ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 15
FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

1.1 Aspect C^1 ou C^2 d'une fonction

1.1 Soit $f(x,y) = \text{Arcsin}\left(\dfrac{1+xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\right)$ et $g(x,y) = \text{Arctan}\,x - \text{Arctan}\,y$.

a. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
b. Calculer les dérivées partielles premières de f et de g.
c. Simplifier f à l'aide de g.

1.2 Équations aux dérivées partielles

1.2 <u>*Centrale PSI 2013*</u> Soit les deux parties $D_1 = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $D_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application $\varphi : D_2 \to D_1$ définie par $\forall (u,v) \in D_2,\ \varphi(u,v) = (x,y) = \left(\dfrac{u^2+v^2}{2}, \dfrac{u}{v}\right)$.

a. Montrer que φ est de classe C^1 et bijective.
b. Résoudre dans D_1 l'équation $(E)\ :\ 2xy\dfrac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xf$ en posant $x = \dfrac{u^2+v^2}{2}$ et $y = \dfrac{u}{v}$.

1.3 <u>*Centrale PSI 2012*</u> On définit $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\right\}$ et $V = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u + 2v^2 > 0\right\}$.

a. Montrer que U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$, puis que $\varphi : U \to V$ définie par $\varphi(x,y) = (x^2 - 2xy - y^2, y)$ est un C^1-difféomorphisme.
b. Rechercher les applications $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ telles que $(E)\ :\ (x+y)\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) + (x-y)\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = (x-y)F(x,y)$.

1.4 <u>*Centrale PSI 2012*</u> Résoudre l'équation $(E)\ :\ 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 en effectuant un changement de variables de la forme $u = x + ay,\ v = x + by$.

1.3 Recherche d'extrema

1.5 <u>*Centrale PSI 2013*</u> Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ et $f : (x,y) \mapsto x^2 + 2y^2 - x$.

Justifier que f admet un maximum et un minimum sur D, puis calculer ces valeurs.

1.6 <u>*Centrale PSI 2013*</u> Soit $f : [0;1]^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}$ si $(x,y) \neq (1,1)$ et $f(1,1) = 0$.

a. Montrer que f est continue sur $[0;1]^2$.

Indication : on pourra comparer $(1-x)(1-y)$ et $(1-\sqrt{xy})^2$ si $(x,y) \in [0;1]^2$.

b. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sup_{(x,y)\in[0;1]^2} f(x,y)$.

1.7 Soit $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel. Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. On note A la matrice de f dans la base canonique.
a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ (f(x)|x) > 0$.
b. Soit $u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application définie par $g(x) = \frac{1}{2}(f(x)|x) - (u|x)$.

Montrer que g admet des dérivées partielles en tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ et les expliciter.
c. Montrer que g admet un unique point critique noté z.
d. Montrer que g admet un minimum absolu en z.

1.8 Centrale PSI 2012 Dans le plan euclidien orienté classique, on se donne un point O et deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ tangents extérieurement en O de rayons respectifs $R > 0$ et $R' > 0$.
a. On se donne deux points $M \in \mathcal{C}$ et $M' \in \mathcal{C}'$, paramétrer ces points par deux angles θ et θ' dans $[0\,;2\pi]$ de telle manière que pour $\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi$ (resp. $\theta' = 0$ ou $\theta' = 2\pi$) on ait $M = O$ (resp. $M' = O$) et exprimer l'aire du triangle OMM' en fonction de θ et θ'.
b. En déduire l'aire maximale de ces triangles OMM' en fonction de R et R'.

1.9 Centrale PSI 2012

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note les points $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(0,1)$. Pour tout point M dans le triangle plein ABC, on pose $f(M) = AM + BM + CM$.

a. Montrer que la fonction f admet un minimum dans le triangle plein ABC.

b. Calculer ce minimum de la fonction f dans le triangle plein ABC.

