DS 6 : CENTRALE MP 2017 M2

PSI 1 2025/2026 **samedi 07 mars 2026**

PARTIE 1 : EXEMPLES DE DÉCOMPOSABILITÉ

1.1 ($\Longrightarrow$) Si $X \sim X'$, comme $X(\Omega) = X'(\Omega') \subset \mathbb{N}$ par hypothèse, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}'(X' = k)$ et ainsi, pour tout réel t pour lesquels ces séries convergent absolument (les ensembles de définition sont les mêmes), on a $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X' = k)t^k = G_{X'}(t)$ donc $G_X = G_{X'}$.

($\Longleftarrow$) Si $G_X = G_{X'}$, comme le rayon de convergence commun des ces deux séries étant $R_X = R_{X'} \geqslant 1$, on peut identifier les coefficients de ces deux séries entières par unicité, et obtenir $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X' = k)$ donc les supports de ces deux variables aléatoires sont les mêmes (et inclus dans $\mathbb{N}$) et $X \sim X'$.

Par conséquent, pour deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\boxed{X \sim X' \Longleftrightarrow G_X = G_{X'}.}$

1.2 Pour t convenable, par théorème de transfert, $\mathbb{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k\,\mathbb{P}(X = k) = G_X(t)$. Comme $X \sim Y + Z$, $\mathbb{E}(t^X) = \mathbb{E}(t^{Y+Z}) = \mathbb{E}(t^Y t^Z)$ d'après **1.1**. De plus, comme Y et Z sont indépendantes, il en est de même de t^Z et t^Z par théorème donc, d'après le cours, $\mathbb{E}(t^Y t^Z) = \mathbb{E}(t^Y)\,\mathbb{E}(t^Z)$ et on a bien $\boxed{G_X = G_Y G_Z \text{ si } X \sim Y + Z.}$

1.3 ($\Longrightarrow$) Si $n \geqslant 2$, d'après le théorème admis (T), on peut trouver des variables $X_1, \ldots, X_n$ définies sur un même espace probabilisé Ω', indépendantes et de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On sait d'après le cours que $S = X_1 + \ldots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ donc que $X \sim S$. On pouvait aussi le prouver avec **1.2** car, par récurrence, $G_S = \prod_{i=1} G_{X_i}$ donc $G_S(t) = (1 - p + pt))^n = G_X(t)$ et utiliser la question **1.1** pour avoir aussi $X \sim S$. En posant $Y = X_1 + \ldots + X_{n-1}$ et $Z = X_n$ (on le peut car $n \geqslant 2$), on a $X \sim Y + Z$. Par le lemme des coalitions, les variables aléatoires Y, Z sont indépendantes et non presque sûrement constantes car, comme ci-dessus, $Y \sim \mathcal{B}(n-1, p)$ et $Z \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0; 1[$: X est donc décomposable.

($\Longleftarrow$) Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, d'après le cours, $\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = (pt + (1-p))^n$ donc G_X est une fonction polynomiale de degré n. Si on avait $X \subset Y + Z$ avec Y, Z à valeurs dans $\mathbb{N}$ et non presque sûrement constantes définies sur un univers Ω', alors $(Y + Z)(\Omega') = X(\Omega) = [\![0; n]\!]$ et, comme Y, Z sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, on aurait $Y(\Omega') \subset [\![0; n]\!]$ et $Z(\Omega') \subset [\![0; n]\!]$ ce qui montre que l'égalité $G_X = G_Y G_Z$ de la question **1.2** est une égalité entre deux polynômes polynômes. Comme Y, Z ne sont pas presque sûrement constantes par hypothèse, $\deg(G_Y) \geqslant 1$ et $\deg(G_Z) \geqslant 1$. Ainsi $\deg(G_X) = \deg(G_Y) + \deg(G_Z) = n \geqslant 2$.

Par double implication, on peut conclure que $\boxed{X \to \mathcal{B}(n, p) \text{ est décomposable si et seulement si } n \geqslant 2.}$

1.4.1 Si on suppose que $A = UV$ avec $(U, V) \in (\mathbb{R}_+[X])^2$ où ni U ni V ne sont constants, on peut supposer par symétrie des rôles joués par U et V que $\deg(U) \leqslant \deg(V)$. On peut aussi les supposer unitaires sans perte de généralité quitte à les multiplier par des constantes non nulles car A est lui-même unitaires. Deux cas :

<u>$\deg(U) = 1$</u> $A = X^4 + 2X + 1 = X^4 + (a + c')X^3 + (b' + ac')X^2 + (a' + ab')X + aa'$ si on écrit $U = X + a$ et $V = X^3 + c'X^2 + b'X + a'$ donc, comme a, c' sont positifs, $a = c' = 0$, ce qui contredit $aa' = 1$.

$\underline{\deg(U) = 2}$ $A = X^4+2X+1 = X^4+(b+b')X^3+(a+bb'+a')X^2+(ab'+a'b)X+aa'$ si on écrit $U = X^2+bX+a$ et $V = X^2 + b'X + a'$ donc, comme b, b' sont positifs, on a $b = b' = 0$, de même $a = a' = 0$ car a, a' positifs, ce qui contredit $aa' = 1$.

On conclut ce raisonnement par l'absurde, $\boxed{(A = UV \text{ et } (U, V) \in (\mathbb{R}_+[X])^2) \Longrightarrow (U \text{ ou } V \text{ est constant}).}$

1.4.2 Comme $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$, il existe d'après le cours une variable aléatoire Y telle que $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\} \subset \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{4}$. On a alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_Y(t) = \frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} = \frac{(1+t)^2}{4}$. On a en fait $Y \sim \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$ et on a vu en question **1.3** que Y est décomposable. Posons $C = Y^2$, alors C est telle que $C(\Omega) = \{0, 1, 4\}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_C(t) = \mathbb{E}(t^C) = \mathbb{E}(t^{Y^2}) = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(Y = k)t^{k^2} = \frac{1}{4} + \frac{t}{2} + \frac{t^4}{4} = \frac{A(t)}{4}$ par théorème de transfert. Si C était décomposable, comme en question **1.3**, on pourrait écrire $G_C = G_V G_W$ avec des variables aléatoires V, W à valeurs dans $\mathbb{N}$, non presque sûrement constantes telles que $C = V + W$. Or on vient de voir qu'il est impossible d'avoir $A = 4G_C$ comme produit des deux polynômes non constants à coefficients positifs $4G_V$ et G_W. Ainsi, C n'est pas décomposable.

On vient de voir un exemple de variable aléatoire $\boxed{Y \text{ décomposable telle que } Y^2 \text{ n'est pas décomposable.}}$

PARTIE 2 : VARIABLES UNIFORMES

2.1.1 Analyse : supposons que de telles variables aléatoires entières Q et R existent. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a $Y(\omega) = aQ(\omega) + R(\omega)$ et $Q(\omega) \in \mathbb{N}$, $R(\omega) \in [\![0; a-1]\!]$. D'après le cours, $Q(\omega)$ est le quotient de la division euclidienne de $Y(\omega)$ par a et $R(\omega)$ est le reste de la division euclidienne de $Y(\omega)$ par a. Voilà pour l'unicité.
Synthèse : Pour $\omega \in \Omega$, on définit comme ci-dessus $Q(\omega)$ (resp. $R(o)$) le quotient (resp. le reste) de la division euclidienne de $Y(\omega)$ par a. On a bien défini deux fonctions $Q : \Omega \to \mathbb{N}$ et $R : \Omega \to [\![0; a-1]\!]$ qui vérifient $X = aQ + R$ par construction. Il reste à voir que Q et R sont bien des variables aléatoires.

