y'_1(0) = 1$. De même, en prenant $t_0 = 0, y_0 = 1$ et $y'_0 = 0$, il existe une unique solution $y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de (E) telle que $y_2(0) = 1$ et $y'_2(0) = 0$. En notant S l'ensemble des solutions réelles de (E) définies sur $\mathbb{R}$, on a vu dans le cours que S est un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que l'application $\theta : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\theta(y) = (y(0), y'(0))$ est linéaire et bijective d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ. Ainsi, $\dim(S) = 2$ car θ est un isomorphisme de S dans $\mathbb{R}^2$. Si $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$ ($\mathbb{R}$) avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, en évaluant ($\mathbb{R}$) et sa dérivée en 0, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc (y_1, y_2) est libre. Par conséquent, (y_1, y_2) est une base de S et on a donc $S = \text{Vect}(y_1, y_2)$.

b. Comme f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse, g l'est aussi par opérations. De plus, pour tout réel x , on a $g'(x) = f'(x + 2\pi)$ et $g''(x) = f''(x + 2\pi)$ donc, comme φ est 2π -périodique, on obtient la relation $\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) + \varphi(x)g(x) = f''(x + 2\pi) + \varphi(x + 2\pi)f(x + 2\pi) = 0$ car $x + 2\pi \in \mathbb{R}$ et que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Ainsi, g est aussi solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

c. On vient de montrer que ψ envoie toute fonction $f \in S$ sur $\psi(f) = g \in S$. La linéarité de ψ est claire donc ψ est un endomorphisme de S . Soit $f \in \text{Ker}(\psi)$, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x + 2\pi) = 0$ donc, comme

$x \mapsto x + 2\pi = y$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il vient $\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = 0$ donc $f = 0$. Ainsi, ψ est injective, et comme S est de dimension finie, ψ est un automorphisme de S .

d. La fonction $z_1 = \psi(y_1) : x \mapsto y_1(x + 2\pi)$ appartient à S d'après la question précédente et $z_1(0) = y_1(2\pi)$ et $z_1'(0) = y_1'(2\pi)$ donc $\theta(z_1) = (y_1(2\pi), y_1'(2\pi)) = y_1(2\pi)(1, 0) + y_1'(2\pi)(0, 1) = y_1(2\pi)\theta(y_2) + y_1'(2\pi)\theta(y_1)$ ce qui montre, par linéarité et bijectivité de θ , que $z_1 = y_1'(2\pi)y_1 + y_1(2\pi)y_2$. De même, on obtient la relation $z_2 = \psi(y_2) = y_2'(2\pi)y_1 + y_2(2\pi)y_2$ car ces deux fonctions sont solutions de (E) avec les mêmes conditions initiales. Par conséquent, la matrice de ψ dans la base (y_1, y_2) de S est $A = \begin{pmatrix} y_1'(2\pi) & y_2'(2\pi) \\ y_1(2\pi) & y_2(2\pi) \end{pmatrix}$. Comme $\chi_A = \chi_\psi = \begin{vmatrix} X - y_1'(2\pi) & -y_2'(2\pi) \\ -y_1(2\pi) & X - y_2(2\pi) \end{vmatrix} = X^2 - (y_1'(2\pi) + y_2(2\pi))X + (y_1'(2\pi)y_2(2\pi) - y_2'(2\pi)y_1(2\pi))$, les valeurs propres de ψ sont les racines de χ_A . Ainsi, si λ est une valeur propre de ψ , λ est solution de l'équation polynomiale (P) : $x^2 - (y_1'(2\pi) + y_2(2\pi))x + (y_1'(2\pi)y_2(2\pi) - y_2'(2\pi)y_1(2\pi)) = 0$.

23.13 a. Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_x(t) = \text{Arctan}^2(xt)$ est continue sur le segment $[0; 1]$ donc $f(x) = \int_0^1 g_x(t)dt$ existe et f est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus, par imparité de Arctan , la fonction f est paire et $f(0) = \int_0^1 0dt = 0$ car $\text{Arctan}(0) = 0$. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \text{Arctan}^2(xt)$:

(H₁) Pour $t \in [0; 1]$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(H₂) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $[0; 1]$.

(H₃) Pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0; 1]$, $|g(x, t)| \leq \frac{\pi^2}{4} = \varphi(t)$ et φ est bien continue et intégrable sur $[0; 1]$.