1.10 Centrale PSI 2012 Pour $a > 0$, on définit $S_a : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}_+^*$ par $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ S_a(x,y) = xy + \dfrac{2(x+y)a}{xy}$.
a. Déterminer en fonction de a l'unique point critique (x_0, y_0) de S_a dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Simplifier $S_a(x_0,y_0)$.
On définit la partie $K = \left\{ (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \;\middle|\; x \geqslant \frac{x_0}{3} \text{ et } y \geqslant \frac{y_0}{3} \text{ et } xy \leqslant 3x_0y_0 \right\}$ de $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
b. Point 1 : quelle est la "nature topologique" de K ? Montrer que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \setminus K,\ S_a(x,y) > S_a(x_0,y_0)$.
Point 2 : grâce à la concavité de la fonction $\ln$, justifier que $\forall (\alpha,\beta,\gamma) \in (\mathbb{R}_+^*)^3,\ \frac{1}{3}\Big(\alpha+\beta+\gamma\Big) \geqslant \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$.

Avec l'un ou l'autre de ces résultats, établir que S_a admet en (x_0,y_0) un minimum absolu.
c. Parmi les boîtes (parallélépipèdes rectangles de base rectangulaire de dimension x et y) sans couvercle (avec seulement le fond et les quatre faces latérales) de volume $V > 0$ fixé, quelles sont celles de surface minimale ? Vous donnerez la hauteur de la boîte optimale en fonction de la dimension du fond.

1.11 Centrale PSI 2012 Soit $f : (x,y) \mapsto (x-y)^3 + 6xy$. Prouver que f admet un minimum et un maximum sur $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\big\}$. Calculer explicitement ces valeurs.

1.12 Extrema locaux et globaux de $f(x,y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$.

1.4 Courbes et surfaces

1.13 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et S la surface définie par : $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = f(r,\theta)$. Déterminer pour tout point régulier de S, l'intersection de (Oz) et du plan tangent en ce point.

1.14 Déterminer les plans tangents aux points réguliers de la surface $S\ :\ z^3 = xy$ contenant la droite D déterminée par le système d'équations $x - 2 = y - 3(z+1) = 0$.

1.15 Soit S la surface d'équation $x^2+y^2+z^2-2xyz=1$.

a. Quels sont les points singuliers de S ?

b. Déterminer l'intersection de S et du plan d'équation $z=0$. Trouver une équation du plan tangent à S en chaque point de cette intersection.

1.16 Déterminer les plans tangents à $S\ :\ x^2+y^2+2z^2=1$ qui sont orthogonaux à la droite $D\ :\ x=\frac{y}{3}=-\frac{z}{2}$.

1.17 Soit S la surface d'équation $x^2+2y^2+3z^2=21$.

Déterminer les plans tangents à S et parallèles au plan P d'équation $x+4y+6z=0$.

1.18 *TPE PSI 2015*

Déterminer les plans tangents à $S\ :\ z^2=xy$ et contenant la droite d'équations $D\ :\ x=y=z$.

1.19 *Saint-Cyr PSI 2016* Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z)=\dfrac{\mathrm{Arctan}(xyz)}{1+(xyz)^2}-\dfrac{\pi}{8}$.

Donner l'équation du plan tangent en $(1,1,1)$ à la surface S définie par $f(x,y,z)=0$.

1.5 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

1.20 *Cachan PSI 2015* Guillaume Soustrade

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $f:(\mathbb{R}_+^*)^n\to\mathbb{R}$ définie par $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\ln(x_k)$.

Soit $\lambda>0$ et $A_\lambda=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n\ \middle|\ \forall k\in[\![1;n]\!],\ x_1+\cdots+x_n=n\lambda\right\}$, $M_\lambda=\operatorname*{Sup}\limits_{A_\lambda}f$ et $m_\lambda=\operatorname*{Inf}\limits_{A_\lambda}f$.

a. Déterminer M_λ et m_λ pour $n=2$ puis pour $n=3$.

b. Déterminer alors M_λ et m_λ pour n quelconque.

1.21 *Centrale Maths1 PSI 2015* Alberto Alonso

a. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^1 et $a>0$ tels que $\forall t\geqslant 0,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(tx,ty)=t^af(x,y)$.
Montrer que f vérifie l'équation aux dérivées partielles : $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=af$.

b. Réciproquement, soit f vérifiant pour un réel $a>0$ l'équation $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=af$ sur $\mathbb{R}^2$, montrer que $\forall t\geqslant 0,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(tx,ty)=t^af(x,y)$.

c. Trouver les fonctions de classe C^1 sur $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ vérifiant $(E)\ :\ x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=\sqrt{x^4+y^4}$.