- Par définition, $Q(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $\mathbb{R}(\Omega) \subset [\![0; a-1]\!]$ donc les univers image de Q et R sont au plus dénombrables.
- Pour $q \in \mathbb{N}$, $(Q = q) = \bigsqcup_{r=0}^{a-1} (Y = qa + r)$ donc, comme $(Y = aq + r) \in \mathcal{A}$ puisque Y est une variable aléatoire, par réunion au plus dénombrable d'évènements, $(Q = q) \in \mathcal{A}$. De plus, pour $r \in [\![0; a-1]\!]$, $(R = r) = \bigsqcup_{q \in \mathbb{N}} (Y = qa + r)$ et, comme avant, $(R = r) \in \mathcal{A}$.

Par conséquent, par définition, Q et R sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Voilà pour l'existence.

On peut conclure $\boxed{\exists!(Q, R) \text{ variables aléatoires entières sur } \Omega, \text{ telles que } X = aQ + R \text{ et } R(\Omega) \subset [\![0; a-1]\!].}$

2.1.2 On a $(Q, R)(\Omega) \subset \mathbb{N} \times [\![0; a-1]\!]$ et $\forall (q, r) \in \mathbb{N} \times [\![0; a-1]\!]$, $((Q, R) = (q, r)) = (Y = aq + r)$ donc, puisque Y suit la loi uniforme sur $[\![0; n-1]\!]$, on a $\mathbb{P}((Q, R) = (q, r)) = \mathbb{P}(Y = aq + r) = \frac{1}{n}$ si $aq + r \leqslant n - 1$ et $\mathbb{P}((Q, R) = (q, r)) = \mathbb{P}(Y = aq + r) = 0$ sinon. En reprenant les égalités ensemblistes de la question

précédente et comme les réunions mises en jeu sont disjointes, $\forall r \in [\![0;a-1]\!],\ \mathbb{P}(R=r)=\sum_{q\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(Y=qa+r)$ et $\forall q\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(Q=q)=\sum_{r=0}^{a-1}\mathbb{P}(Y=qa+r)$.

Il s'agit de compter à r (resp q) fixé combien il y a de q (resp r) tels que $0\leqslant qa+r\leqslant n-1=ab-1$.

• À r fixé, les q convenables sont $0,1,\cdots,b-1$ et il y en a b.

• À q fixé dans $[\![0;b-1]\!]$, il y a a valeurs pour r et si $q\geqslant b$, il n'y en a aucune.

Ainsi, $\forall r\in[\![0;a-1]\!],\ \mathbb{P}(R=r)=\frac{b}{n}=\frac{1}{a}$ et $\forall q\in[\![0;b-1]\!],\ \mathbb{P}(Q=q)=\frac{a}{n}=\frac{1}{b}$ de sorte que l'on eut conclure que $\boxed{R\sim\mathcal{U}([\![0;a-1]\!] \text{ et } Q\sim\mathcal{U}([\![0;b-1]\!]).}$

2.1.3 On vient de voir que $Y=aQ+R$ et comme a,b sont des entiers supérieurs ou égaux à 2, aQ et R ne sont pas des variables presque sûrement constantes. Pour des entiers $0\leqslant q\leqslant b-1$ et $0\leqslant r\leqslant a-1$, d'après la question **2.1.2**, $\mathbb{P}(Q=q,R=r)=\mathbb{P}((Q,R)=(q,r))=\frac{1}{n}=\mathbb{P}(Q=q)\,\mathbb{P}(R=k)$ donc Q et R sont indépendantes. Ainsi, par définition, Y est décomposable et, d'après le cours, $G_Y=G_{aQ+R}=G_{aQ}G_R$ par indépendance de aQ et R de sorte que, puisque $\forall t\in\mathbb{R}$, $G_Y(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}t^k$, $G_R(t)=\frac{1}{a}\sum_{r=0}^{a-1}t^r$ et $G_{aQ}(t)=\frac{1}{b}\sum_{q=0}^{n-1}t^{aq}$ et $n=ab$, on obtient $\boxed{G_Y(t)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}t^k=\frac{1}{a}\left(\sum_{r=0}^{a-1}t^r\right)\frac{1}{b}\left(\sum_{q=0}^{b-1}t^{aq}\right).}$

2.2.1 Par hypothèse, on a $UV=1+X+\ldots+X^{n-1}=\frac{X^n-1}{X-1}$ donc les racines de UV sont les racines n-ièmes de l'unité à part 1. Comme $r\geqslant 1$ et $s\geqslant 1$, on a $r+s=\deg(UV)=-1\geqslant 2$ donc n est un nombre premier impair de sorte que -1 n'est pas racine n-ième de 1. On sait factoriser $UV=\prod_{k=1}^{n-1}(X-e^{i\theta_k})$ avec $\theta_k=\frac{2k\pi}{n}$. Comme $\forall k\in[\![1;\frac{n-1}{2}]\!]$, $e^{i\theta_{n-k}}=\overline{e^{i\theta_k}}=e^{-i\theta_k}$, on a aussi $UV=\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(X-e^{i\theta_k})(X-\overline{e^{i\theta_k}}=\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(X-e^{i\theta_k})(X-e^{-i\theta_k})$.

Comme U et V sont à coefficients réels, les racines conjuguées se trouvent groupées dans U et V de sorte qu'il existe une partition $\{A,B\}$ de $[\![1;\frac{n-1}{2}]\!]$ telle que $U=\prod_{a\in A}(X-e^{i\theta_a})(X-e^{-i\theta_a})$ et $V=\prod_{b\in B}(X-e^{i\theta_b})(X-e^{-i\theta_b})$ avec $A\neq\emptyset$ et $B\neq\emptyset$ car $r=2\text{card}\,(A)\geqslant 1$ et $s=2\text{card}\,(B)\geqslant 1$.

On vérifie alors que $U=X^{2\text{card}\,(A)}\prod_{j\in A}\left(1-\frac{e^{i\theta_a}}{X}\right)\left(1-\frac{e^{-i\theta_a}}{X}\right)=X^r\prod_{j\in A}^{k}\left(e^{-i\theta_a}-\frac{1}{X}\right)\left(e^{i\theta_a}-\frac{1}{X}\right)=X^rU\left(\frac{1}{X}\right)$.

On procède de même pour V et on peut conclure que $\boxed{U=X^rU\left(\frac{1}{X}\right) \text{ et } V=X^sV\left(\frac{1}{X}\right).}$

2.2.2 Comme $U=X^rU\left(\frac{1}{X}\right)$, on a l'égalité $u_0+u_1X+\cdots+u_{r-1}X^{r-1}+X^r=u_0X^r+u_1X^{r-1}+\cdots+u_{r-1}X+1$. Ceci montre que $u_0=1$ (ce que l'énoncé donne sans le justifier) et plus généralement $\forall i\in[\![1;r-1]\!],\ u_{r-i}=u_i$. Même chose pour V, $v_0=1$ et $\forall j\in[\![0;s-1]\!],\ v_{s-j}=v_j$.

En regardant le coefficient de X^r dans le polynôme $UV=1+\cdots+X^{n-1}$, on obtient $\sum_{i=0}^{r}u_iv_{r-i}=1$. Comme $u_r=v_0=1$, on obtient $\sum_{i=0}^{r-1}u_iv_{r-i}=0$. Les u_k,v_k étant positifs, les termes dans la somme sont positifs et

comme la somme est nulle, ils sont tous nuls. Ainsi, $\forall i \in [\![0;r-1]\!],\ u_i v_{r-i} = 0$. Mais on a vu que $u_i = u_{r-i}$ et comme $r-i$ varie dans $[\![1;r]\!]$ quand i varie dans $[\![0;r-1]\!]$, on conclut que $\boxed{\forall k \in [\![1;r]\!],\ u_k v_k = 0.}$

2.2.3 Montrons par récurrence le résultat demandé.

Initialisation : en regardant le coefficient de degré 1 de UV on obtient $u_1 + v_1 = 1$. Comme $u_1 v_1 = 0$ d'après la question **2.2.2**, on a donc ($u_1 = 0$ et $v_1 = 1$) ou ($u_1 = 1$ et $v_1 = 0$). Ainsi, on a $u_1 \in \{0,1\}$ et $v_1 \in \{0,1\}$.