Ainsi, par continuité sous le signe somme, f est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Utilisons maintenant le théorème de dérivation sous le signe somme :

(H₁) Pour $t \in [0; 1]$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par opérations.

(H₂) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g_x : t \mapsto g(x, t)$ est continue et intégrable sur $[0; 1]$ d'après **a.**

(H₃) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{2t \text{Arctan}(xt)}{1 + (xt)^2}$ est continue sur $[0; 1]$.

(H₄) Pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0; 1]$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{\pi}{2} = \theta(t)$ et θ est bien continue et intégrable sur $[0; 1]$.

Ainsi, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^1 \frac{2t \text{Arctan}(xt)}{1 + (xt)^2} dt$.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, effectuons le changement de variable $u = xt \iff t = \psi_x(u) = \frac{u}{x}$ et ψ_x est une bijection strictement monotone de classe C^1 de $[\widetilde{0; x}]$ dans $[0; 1]$ de sorte que $\forall x \neq 0, f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \text{Arctan}^2(u) du$. Par le théorème fondamental de l'intégration, comme $u \mapsto \text{Arctan}^2(u)$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $H(x) = \int_0^x \text{Arctan}^2(u) du$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $H'(x) = \text{Arctan}^2(x)$. Comme $f(x) = \frac{H(x)}{x}$, en dérivant par produit car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{H(x)}{x^2} + \frac{H'(x)}{x}$ donc $f'(x) = -\frac{f(x)}{x} + \frac{\text{Arctan}^2(x)}{x}$ comme attendu.

c. D'après **c.**, la fonction f est solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. Comme les solutions de (E₀) : $xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont classiquement les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, par théorème de structure,

les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $y_\lambda : x \mapsto f(x) + \frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Analyse : soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, il existe deux constantes λ_1 et λ_2 réelles telles que $\forall x < 0$, $y(x) = f(x) + \frac{\lambda_1}{x}$ et $\forall x > 0$, $y(x) = f(x) + \frac{\lambda_2}{x}$. En remplaçant x par 0 dans (E), on a $y(0) = 0$. De plus, comme y est continue en 0 et que f l'est aussi grâce à **a.**, les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda_1}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $x \mapsto \frac{\lambda_2}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ admettent une limite nulle en 0 ce qui impose $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ainsi, $y = f$.

Synthèse : on a vu en **b.** que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en **c.** que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Comme $f(0) = 0$ donc $0.f'(0) + f(0) = \text{Arctan}^2(0) = 0$, la fonction f est même solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : seule f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et l'espace affine S des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est de dimension 0 car on peut écrire $S = \{f\} = f + \{0\}$.

23.14 Dans $\chi_A = \begin{vmatrix} X+1 & -1 & 0 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 3 & -1 & X-2 \end{vmatrix}$, on effectue l'opération de GAUSS $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ et, par linéarité

du déterminant par rapport à la première colonne, $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ X & X-2 & 1 \\ X & -1 & X-2 \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 1 & -1 & X-2 \end{vmatrix}$ puis on

effectue $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ pour avoir $\chi_A = X \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & 1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = X(X-1)(X-2)$. χ_A est scindé

à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc A est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont simples donc $E_0(A)$, $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont des droites. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $A - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

donc $E_0(A) = \text{Vect}(v_1)$, $E_1(A) = \text{Vect}(v_2)$ et $E_2(A) = \text{Vect}(v_3)$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Le système (S) s'écrit matriciellement $X'' = AX$ si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Comme $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ d'après la question précédente, on a l'équivalence, en posant $Y = P^{-1}X$, Y étant C^1 si et seulement si X l'est : $X'' = AX \iff X'' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X'' = (P^{-1}X)'' = D(P^{-1}X) \iff Y'' = DY$.

En notant $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $Y'' = DY \iff (a'' = 0, b'' = b \text{ et } c'' = 2c)$. Ces trois équations différentielles linéaires

linéaires du second ordre à coefficients et sans second membre se résolvent facilement et $Y'' = DY$ équivaut à $\exists (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \in \mathbb{R}^6$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $a(t) = \alpha_1 t + \alpha_2$, $b(t) = \beta_1 e^t + \beta_2 e^{-t}$, $c(t) = \gamma_1 e^{\sqrt{2}t} + \gamma_2 e^{-\sqrt{2}t}$.