1.22 *Mines PSI 2015* Alberto Alonso

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=y^2\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$ si $y\neq 0$ et $f(x,0)=0$.

a. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

b. Donner les dérivées partielles de f lorsque c'est possible.

c. Étudier la continuité des dérivées partielles.

1.23 *E3A PSI 2015* Florie Montpezat

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$.

a. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

b. f admet-elle un extremum au point $(0,0)$?

c. f admet-elle des extrema sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

1.24 *Petites Mines PSI 2015* Patxi Teillagorry

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $g(x,x) = f(x)$ et $g(x,y) = \dfrac{1}{y-x}\displaystyle\int_x^y f(t)dt$ si $x \neq y$.
On pose $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$.

a. Exemple, prendre $f(x) = x^2$. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
b. Montrer que g est de classe C^1 sur D et calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}$.
c. Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que g admet une dérivée partielle en (a,a) selon x et selon y. Les calculer.
d. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

1.25 *ENS Cachan PSI 2016* Samuel Cailleaux

Soit A, B deux évènements d'un univers probabilisé Ω et l'inégalité $\big|P(A\cap B) - P(A)P(B)\big| \leqslant \dfrac{1}{4}$ (1).

a. Démontrer (1) dans le cas où $A \cup B = \Omega$ et A et B incompatibles.

b. Démontrer (1) si A et B sont incompatibles uniquement.

Soit $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y,z) = x(1-x-y-z) - yz$, la partie $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^3 \mid x+y+z \leqslant 1\}$ et F la frontière de K.

c. Dessiner F. Encadrer de façon optimale h sur F.

d. Prouver que $|h(x,y,z)| \leqslant \dfrac{1}{4}$ pour $(x,y,z) \in K$.

e. Démontrer (1) dans le cas général.

1.26 *Centrale Maths1 PSI 2016* Samy Essabar

a. Soit $f \in C^1((\mathbb{R}_+^*)^2, \mathbb{R})$ et $(x_0,y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0)$.

Montrer que (x_0,y_0) est un point critique de f.

Pour $a > 0$, on définit $S_a : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}_+^*$ par $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ S_a(x,y) = xy + \dfrac{2(x+y)a}{xy}$.

b. Montrer que S_a admet un unique point critique noté (x_0,y_0).

Soit $K = \left\{ (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \;\middle|\; x \geqslant \dfrac{x_0}{3} \text{ et } y \geqslant \dfrac{y_0}{3} \text{ et } xy \leqslant 3x_0y_0 \right\}$.

c. Représenter K. Montrer que S_a admet un minimum sur K. Montrer que c'est un minimum sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

d. Parmi les boîtes (parallélépipèdes rectangles de base rectangulaire de dimension x et y) sans couvercle (avec seulement le fond et les quatre faces latérales) de volume $V > 0$ fixé, quelles sont celles de surface minimale ? Vous donnerez la hauteur de la boîte optimale en fonction de la dimension du fond.

1.27 *Mines PSI 2016* Sylvin Bielle I

On note $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Soit $p \in \mathbb{R}$ et $g \in C^2(U, \mathbb{R})$.

Trouver les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telles que $\forall (x,y) \in U,\ g(x,y) = f(x^2+y^2)$ sachant que l'on suppose $\forall (x,y) \in U,\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = (x^2+y^2)^p$.

1.28 *Mines PSI 2016* Alexandre Janot I

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on définit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = \dfrac{ax}{y} + \dfrac{by}{x}$. Étudier les extrema de f.

1.29 *CCP PSI 2016* Arthur Robbe I

Soit Σ la surface définie par $xyz = 1$.

a. Montrer que Σ est une surface régulière.

b. Montrer que les trois intersections I, J, K d'un plan tangent à Σ avec les droites de coordonnées (Ox), (Oy) et (Oz) délimite un tétraèdre $OIJK$ de volume constant. Indication : on rappelle le volume d'un tétraèdre $ABCD$ vaut $V = \dfrac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|$.