Hérédité : soit $k \in [\![1;r]\!]$ tel que $\forall i \in [\![1;k-1]\!],\ u_i \in \{0,1\}$ et $v_i \in \{0,1\}$. En regardant le coefficient de degré k de UV, on obtient $v_k + \sum_{i=1}^{k-1} u_i v_{k-i} + u_k = 1$. Chaque élément de la somme vaut 0 ou 1 par hypothèse de récurrence. Traitons deux cas :

- S'ils sont tous nuls, $u_k + v_k = 1$ et $u_k v_k = 0$. Comme avant, ($u_k = 0$ et $v_k = 1$) ou ($u_k = 1$ et $v_k = 0$).
- S'ils ne sont pas tous nuls, la somme vaut au moins 1 et on obtient $u_k + v_k \leqslant 0$ ce qui entraîne $u_k = v_k = 0$ (car u_k, v_k sont positifs).

Dans les deux cas, on a $u_k \in \{0,1\}$ et $v_k \in \{0,1\}$.

Par principe de récurrence finie, $\boxed{\forall k \in [\![1;r]\!],\ u_k \in \{0,1\} \text{ et } v_k \in \{0,1\}.}$

2.2.4 Si $r = s$, on a déjà prouvé que tous les coefficients de V étaient dans $\{0,1\}$ avec **2.2.3**. Sinon, $s \geqslant r+1$ et il s'agit d'une nouvelle récurrence comme à la question précédente :

Initialisation : le coefficient de X^{r+1} dans UV vaut $1 = v_1 + v_2 u_{r-1} + \cdots + v_r u_1 + v_{r+1}$. Or les termes $v_1, v_2 u_{r-1}, \cdots, v_r u_1$ valent tous 0 ou 1 donc, s'ils sont tous nuls, $v_{r+1} = 1$ et sinon $v_{r+1} \leqslant 0$ et, comme c'est un terme positif, $v_{r+1} = 0$. Ainsi $v_{r+1} \in \{0,1\}$.

Hérédité : soit $k \in [\![r+2;s]\!]$ tel que $\forall i \in [\![r+1;k-1]\!],\ v_i \in \{0,1\}$. En regardant le coefficient de degré k de UV, on obtient $v_k + \sum_{i=1}^{k} u_i v_{k-i} = v_k + \sum_{i=1}^{r-1} u_i v_{k-i} + v_{k-r} = 1$ car $u_{r+1} = \cdots = u_k = 0$. Chaque élément de la somme vaut 0 ou 1 par hypothèse de récurrence et d'après **2.2.3**. Traitons deux cas :

- S'ils sont tous nuls, $v_k + v_{k-r} = 1$ donc $v_k = 0$ si $v_{k-r} = 1$ et $v_k = 1$ si $v_{k-r} = 0$.
- S'ils ne sont pas tous nuls, la somme vaut au moins 1 et on obtient $v_k + v_{k-r} \leqslant 0$ ce qui entraîne $v_k = v_{k-r} = 0$ (car v_k, v_{k-r} sont positifs).

Dans les deux cas, on a $v_k \in \{0,1\}$.

Par principe de récurrence finie, $\boxed{\forall k \in [\![r+1;s]\!],\ v_k \in \{0,1\}}$ donc V est à coefficients dans $\{0,1\}$.

On a alors $UV = 1 + X + \ldots + X^{n-1}$ d'où, en évaluant en 1, $n = U(1)V(1)$ avec $U(1)$ et $V(1)$ des entiers qui vérifient $U(1) \geqslant u_0 + u_r \geqslant 2$ et $V(1) \geqslant v_0 + v_s \geqslant 2$. C'est absurde car n est un nombre premier.

Supposons que Y soit décomposable et qu'on ait donc $Y \sim W + Z$. On a alors $G_Y = G_W G_Z$ et, comme en question **1.3**, $U = G_W$ et $V = G_Z$ sont des polynômes non constants et à coefficients dans $\mathbb{R}_+$. Or, $\forall t \in \mathbb{R},\ G_Y(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} t^k$ donc $\frac{U}{\mathrm{dom}(U)} \times \frac{V}{\mathrm{dom}(V)} = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$ est un produit de deux polynômes non constants unitaires à coefficients dans $\mathbb{R}_+$, on a vu que ce n'était pas possible.

Ainsi, $\boxed{\text{si } Y \text{ suit la loi uniforme sur } [\![0;n-1]\!] \text{ avec } n \text{ un nombre premier, alors } Y \text{ n'est pas décomposable.}}$

PARTIE 3 : VARIABLES BORNÉES

3.1 Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver m variables indépendantes $X_{m,1}, \ldots, X_{m,m}$ toutes constantes égales à $\frac{a}{m}$ d'après le théorème (T). La variable aléatoire $X_{m,1} + \ldots + X_{m,m}$ est alors constante égale à a et a donc même loi que X. Ainsi, une variable aléatoire constante est infiniment divisible.

3.2.1 On a l'inclusion $\bigcap_{i=1}^{n} \left(X_i > \frac{M}{n}\right) \subset (X_1 + \ldots + X_n > M)$ donc, en passant aux probabilités et par indépendance de $X_1, \ldots, X_n$ qui sont définies sur $(\mathcal{A}', \mathbb{P}')$, on a $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}'\left(X_i > \frac{M}{n}\right) \leqslant \mathbb{P}'(X_1 + \cdots + X_n > M)$. Comme on a $X \sim X_1 + \ldots + X_n$, le membre de droite vaut $\mathbb{P}'(X_1 + \cdots + X_n > M) = \mathbb{P}(X > M)$ et on sait que $\mathbb{P}(X > M) = 0$ par hypothèse car $(X > M) = \emptyset$. On a donc $0 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}'\left(X_i > \frac{M}{n}\right) \leqslant 0$ donc $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}'\left(X_i > \frac{M}{n}\right) = 0$ ce qui justifie qu'il existe $i \in [\![1; n]\!]$ tel que $\mathbb{P}'\left(X_i > \frac{M}{n}\right) = 0$. Comme $X_1, \ldots, X_n$ ont même loi, on en déduit que $\forall i \in [\![1; n]\!],\ \mathbb{P}'\left(X_i > \frac{M}{n}\right) = 0$ donc $\mathbb{P}'\left(X_i \leqslant \frac{M}{n}\right) = 1$: l'évènement $\left(X_i \leqslant \frac{M}{n}\right)$ est presque sûr.

De même, $\bigcap_{i=1}^{n} \left(X_i < -\frac{M}{n}\right) \subset (X_1 + \ldots + X_n < -M)$ et, comme avant, $\forall i \in [\![1; n]\!],\ \mathbb{P}'\left(X_i < -\frac{M}{n}\right) = 0$. Comme $\left(|X_i| > \frac{M}{n}\right) = \left(X_i > \frac{M}{n}\right) \sqcup \left(X_i < -\frac{M}{n}\right)$, on a $\mathbb{P}'\left(|X_i| > \frac{M}{n}\right) = \mathbb{P}'\left(X_i > \frac{M}{n}\right) + \mathbb{P}'\left(X_i < -\frac{M}{n}\right) = 0$ (événements incompatibles). Par conséquent, $\forall i \in [\![1; n]\!],\ \mathbb{P}'\left(|X_i| \leqslant \frac{M}{n}\right) = 1.$

3.2.2 Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, X_i est presque sûrement à valeurs dans $\left[-\frac{M}{n}; \frac{M}{n}\right]$ donc X_i^2 est presque sûrement à valeurs dans $\left[0; \frac{M^2}{n^2}\right]$. Par croissance de l'espérance, $\mathbb{E}(X_i^2) \leqslant \frac{M^2}{n^2}$. Or $\mathbb{V}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 \leqslant \mathbb{E}(X_i^2)$, donc $\mathbb{V}(X_i) \leqslant \frac{M^2}{n^2}$. D'après le cours, $\mathbb{V}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \ldots + \mathbb{V}(X_n)$ car les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes. Avec les inégalités précédentes $\mathbb{V}(X_1 + \ldots + X_n) \leqslant \frac{M^2}{n}$. Comme X et $X_1 + \ldots + X_n$ ont même loi, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X_1 + \ldots + X_n) \leqslant \frac{M^2}{n}.$

3.2.3 C'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = 0$ et la variable aléatoire positive $(X - \mathbb{E}(X))^2$ étant d'espérance nulle, elle est presque sûrement ,nulle donc X vaut presque sûrement $\mathbb{E}(X)$ donc X est presque sûrement constante.