Avec les équivalences précédentes, (x, y, z) vérifie (S) si et seulement s'il existe $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \in \mathbb{R}^6$

et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x(t) = a(t) + b(t) + c(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 + \beta_1 e^t + \beta_2 e^{-t} + \gamma_1 e^{\sqrt{2}t} + \gamma_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ y(t) = a(t) + 2b(t) + 3c(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 + 2\beta_1 e^t + 2\beta_2 e^{-t} + 3\gamma_1 e^{\sqrt{2}t} + 3\gamma_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ z(t) = a(t) + b(t) - c(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 + \beta_1 e^t + \beta_2 e^{-t} - \gamma_1 e^{\sqrt{2}t} - \gamma_2 e^{-\sqrt{2}t} \end{cases}$ car $X = PY$.

23.15 **a.** Comme $g : t \mapsto f(2t)$ et $h : t \mapsto tf(2t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'intégration,

les fonctions $G : x \mapsto \int_0^x f(2t)dt$ et $H : x \mapsto \int_0^x tf(2t)dt$ sont de classe C^1 car elles sont respectivement les

primitives de g et h qui s'annulent en 0. Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 1 + xG(x) - H(x)$ (1) donc $x \mapsto f(2x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ par opérations, ce qui justifie que f est elle-même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. D'ailleurs, on peut montrer facilement par une récurrence simple que f est alors de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En dérivant (1), on a $2f'(2x) = G(x) + xG'(x) - H'(x) = G(x) + xf(2x) - xf(2x) = \int_0^x f(2t)dt$. En remplaçant $2x$ par x , on a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{2} \int_0^{x/2} f(2t)dt$.

b. Comme $f'(x) = \frac{1}{2}G\left(\frac{x}{2}\right)$ et que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, la fonction f est de classe C^2 et, en dérivant une fois de plus, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{1}{4}G'\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{4}$. Ainsi, f est une solution réelle sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants (E) : $4y'' - y = 0$.

c. Les solutions de l'équation caractéristique $4z^2 - 1 = 0$ sont $\pm \frac{1}{2}$ donc les solutions réelles de (E) sont les $y : x \mapsto A \cosh\left(\frac{x}{2}\right) + B \sinh\left(\frac{x}{2}\right)$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Or $f(0) = 1$ grâce à la relation de l'énoncé et $f'(0) = \frac{1}{2}G\left(\frac{0}{2}\right) = 0$ donc $A = 1$ et $B = 0$. Si f vérifie les conditions de l'énoncé, $f : x \mapsto \cosh\left(\frac{x}{2}\right)$. Pour la réciproque :

Méthode 1 : la fonction $f : x \mapsto \cosh\left(\frac{x}{2}\right)$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles et, en posant les fonctions $u : t \mapsto x - t$ et $v : t \mapsto -\sinh(t)$ qui sont de classe C^1 sur $\widetilde{[0; x]}$, par intégration par parties, on a la relation $\int_0^x (x - t)\cosh(t)dt = 0 + \int_0^x \sinh(t)dt = [\cosh(t)]_0^x = \cosh(x) - 1 = f(2x) - 1$ ce qui montre bien que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 1 + \int_0^x (x - t)f(2t)dt$.

Méthode 2 : la fonction $f : x \mapsto \cosh\left(\frac{x}{2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - \frac{f(x)}{4} = 0$ donc $\left(f'(x) - \frac{1}{2} \int_0^{x/2} f(2t)dt\right)' = 0$ d'après ce qui précède. Comme $f'(x) - \frac{1}{2} \int_0^{x/2} f(2t)dt$ s'annule pour $x = 0$, sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) - \frac{1}{2} \int_0^{x/2} f(2t)dt = 0$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(f(2x) - 1 - \int_0^x (x - t)f(2t)dt\right)' = 0$ et, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle et que $f(2.0) = 1 + \int_0^0 (0 - t)f(2t)dt$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 1 + \int_0^x (x - t)f(2t)dt$.

Conclusion : la seule fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 1 + \int_0^x (x - t)f(2t)dt$ est donc la fonction $f : x \mapsto \cosh\left(\frac{x}{2}\right)$.