1.30 *ENS Cachan PSI 2017* Thomas Laborde

Soit $u \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\lim_{||x|| \to +\infty} \frac{|u(x)|}{||x||} = +\infty$. On pose $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| < r\}$ pour $r > 0$.

a. Cas $n = 1$: ∇u est-il surjectif ?

Pour la suite, on prend $n = 2$ et on suppose que ∇u n'est pas surjectif.

b. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^2$ tel que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = u(x) - (x|v)$ soit de classe C^1, que ∇f ne s'annule pas, et que $\displaystyle\lim_{||x|| \to +\infty} \frac{|f(x)|}{||x||} = +\infty$.

c. Soit $r > 0$ et $(a,b) \in (\mathbb{R}^2 \setminus B_r)^2$, montrer qu'il existe $\gamma : [0;1] \to (\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$ telle que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$.

En déduire que $f(\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$ est un intervalle.

d. Conclure.

1.31 *Centrale Maths1 PSI 2017* Corentin Gatellier et Valentin Gorce

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$. On pose $A = [-2;2]^2$.

a. La fonction f admet-elle des extrema sur A ?

b. Quels sont les points susceptibles d'être des extrema locaux de f sur A ?

c. Comparer $f(x,x)$ et $f(x,-x)$. Conclure quant à l'un des trois points.

d. Les autres peuvent-ils être des maxima ? Des minima ?

e. Trouver les extrema de f sur A (coordonnées et valeurs).

1.32 *Mines PSI 2017* Vincent Bouget III et Vincent Meslier II

Soit $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $H(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $H(0,0) = 0$.

La fonction H est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

1.33 *X PSI 2018* Victor Bourdeaud'hui

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, g dérivable sur $[0;T]$ telle que $\forall t \geqslant [0;T],\ g'(t) \leqslant \lambda g(t)$.

a. Majorer $g(t)$ pour $t \in [0;T]$.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) > 0$ et $\mathrm{Tr}\ (A)^2 > 4\det(A)$.

b. On admet que si $\lim\limits_{t\to+\infty} ||Y(t)|| = +\infty$ et P inversible, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} ||X(t)|| = +\infty$ si $X(t) = PY(t)$.

Comportement quand t tend vers $+\infty$ des solutions de l'équation différentielle $X' = AX$?

Soit f_1 et f_2 deux fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $f = (f_1, f_2)$ telle que $f(0,0) = (0,0)$. On pose $J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(0,0) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ (jacobienne de f en $(0,0)$).

c. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 telle que $y' = f(y)$. Montrer que si $y(0)$ est assez petit (en norme bien sûr), alors $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = (0,0)$ (on dit que $(0,0)$ est un point fixe attractif pour ce système différentiel).

1.34 *Mines PSI 2018* Alexandre Morisse II

Pour des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2, résoudre les équations suivantes :

$$(1)\ :\ \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad (2)\ :\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad (3)\ :\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

1.35 *CCP PSI 2018* Charlotte Nivelle I

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 y + \ln(4 + y^2)$.

a. Montrer que f admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$.

b. On définit $e(x) = f(x, x^3) - f(0,0)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Trouver un équivalent simple de $e(x)$ en 0.

c. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$?

1.36 *E3A PSI 2018* Marion Lebrun

On note $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$ et $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y < \pi\}$.

a. Dessiner K et T.

Soit $F : K \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,y) = y(\pi - x)$ si $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \pi$ et $F(x,y) = x(\pi - y)$ si $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi$.

b. Montrer que F est continue sur K.

c. F admet-elle des extrema locaux sur T, si oui lesquels ?

d. F admet-elle un minimum sur K ? Un maximum ? Si oui, déterminer leurs valeurs.

1.37 *Centrale Maths1 PSI 2019* Victor Margueritte

Dans $\mathbb{R}^2$, soit D le disque fermé de centre O et de rayon 1 (disque fermé unité). On définit $f : D \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = -(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^2 + y^2) + 1$ et $F : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,y,z) = f(x,y) - z$.

a. Calculer le gradient de F.

b. Soit $S = \{(x,y,z) \in D \times \mathbb{R} \mid z = f(x,y)\}$ la surface représentative de f. Déterminer les points $(x,y) \in D$ où le plan tangent à S en (x,y,z) est normal au vecteur $\vec{v} = (0,1,-1)$.

c. Soit $\gamma : t \mapsto (t,t)$ et $g = f \circ \gamma$. Donner l'ensemble de définition de g, calculer g' par la règle de la chaîne. En déduire les extrema de la fonction g sur son ensemble de définition.