PARTIE 4 : BINOMIALES ET POISSON

4.1 Une variable aléatoire binomiale est bornée (puisque finie). La partie **3** montre qu'elle n'est infiniment divisible que si elle est constante. Ainsi, $\boxed{\text{si } X \sim \mathcal{B}(n,p) \text{ avec } p \in]0;1[,\ X \text{ n'est pas infiniment divisible.}}$

4.2 On a $G_{X_1+X_2} = G_{X_1}G_{X_2}$ directement avec **1.2**. Si $G_{X_1+\ldots+X_k} = \prod_{i=1}^{k} G_{X_i}$ pour un entier $k \in [\![2; n-1]\!]$, comme $X_1+\cdots+X_k$ et X_{k+1} sont indépendants par le lemme des coalitions, toujours d'après la question **1.2**, il vient $G_{X_1+\cdots+X_{k+1}} = G_{X_1+\cdots+X_k}G_{X_{k+1}}$ puis $G_{X_1+\ldots+X_{k+1}} = \Big(\prod_{i=1}^{k} G_{X_i}\Big)G_{X_{k+1}} = G_{X_1+\ldots+X_k} = \prod_{i=1}^{k+1} G_{X_i}$ en appliquant l'hypothèse de récurrence. Par principe de récurrence finie, on a donc $G_{X_1+\ldots+X_n} = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}$.
On sait d'après le cours que si $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\forall t \in \mathbb{R},\ G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}$. Ainsi, avec la relation précédente, $\forall t \in \mathbb{R},\ G_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i(t-1)} = e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)(t-1)}$. On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\ldots+\lambda_n$ et avec **1.1**, $\boxed{X_1+\ldots+X_n \sim \mathcal{P}(\lambda_1+\ldots+\lambda_n).}$

4.3 On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver m variables indépendantes $X_{m,i}$ suivant la loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\lambda}{m}$ d'après le théorème (T). On a alors $X \sim X_{m,1}+\ldots+X_{m,m}$ d'après la question précédente car $\lambda = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\lambda}{m}$. Ainsi, $\boxed{\text{si } X \sim \mathcal{P}(\lambda) \text{ avec } \lambda > 0, \text{ alors } X \text{ est infiniment divisible.}}$

4.4 Les variables aléatoires $X_1,\ldots,X_n$ sont infiniment divisibles d'après la question précédente, et avec des notations similaires, pour tout entier $i \in [\![1;n]\!]$, si $X_i \sim X_{i,m,1}+\ldots+X_{i,m,m}$, on a aussi clairement $iX_i \sim i(X_{i,m,1}+\ldots+X_{i,m,m}) = iX_{i,m,1}+\ldots+iX_{i,m,m}$ avec $iX_{i,m,1},\ldots,iX_{i,m,m}$ indépendantes donc iX_i est aussi infiniment divisible. Pour conclure, il suffit donc de montrer qu'une somme de variables indépendantes et infiniment divisibles est infiniment divisible. Commençons par deux variables.
Initialisation : soit X et Y infiniment divisibles et indépendantes. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, il existe des décompositions $X \sim X_1+\ldots+X_m$ et $Y \sim Y_1+\ldots+Y_m$ où $X_1,\ldots,X_m$ sont indépendantes de même loi et $Y_1,\ldots,Y_m$ sont aussi indépendantes de même loi. D'après la question **1.2** et son extension de la question **4.2**, $G_X = (G_{X_1})^m$ et $G_Y = (G_{Y_1})^m$ car $X_1,\ldots,X_m$ ont même loi et $Y_1,\ldots,Y_m$ aussi.
On sait avec **1.2** que $G_{X+Y} = G_XG_Y$ car X,Y indépendantes donc $G_{X+Y} = (G_{X_1}G_{Y_1})^m$. Comme G_{X_1} et G_{Y_1} sont développables en série entière par construction avec un rayon de convergence supérieur à 1 d'après le cours et avec des coefficients positifs car ce sont respectivement $\mathbb{P}(X_1=k)$ et $\mathbb{P}(Y_1=k)$, par produit de Cauchy, la fonction $G_{X_1}G_{Y_1}$ est aussi développable en série entière avec un rayon de convergence supérieur à 1 et les coefficients de son développement $G_{X_1}(t)G_{Y_1}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nt^n$ (1) sont des termes positifs car $a_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_1=k)\,\mathbb{P}(Y_1=n-k)$. L'égalité (1) est valable pour $t \in [-1;1]$ car il y a convergence absolue de $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X_1=k)t^k$ et $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(Y_1=k)t^k$ pour $t \in [-1;1]$. Ainsi $\sum_{n=0} a_n = G_{X_1}(1)G_{Y_1}(1) = 1\times 1 = 1$ donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une distribution de probabilité et, d'après le cours ou le théorème (T) avec $m=1$, il existe une variable aléatoire Z telle que $\forall t \in [-1;1],\ G_Z(t) = G_{X_1}(t)G_{Y_1}(t)$. Toujours d'après le théorème (T), on peut trouver m variables aléatoires indépendantes $Z_1,\ldots,Z_m$ de même loi que Z. La variable aléatoire

$Z_1 + \ldots + Z_m$ a pour fonction génératrice $G_{Z_1}^m = G_Z^m = (G_{X_1})^m (G_{Y_1})^m = G_X G_Y = G_{X+Y}$ d'après **1.2** car $Z_1, \ldots, Z_m$ sont indépendantes et X, Y aussi. On en déduit avec **1.1** que $X + Y \sim Z_1 + \ldots + Z_m$. Par conséquent, puisque ceci est vrai pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $X+Y$ est infiniment divisible.

Hérédité : si on a montré que la somme de $k \geqslant 2$ variables aléatoires indépendantes infiniment divisibles en est encore une, soit $X_1, \ldots, X_{k+1}$ des variables aléatoires infiniment divisibles. Par hypothèse de récurrence, $X_1 + \cdots + X_k$ en est encore une et $X_1 + \cdots + X_k$ et X_{k+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions et, d'après l'initialisation, $(X_1 + \cdots + X_k) + X_{k+1}$ est aussi infiniment divisible.

Par principe de récurrence, toute somme de variables aléatoires indépendantes et toutes infiniment divisibles est encore une variable aléatoire infiniment divisible. Par conséquent, $\boxed{\sum_{i=1}^{n} iX_i \text{ est infiniment divisible.}}$

PARTIE 5 : SÉRIE DE VARIABLES ENTIÈRES

5.1.1 Pour A, B dans $\mathcal{A}$, comme $A = (A \cap \overline{B}) \sqcup (A \cap B)$ (incompatibles) et $B = (\overline{A} \cap B) \sqcup (A \cap B)$ (incompatibles), $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)$. En soustrayant, $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) - \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$. Par inégalité triangulaire, on obtient bien $\boxed{\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2,\ |\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leqslant \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B).}$

5.1.2 Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $|\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| \leqslant \mathbb{P}(X = n, Y \neq n) + \mathbb{P}(X \neq n, Y = n)$ en prenant $A = (X = n)$ et $B = (Y = n)$ dans **5.1.1**. Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| \leqslant \mathbb{P}(X = n)$ et que $\sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(X = n)$ converge (sa somme vaut 1 car $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ par hypothèse), par comparaison, $\sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)|$ converge.

On somme ces inégalités et $\sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(X = n, Y \neq n) + \mathbb{P}(X \neq n, Y = n))$. Or $(X \neq Y) = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} (X = n, Y \neq n)$ (incompatibles) donc, par σ-additivité, $\mathbb{P}(X \neq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(X = n, Y \neq n)$. De même, $(X \neq Y) = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} (Y = n, X \neq n)$ donc $\mathbb{P}(X \neq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(Y = n, X \neq n)$. Par conséquent, l'inégalité ci-dessus devient $\sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)| \leqslant 2\,\mathbb{P}(X \neq Y)$.

Pour $t \in [-1; 1]$, on a $|\mathbb{P}(X = n)t^n - \mathbb{P}(Y = n)t^n| \leqslant |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)|$ et $\sum_{n \geqslant 0} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)|$ converge ainsi, par comparaison, $\sum_{n \geqslant 0} (\mathbb{P}(X = n)t^n - \mathbb{P}(Y = n)t^n)$ converge absolument et, par définition de G_X et G_Y, $\boxed{\forall t \in [-1; 1],\ |G_X(t) - G_Y(t)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(X = n) - \mathbb{P}(Y = n)|t^n \leqslant 2\,\mathbb{P}(X \neq Y).}$

5.2.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in Z_{n+1}$, il existe donc un entier $i \geqslant n+1$ tel que $U_i(\omega) \neq 0$. Comme i vérifie $i \geqslant n$ et qu'on a $U_i(\omega) \neq 0$, il vient $\omega \in Z_n$ donc $Z_{n+1} \subset Z_n$. Ainsi, $\boxed{(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante pour l'inclusion.}}$

Comme $Z_n = \bigcup_{i=n}^{+\infty} (U_i \neq 0)$, par formule de sous-additivité, on a $\mathbb{P}(Z_n) \leqslant \sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(U_i \neq 0)$. Comme la série $\sum_{i\geqslant 1} \mathbb{P}(U_i \neq 0)$ converge par hypothèse, $\sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(U_i \neq 0)$ est le reste d'ordre $n-1$ de cette série convergente et, à ce titre, tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par encadrement, on a donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n) = 0.}$

5.2.2 Par continuité décroissante, d'après **5.2.1**, $0 = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} Z_k\right)$.

Or $\left(\omega \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} Z_k\right) \iff \left(\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists i \geqslant k,\ U_i(\omega) \neq 0\right) \iff \left(\{i \in \mathbb{N}^* \mid U_i(\omega) \neq 0\} \text{ est infini }\right)$ (aussi loin qu'on regarde -au delà de k-, on trouve toujours un indice $i \geqslant k$ tel que $U_i(\omega) \neq 0$). Tout ceci prouve que $\mathbb{P}\big(\{i \in \mathbb{N}^* \mid U_i \neq 0\} \text{ est infini}\big) = 0$. Autrement dit $\boxed{\left\{i \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; U_i \neq 0\right\} \text{ est presque sûrement fini.}}$

5.2.3 Notons $C = \left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \text{il existe un nombre fini de } i \text{ pour lesquels } U_i(\omega) \neq 0\right\}$. Si $\omega \in C$ alors $S(\omega)$ existe (comme une somme finie de termes non nuls, tous les autres étant nuls). S est ainsi définie au moins sur C qui est de probabilité 1 d'après **5.2.2** donc $\boxed{S \text{ est définie presque sûrement.}}$ Avec la question **5.1.2**, on a $\forall t \in [-1;1],\ |G_{S_n}(t) - G_S(t)| \leqslant 2\,\mathbb{P}(S_n \neq S)$. On en déduit que $||G_{S_n} - G_S||_{\infty,[-1;1]} \leqslant 2\,\mathbb{P}(S_n \neq S)$. Or $\omega \in C \iff (\exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \geqslant n,\ U_i(\omega) = 0) \iff (\exists n \in \mathbb{N}^*,\ S_n(\omega) = S(\omega))$ de sorte que $C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (S_n = S)$. Comme les U_i sont à valeurs positives, dès que $S_n = S$, on a aussi $S_{n+1} = S$ d'où la croissance de la suite $((S_n = S))_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour l'inclusion donc la suite $((S_n \neq S))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion. Par continuité décroissante, comme $\overline{C} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (S_n \neq S)$, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n \neq S) = \mathbb{P}(\overline{C}) = 0$ donc, par définition de la convergence uniforme, $\boxed{(G_{S_n})_{n\geqslant 1} \text{ converge uniformément vers } G_S \text{ sur } [-1;1].}$

5.3.1 Comme $0 \leqslant \mathbb{P}(X_i \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - e^{-\lambda_i} \leqslant \lambda_i$ par concavité de la fonction $f : x \mapsto 1 - e^{-x}$, par comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\sum_{i\geqslant 1} \mathbb{P}(X_i \neq 0) \text{ converge.}}$

5.3.2 On est dans le cadre de la question **5.2.3** avec X_i à la place de U_i et la condition $\sum_{i\geqslant 1}\mathbb{P}(X_i\neq 0)$ converge est respectée avec **5.3.1**, la variable aléatoire $Y=\sum_{i=1}^{+\infty}X_i$ est donc définie presque sûrement d'après **5.2.3**. La fonction génératrice G_Y est la limite uniforme sur $[-1;1]$ de $(G_{S_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ avec **5.2.3**. Par indépendance de $X_1,\dots,X_n$, $G_{S_n}=G_{X_1+\dots+X_n}=G_{X_1}\dots G_{X_n}\ :\ t\mapsto\prod_{i=1}^{n}e^{\lambda_i(t-1)}=\exp\left((t-1)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$. Ainsi, $\forall t\in[-1;1]$, $G_Y(t)=\exp\left((t-1)\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i\right)$. On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson et, d'après la question **1.1**, $\boxed{Y=\sum_{i=1}^{+\infty}X_i\sim\mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i\right).}$