1.38 *CCP PSI 2019* Jon Biran I et Mathis Chénet I

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

a. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

b. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

c. Est-ce que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existe sur $\mathbb{R}^2$?

1.39 *CCP PSI 2019* Perrine Hoffmann et Quentin Vacher I

Soit $f : (x,y) \mapsto x^3 y^2 (1 - x - y)$.

a. Trouver les points critiques de f.

b. Étudier les extrema locaux de f. Admet-elle des extrema absolus ?

1.40 *ENS Cachan PSI 2021* Julien Gombert et Quentin Granier

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et une fonction $\varphi : [a;b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\forall x \in [a;b]$, $\nu(x) = (x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in U$. Soit aussi une fonction $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $g(a) = g(b) = 0$. On pose, pour un réel t et $x \in [a;b]$, $\varphi_t(x) = \varphi(x) + t g(x)$ et $\nu_t(x) = (x, \varphi_t(x), \varphi_t'(x))$. On pose aussi $I_{\varphi_t} = \displaystyle\int_a^b f(\nu_t(x))dx$.

a. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in [-\alpha; \alpha]$, $\nu_t(x) \in U$.

b. Montrer que $h : t \mapsto I_{\varphi_t}$ est dérivable en 0 et que $h'(0) = \displaystyle\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\nu(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(\nu(x))\right)\right] g(x)dx$.

c. On suppose que pour toute $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses précédentes, l'application $h : t \mapsto I_{\varphi_t}$ admet un extremum local en 0. Montrer que φ est solution d'une équation différentielle à déterminer.

1.41 *Centrale Maths1 PSI 2021* Julie Coheleach

Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ la base orthonormée directe canonique dan $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté canonique.

Soit S la surface d'équation $z = g(x,y)$ avec $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

On considère aussi l'équation aux dérivées partielles (E) : $2\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$.

On dit que $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifie la propriété (P) si, au niveau des points réguliers de S, la normale à la surface S est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour qu'elle vérifie la propriété (P).

b. Montrer que $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x,y) = (x - 2y, y)$ est inversible et donner son inverse ψ.

c. Pour $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on pose $h = g \circ \psi$. Montrer que h est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.

d. Résoudre (E).

1.42 *Mines PSI 2021* Antoine Faivre-Duboz I

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \dfrac{1}{y - x}\displaystyle\int_x^y f(t)dt$ si $x \neq y$ et $g(x,x) = f(x)$.

On définit aussi la partie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que g est de classe C^1 sur D et donner ses dérivées partielles.

b. Montrer que g admet des dérivées partielles d'ordre 1 au point (a,a) et que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(a,a) = \dfrac{f'(a)}{2}$.

c. Montrer que $\forall (x,y) \in D$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a) = \dfrac{1}{(y-x)^2}\displaystyle\int_x^y (y-t)\big(f'(t) - f'(a)\big)dt$.

d. En déduire que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

1.43 *Mines PSI 2021* Baptiste Pozzobon II

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

c. Calculer les dérivées partielles seconde de f en $(0,0)$.

d. Qu'en déduire sur la fonction f ?

1.44 *ENS Cachan PSI 2022* Olivier Baesen et Thibault Le Gal et Antoine Prévost

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible ($A \in S_n(\mathbb{R})$).

On définit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$ par $\Phi(M) = M^T AM$.

a. Montrer que Φ, vue comme une application de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, est de classe C^1.

b. Rappeler la définition de la différentielle.

c. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $d_{I_n}\Phi$ la différentielle de Φ en I_n.

- Montrer que $\Phi(I_n + H) - \Phi(I_n) = H^T A + AH + H^T AH$.
- En déduire que $d_{I_n}\Phi(H) = H^T A + AH$.
- Déterminer le noyau et l'image de $d_{I_n}\Phi$.

d. Montrer que $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM \in S_n(\mathbb{R})\}$ et $\mathrm{Ker}(d_{I_n}\Phi)$ sont supplémentaires.

e. Montrer qu'il existe un ouvert U contenant I_n tel que $U \subset GL_n(\mathbb{R})$.