5.3.3 Comme $\sum_{i\geqslant 1}\mathbb{P}(X_i\neq 0)$ converge d'après la question **5.3.1**, $\left\{i\in\mathbb{N}^*\ \middle|\ U_i\neq 0\right\}$ est presque sûrement fini donc $\left\{i\in\mathbb{N}^*\ \middle|\ iU_i\neq 0\right\}$ est presque sûrement fini. Ainsi, la variable aléatoire $X=\sum_{i=1}^{+\infty}iX_i$ est définie presque sûrement (somme finie de termes presque sûrement). Comme $(iX_i)(\Omega)\subset i\mathbb{N}$, pour $t\in[-1;1]$, on a $G_{iX_i}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(iX_i=ik)t^{ik}=G_{X_i}(t^i)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X_i=k)t^{ik}=G_{X_i}(t^i)$ puis, par indépendance de $X_1,2X_2,\dots,nX_n$, $G_{T_n}(t)=\prod_{i=1}^{n}G_{iX_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}e^{\lambda_i(t^i-1)}=\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\times\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_it^i\right)>0$.
La fonction génératrice G_X est la limite uniforme de la suite $(G_{T_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $T_n=\sum_{i=1}^{n}iX_i$ d'après **5.2.3**. Soit $m\in\mathbb{N}^*$, comme T_n est infiniment divisible d'après la question **4.4**, il existe des variables $Y_{n,1},\dots,Y_{n,m}$ indépendantes de même loi telles que $T_n\sim Y_{n,1}+\dots+Y_{n,m}$. On a alors $\forall t\in[-1;1]$, $G_{T_n}(t)=G_{Y_{n,1}}(t)^m>0$. Comme $G_{Y_{m,1}}$ garde un signe constant sur son ensemble de définition et que $G_{Y_{m,1}}(1)=1>0$, la fonction $G_{Y_{m,1}}$ est strictement positive sur son ensemble de définition, donc au moins sur $[-1;1]$, et on a donc $\forall t\in[-1;1]$, $G_{Y_{n,1}}(t)=G_{T_n}(t)^{1/m}$ donc $\lim_{n\to+\infty}G_{Y_{n,1}}(t)=G_X(t)^{1/m}$ par continuité de $t\mapsto t^{1/m}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En posant $F(t)=G_X(t)^{1/m}$, on a alors $G_X(t)=F(t)^m$. On pourra conclure comme en **4.4** si on montre que $F:t\mapsto\exp\left(-\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\lambda_i}{m}\right)\times\exp\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\lambda_i}{m}t^i\right)$ est la fonction génératrice d'une variable aléatoire en reprenant le calcul de la question en travaillant avec $\mu_i=\frac{\lambda_i}{m}$ au lieu de λ_i. D'après le théorème (T), il existe des variables aléatoires indépendantes de même loi (ici la loi est $\mathcal{G}\left(\frac{\lambda_i}{m}\right)$) $Z_{m,1},\dots,Z_{m,m}$ telle que $\forall i\in[\![1;m]\!]$, $G_{Z_{m,i}}=F$ de sorte que $G_{Z_{m,1}+\dots Z_{m,m}}=\prod_{i=1}^{m}G_{Z_{m,i}}=F^m=G_X$ et on a $X\sim\sum_{i=1}^{m}Z_{m,i}$ d'après **1.1**. Comme ceci est vrai pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, par définition, $\boxed{\sum_{i=1}^{+\infty}iX_i\text{ est infiniment divisible.}}$

PARTIE 6 : SÉRIE ENTIÈRE AUXILIAIRE

6.1 Analyse : si la suite $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ convient, on a nécessairement $\lambda_1 = \dfrac{\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(X=0)}$ (pour $k=1$) et, pour tout entier $k \geqslant 2$, $\lambda_k = \dfrac{1}{k\,\mathbb{P}(X=0)}\left(k\,\mathbb{P}(X=k) - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} j\lambda_j\,\mathbb{P}(X=k-j)\right)$ d'après la relation de l'énoncé ; ceci existe car $k\,\mathbb{P}(X=0) > 0$ par hypothèse. Voilà pour l'unicité !

Synthèse : on peut définir la suite $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ par son premier terme $\lambda_1 = \dfrac{\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(X=0)}$ et la relation de récurrence $\lambda_k = \dfrac{1}{k\,\mathbb{P}(X=0)}\left(k\,\mathbb{P}(X=k) - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} j\lambda_j\,\mathbb{P}(X=k-j)\right)$ (R) pour tout $k \geqslant 2$ car cette dernière relation ne fait intervenir que les valeurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ déjà définies. La relation (R) et la définition de λ_1 peuvent aussi s'écrire $\forall k \geqslant 1,\ k\,\mathbb{P}(X=k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j\,\mathbb{P}(X=k-j)$ (même valable pour $k=0$). Voilà pour l'existence !

Il existe bien une unique suite réelle $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ telle que, $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k\,\mathbb{P}(X=k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j\,\mathbb{P}(X=k-j)$.

6.2 Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a $k\lambda_k\,\mathbb{P}(X=0) = k\,\mathbb{P}(X=k) - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} j\lambda_j\,\mathbb{P}(X=k-j)$ et on passe en valeur absolue, puis on utilise l'inégalité triangulaire, ce qui donne $\forall k \geqslant 1,\ k|\lambda_k|\,\mathbb{P}(X=0) \leqslant k\,\mathbb{P}(X=k) + \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} j|\lambda_j|\,\mathbb{P}(X=k-j)$. Mais comme $\forall j \in [\![1; k-1]\!]$, $j \leqslant k$, on obtient $\forall k \geqslant 1,\ |\lambda_k|\,\mathbb{P}(X=0) \leqslant \mathbb{P}(X=k) + \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\,\mathbb{P}(X=k-j)$. En remarquant que $\mathbb{P}(X=i) + \mathbb{P}(X=0) \leqslant 1$ si $i \neq 0$ donc $\mathbb{P}(X=i) \leqslant 1 - \mathbb{P}(X=0)$ et en reportant ci-dessus, on en déduit la majoration $\boxed{\forall k \geqslant 1,\ |\lambda_k|\,\mathbb{P}(X=0) \leqslant (1-\mathbb{P}(X=0))\left(1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\right).}$

6.3 On prouve le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : $1 + |\lambda_1| = 1 + \dfrac{\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(X=0)} \leqslant \dfrac{\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(X=0)} \leqslant \dfrac{1}{\mathbb{P}(X=0)}$ car $\mathbb{P}(X=1) \leqslant 1$.

Hérédité : si $1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j| \leqslant \dfrac{1}{\mathbb{P}(X=0)^{k-1}}$ (H) pour un entier $k \geqslant 2$, la question précédente et l'hypothèse de récurrence (H) donnent alors $|\lambda_k|\,\mathbb{P}(X=0) \leqslant (1-\mathbb{P}(X=0))\left(1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\right) \leqslant \dfrac{1-\mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(X=0)^{k-1}}$ (H′). En sommant (H) et (H′) divisée par $\mathbb{P}(X=0) > 0$, on a $1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \leqslant \dfrac{1}{\mathbb{P}(X=0)^{k-1}} + \dfrac{1-\mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(X=0)^{k}} = \dfrac{1}{\mathbb{P}(X=0)^{k}}$.

Par principe de récurrence, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \leqslant \dfrac{1}{\mathbb{P}(X=0)^{k}}.}$

6.4 Avec **6.2** et **6.3**, $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ |\lambda_k|\,\mathbb{P}(X=0)^k \leqslant \mathbb{P}(X=0)^k \displaystyle\sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \leqslant 1$ donc la suite $(\lambda_k\,\mathbb{P}(X=0)^k)$ est bornée.

Par définition du rayon de convergence, $\boxed{\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \lambda_k t^k \text{ est de rayon de convergence } \rho(X) \geqslant \mathbb{P}(X=0).}$

6.5 Si on note R_X le rayon de convergence de la série entière définissant G_X, et en supposant que $\rho(X) \leqslant R_X$ (peut-être peut-on le montrer avec les conditions de l'énoncé mais je ne vois pas comment), on a la relation $\forall t \in]-\rho(X);\rho(X)[\subset]-R_X;R_X[,\ G'_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,\mathbb{P}(X=n+1)t^k n$ car on peut dériver terme à terme les séries entières sur l'intervalle ouvert de convergence et aussi $H'_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\lambda_{n+1}t^n$.
Pour $t \in]-\rho(X);\rho(X)[$, les séries ci-dessus étant absolument convergentes, par produit de CAUCHY, on obtient $H'_X(t)G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n t^n$ avec $\mu_n = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\lambda_{k+1}\,\mathbb{P}(X=n-k)$. Le changement d'indice $j = k+1$ montre que $\mu_n = \sum_{j=1}^{n+1} j\lambda_j\,\mathbb{P}(X=n+1-j) = (n+1)\,\mathbb{P}(X=n+1)$ d'après la relation définissant la suite $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. On a finalement montré que $\forall t \in]-\rho(X);\rho(X)[,\ H'_X(t)G_X(t) = G'_X(t)$. On sait résoudre cette équation différentielle (E) : $y' = H'_X y$ vérifiée par G_X et il existe donc une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\forall t \in]-\rho(X);\rho(X)[,\ G_X(t) = c\exp(H_X(t))$. Comme $G_X(0) = \mathbb{P}(X=0)$ et $H_X(0) = \ln(\mathbb{P}(X=0))$, on en déduit que $c = 1$, puis que $\boxed{\forall t \in]-\rho(X);\rho(X)[,\ G_X(t) = \exp(H_X(t)).}$

6.6 Comme $(X+Y=0) = (X=0, Y=0)$ et que les variables aléatoires X, Y sont indépendantes, on obtient $\mathbb{P}(X+Y=0) = \mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0) \leqslant \mathrm{Min}(\mathbb{P}(X=0), \mathbb{P}(Y=0)) \leqslant \mathrm{Min}(\rho(X),\rho(Y))$. Pour un réel t tel que $|t| < \mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0)$, d'après la question **6.5**, comme $P(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0) \leqslant \rho(X+Y)$ d'après **6.4**, on a $G_{X+Y}(t) = \exp(H_{X+Y}(t)) = G_X(t)G_Y(t) = \exp(H_X(t)+H_Y(t))$ car X, Y sont indépendantes. Ainsi, par injectivité de exp, on a $H_{X+Y}(t) = H_X(t)+H_Y(t)$. Par unicité des coefficients d'un développement d'une série entière, les coefficients de H_{X+Y} sont la somme de ceux de H_X et de H_Y. On sait d'après le cours qu'on a alors $\rho(X+Y) \geqslant \mathrm{Min}(\rho(X),\rho(Y))$ et que la relation montrée sur $]-\mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0);\mathbb{P}(X=0)\,\mathbb{P}(Y=0)[$ est en fait valable pour $|t| < \mathrm{Min}(\rho(X),\rho(Y))$. Ainsi, $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ |t| < \mathrm{Min}(\rho(X),\rho(Y)) \Longrightarrow H_{X+Y}(t) = H_X(t)+H_Y(t).}$

PARTIE 7 : VARIABLES ENTIÈRES λ-POSITIVES

7.1 Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et d'après la question **6.1**, comme les λ_j sont positifs par hypothèse, on peut minorer et avoir $k\,\mathbb{P}(X=k) = \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j\,\mathbb{P}(X=k-j) = k\lambda_k\,\mathbb{P}(X=0) + \sum_{j=1}^{k-1} j\lambda_j\,\mathbb{P}(X=k-j) \geqslant k\lambda_k P(X=0)$ donc, comme $\mathbb{P}(X=0) > 0$, on a $\boxed{\lambda_k \leqslant \dfrac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X=0)}.}$ Comme la série $\sum_{k\geqslant 1} \dfrac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X=0)}$ converge (sa somme valant même $\dfrac{1-\mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(X=0)}$ car X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1$), par comparaison de séries à termes positifs, on peut conclure que la série $\boxed{\sum_{k\geqslant 1} \lambda_k \text{ converge.}}$

7.2 En particulier, le rayon de convergence $\rho(X)$ de $\sum_{k\geqslant 1} \lambda_k t^k$ vérifie $\rho(X) \geqslant 1$ car la série converge pour $t = 1$. Mieux, en notant $\nu_k : t \mapsto \lambda_k t^k$, on a $||\nu_k||_{\infty,[-1;1]} = \lambda_k$ donc, d'après **7.1**, $\sum_{k\geqslant 1} \nu_k$ converge normalement sur $[-1;1]$ ce qui assure la continuité de H_X sur $[-1;1]$ car toutes les fonctions ν_k y sont continues. De

même, d'après le cours, en notant $u_k : t \mapsto \mathbb{P}(X = k)t^k$, on a $||u_k||_{\infty,[-1;1]} = \mathbb{P}(X = k)$ et $\sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(X = k)$ converge donc $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge aussi normalement sur $[-1;1]$ donc G_X est continue sur $[-1;1]$ car toutes les u_k y sont aussi continues : c'est du cours ! La relation $G_X(t) = \exp(H_X(t))$ de la question **6** valable pour $t \in]-1;1[\subset]-\rho(X);\rho(X)[$ puisque $\rho(X) \geqslant 1$ peut donc être prolongée par continuité (aussi de la fonction exponentielle) à $[-1;1]$. On obtient donc $\boxed{\forall t \in [-1;1],\ G_X(t) = \exp(H_X(t)).}$

La relation, pour $t = 1$, donne $G_X(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1 = \exp(H_X(1)) = \exp\left(\ln(\mathbb{P}(X = 0)) + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k\right)$ donc $\ln(\mathbb{P}(X = 0)) + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k = \ln(1) = 0$ d'où $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k = -\ln(\mathbb{P}(X = 0)).}$

7.3 D'abord, par théorème de transfert, $\forall t \in \mathbb{R},\ G_{iX_i}(t) = \mathbb{E}(t^{iX_i}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_i = k)t^{ik} = G_{X_i}(t^i)$ (on sait que le rayon de convergence de la série définissant X_i suivant une loi de Poisson vaut $+\infty$. Posons $S_n = \sum_{i=1}^{n} iX_i$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Comme les variables aléatoires $X_1, 2X_2, \ldots, nX_n$ sont indépendantes, d'après le cours ou la question **1.2** avec récurrence, $G_{S_n} = \prod_{i=1}^{n} G_{iX_i} : t \mapsto \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i(t^i-1)} = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \times \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t^i\right)$.
On obtient la fonction génératrice de $S = \sum_{i=1}^{+\infty} iX_i$ sur $[-1;1]$ en passant à la limite (d'après la question **5.2.3**) et ainsi, d'après **7.2** et par définition de H_X, on a

$$\forall t \in [-1;1],\ G_S(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i\right) \times \exp\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i t^i\right) = \exp(H_X(t)) = G_X(t).$$

On conclut donc avec les questions **1.1** et **7.2** que $\boxed{X \sim S = \sum_{i=1}^{+\infty} iX_i.}$

PARTIE 8 : CARACTÉRISATION

On notera $S_n = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n}$ qui a la même loi que X. Les variables S et X n'étant pas forcément définies sur le même espace probabilisé, mais ayant même loi, on devrait noter $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}'(S_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$. Mais comme l'énoncé fait l'abus, comme en question **8.1.2**, *on notera $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$ en supposant toutes ces variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé.*

8.1.1 Comme la somme de quantités strictement négatives l'est encore, on a $\bigcap_{k=1}^{n} (X_{n,k} < 0) \subset (S_n < 0)$ d'où, par indépendance de $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$, on a $0 \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_{n,k} < 0)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_{n,k} < 0) \leqslant \mathbb{P}(S_n < 0) = 0$ car S_n est presque sûrement positive comme X. Ainsi, $\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_{n,k} < 0)$. Il existe donc un entier $k \in [\![1;n]\!]$ tel que $\mathbb{P}(X_{n,k} < 0) = 0$. Comme $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ ont la même loi, $\mathbb{P}(X_{n,1} < 0) = 0$ d'où $\mathbb{P}(X_{n,1} \geqslant 0) = 1$ ce qui montre que $\boxed{X_{n,1} \text{ est presque sûrement positive ou nulle.}}$

8.1.2 D'après **8.1.1**, on a $\mathbb{P}(X_{n,1} \geqslant 0, \ldots, X_{n,n} \geqslant 0) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_{n,k} \geqslant 0) = (\mathbb{P}(X_{n,1} \geqslant 0)^n = 1$ par indépendance de $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$. De plus, $\mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}(S_n = 0 | X_{n,1} \geqslant 0, \ldots, X_{n,n} \geqslant 0)\,\mathbb{P}(X_{n,1} \geqslant 0, \ldots, X_{n,n} \geqslant 0)$.

Ainsi, $\mathbb{P}(S_n = 0 | X_{n,1} \geqslant 0, \dots, X_{n,n} \geqslant 0) = \mathbb{P}(X_{n,1} = 0, \dots, X_{n,n} = 0) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_{n,k} = 0)$ par indépendance de $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ et car la somme de quantités positives est nulle si et seulement si elles sont toutes nulles. En conclusion, $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(S_n = 0) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_{n,k} = 0) = (\mathbb{P}(X_{n,1} = 0))^n$ car $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ suivent la même loi. Cette quantité étant non nulle, aucun des facteurs ne l'est et $\mathbb{P}(X_{n,1} = 0) > 0$.

Ainsi, on a bien établi que $\boxed{\text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } \mathbb{P}(X_{n,1} = 0) > 0.}$

8.1.3 L'événement $(X_{n,1} \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}, X_{n,2} = 0, \dots, X_{n,n} = 0) \subset (S_n \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N})$ est négligeable puisque S_n est presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{N}$ comme X. Par indépendance de $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$. On en déduit que $\mathbb{P}(X_{n,1} \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}) \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(X_{n,k} = 0) = 0$. Or, d'après **8.1.2**, on a $\mathbb{P}(X_{n,k} = 0) > 0$ donc $\mathbb{P}(X_{n,1} \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}) = 0$. Mais, comme $\mathbb{R} = \mathbb{R}_-^* \sqcup (\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}) \sqcup \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X_{n,1} \in \mathbb{R}_-^*) + \mathbb{P}(X_{n,1} \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}) + \mathbb{P}(X_1 \in \mathbb{N}) = 1$ car $X_{n,1}$ est réelle. Or d'après la question **8.1.1**, $\mathbb{P}(X_{n,1} \in \mathbb{R}_-^*) = 0$ donc $\mathbb{P}(X_{n,1} \in \mathbb{N}) = 1$ ce qui justifie, comme $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ suivent la même loi, que $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $\mathbb{P}(X_{n,i} \in \mathbb{N}) = 1$.

Par conséquent, les variables aléatoires $\boxed{X_{n,i} \text{ sont presque sûrement à valeurs dans } \mathbb{N}.}$

8.1.4 On a vu en question **8.1.2** que $\mathbb{P}(X_{n,1} = 0)^n = \mathbb{P}(X = 0)$ donc, comme $\mathbb{P}(X = 0) > 0$ par hypothèse, $\mathbb{P}(X_{n,1} = 0) = \sqrt[n]{\mathbb{P}(X = 0)} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(\mathbb{P}(X = 0)\right)\right)$ donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_{n,1} = 0) = e^0 = 1}$ car exp continue.

8.1.5 Soit $i \in \mathbb{N}^*$, comme $(X_{n,i} \in \{0, i\}) = (X_{n,1} = 0) \sqcup (X_{n,1} = i) \subset \Omega$, on a alors $\mathbb{P}(X_{n,1} = i) + \mathbb{P}(X_{n,1} = 0) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \mathbb{P}(X_{n,1} = i) \leqslant 1 - \mathbb{P}(X_{n,1} = 0)$. Par encadrement et **8.1.3**, $\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_{n,1} = i) = 0.}$

8.1.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, raisonnons à nouveau par récurrence en notant $T_k = \sum_{i=1}^{k} X_{n,i}$:

Initialisation : comme $X_{n,1}$ et $X_{n,2}$ ont même loi, $\alpha_n = \rho(X_{n,1}) = \rho(X_{n,2})$ et, avec la question **6.6**, on a $H_{X_{n,1}+X_{n,2}} = H_{X_{n,1}} + H_{X_{n,2}} = 2H_n$ sur $]-\alpha_n; \alpha_n[$ par indépendance de $X_{n,1}$ et $X_{n,2}$.

Hérédité : si on a établi que $H_{T_k} = kH_n$ sur $]-\alpha_n; \alpha_n[$ pour un entier $k \in [\![2; n-1]\!]$, par indépendance de $T_k = \sum_{i=1}^{k} X_{n,i}$ et $X_{n,k+1}$ par le lemme des coalitions, toujours d'après la question **6.6**, on a la relation $H_{T_{k+1}} = H_{T_k + X_{n,k+1}} = H_{T_k} + H_{X_{n,k+1}} = kH_n + H_n = (k+1)H_n$ sur $]-\alpha_n; \alpha_n[$.

Par principe de récurrence, $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $H_{T_k} = kH_n$. En particulier, pour $k = n$, on obtient, comme $X \sim T_n = \sum_{i=1}^{n} X_{n,i}$, $H_X = nH_n$. On a bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ nH_n = H_X.}$

8.1.7 Soit $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on peut identifier les coefficients des séries entières dans la question précédente pour avoir $n\lambda_k(X_{1,n}) = \lambda_k(X)$ où on note $\lambda_k(Y)$ le coefficient λ_k associé à la variable Y. Ainsi, par définition, on a

$$\boxed{\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j(X)\,\mathbb{P}(X_{n,1} = k-j) = \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j\,\mathbb{P}(X_{n,1} = k-j) = n\sum_{j=1}^{k} j\lambda_j(X_{1,n})\,\mathbb{P}(X_{n,1} = k-j) = nk\,\mathbb{P}(X_{n,1} = k).}$$

8.1.8 On fixe $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $j \in [\![1; k-1]\!]$, d'après la question **8.1.5**, on a $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_{n,1} = k-j) = 0$ alors que $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_{n,1} = 0) = 1$ d'après **8.1.4**. Le passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans la relation de la question **8.1.7** donne donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \to +\infty} n\,\mathbb{P}(X_{n,1} = k) = \lambda_k.}$

Les λ_k sont donc tous positifs comme limite de quantités positives et $\boxed{X \text{ est } \lambda\text{-positive}}$ par définition.

8.2.1 On vient de montrer au cours des huit dernières questions que si X est infiniment divisible, alors X est λ-positive, c'est-à-dire (i) $\Longrightarrow$ (ii). L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (ii) a été établie à la question **7.3** et l'implication (iii) $\Longrightarrow$ (i) a été montrée en question **5.3.3** avec le fait que si $X \sim Y$ et Y est infiniment divisible, alors X l'est aussi. On en déduit que $\boxed{\text{les assertions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes}}$ sous la condition que X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$.

8.2.2 Dans le cas d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}(X = 0) = 0$. Il existe un plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{P}(X = k) > 0$. La variable aléatoire $Y = X - k$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et vérifie $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = k) > 0$. De plus, $\boxed{X \text{ est infiniment divisible si et seulement si } Y \text{ l'est}}$ en posant, pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, les variables $X_{m,1} = Y_{m,1} + \frac{k}{m}, \ldots, X_{m,m} = Y_{m,m} + \frac{k}{m}$. On peut donc appliquer à Y le résultat de la question précédente pour caractériser le fait que X soit infiniment divisible.

8.2.3 Si X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, posons $Y = X - 1$ comme dans **8.2.2** car $\mathbb{P}(X = 1) > 0$. On a donc, par définition, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = k + 1) = p(1-p)^k$, la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ associée à Y est la suite des coefficients du développement en série entière $H_Y(t) = \ln(G_Y(t)) = \ln(p) - \ln(1 - (1-p)t)$ car $\forall t \in \left]-\frac{1}{1-p}; \frac{1}{1-p}\right[$, $G_Y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k)t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} p(1-p)^k t^k = \frac{p}{1-(1-p)t}$. Or on sait d'après le cours que si $|(1-p)t| < 1$, on a $H_Y(t) = \ln(p) - \ln(1-(1-p)t) = \ln(p) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^k t^k}{k}$ de sorte qu'en identifiant les coefficients du développement en série entière (par unicité), $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_k = \frac{(1-p)^k}{j} \geqslant 0$. Y est λ-positive donc infiniment divisible d'après **8.2.1** : $\boxed{X = Y - 1 \text{ est infiniment divisible}}$ d'après **8.2.2**.