1.45 *Centrale Maths1 PSI 2022* Maxence Rossignol

Soit la fonction $K : [0;1]^2 \to \mathbb{R}$ définie par $K(x,y) = x(1-y)$ si $x \leqslant y$ et $K(x,y) = y(1-x)$ sinon.

a. Montrer que K est continue sur $[0;1]^2$ et à valeurs dans $\left[0;\dfrac{1}{4}\right]$.

b. Si $(x_0,y_0) \in [0;1]^2$ et $x_0 < y_0$, déterminer une équation du plan tangent P à la surface S d'équation $z = K(x,y)$ en le point $M_0 = (x_0,y_0,z_0)$. Donner aussi un vecteur non nul normal à P.

1.46 *Mines PSI 2022* Jimmy Guertin I

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$.

On définit la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $F(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2}\,dt$.

a. Montrer l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Trouver une relation entre I_{n+2} et I_n pour $n \in \mathbb{N}$.

c. Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer I_{2p+1} et I_{2p} en admettant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$.

d. Calculer $F(x,y)$. Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

e. Déterminer les points critiques de F, puis ses éventuels extrema.

1.47 *Centrale Maths1 PSI 2023* Alban Dujardin II

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que f admette un minimum local en (x_0,y_0).

Déterminer le signe du laplacien $\Delta f(x_0,y_0)$.

1.48 *Centrale Maths1 PSI 2023* Tom Graciet et Chloé Vagner

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $f(x_1, \cdots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$.

a. Trouver les points critiques de f_n.

b. On note a_n le point critique dont les coordonnées sont toutes strictement positives. Montrer que f_n admet un extremum local en a_n.

c. Que se passe-t-il en les autres points critiques ?

d. Montrer que $\lim\limits_{||x||_2 \to +\infty} f(x) = 0$.

e. Montrer que f admet en a_n un maximum global.

1.49 *Mines PSI 2023* Bader Ben Amira II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = f(||x||)$.

On suppose que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2 F}{\partial {x_k}^2} = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Déterminer f.

1.50 *Mines PSI 2023* Rebecca Blé II

Soit $\Omega = (\mathbb{R}_+^*)^2$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 + \dfrac{a}{xy}$.

a. Montrer que f est de classe C^1 sur Ω.

b. Calculer le gradient de f en tout point de Ω.

c. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $(0, 0)$?

d. Étudier les extrema de f.

1.51 *CCINP PSI 2023* Maddie Bisch II

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

a. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

b. Calculer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.

c. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

d. Calculer les dérivées partielles seconde de f en $(0, 0)$. Qu'en déduire sur la fonction f ?

1.52 *Centrale Maths1 PSI 2024* Edward Bauduin

Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

a. Donner l'équation du plan tangent à $S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ et } z = f(x, y)\big\}$ en $(a, b, c) \in S$.

b. Montrer que f admet un minimum local en un unique point $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ à déterminer.

c. Montrer que $K = \left\{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid xy \leqslant 3 \text{ et } x \geqslant \dfrac{1}{3} \text{ et } y \geqslant \dfrac{1}{3}\right\}$ est un fermée borné de $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

d. En déduire que f admet en (x_0, y_0) un minimum absolu.

1.53 *Centrale Maths1 PSI 2024* Amjad Belmiloud

Soit les ensembles $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 8\}$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leqslant 8\}$. Soit les fonctions $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $\Phi(t) = \big(2\sqrt{2}\cos(t), 2\sin(t)\big)$ et $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2} + x^2$.

a. Montrer que Φ réalise une bijection de classe C^1 de $[0; 2\pi[$ dans $\mathcal{E}$.

b. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur Δ.

c. Déterminer $\underset{\Delta}{\mathrm{Min}}(f)$. Montrer que le maximum de f sur Δ est atteint sur $\mathcal{E}$.

d. Trouver la valeur de $\underset{\Delta}{\mathrm{Max}}(f)$.

1.54 *Centrale Maths1 PSI 2024* Lou Goiffon et Tom Sanchez

Soit $H = [-1;1] \times [0;1]$, $O =]-1;1[\times]0;1[$ et $f : H \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sqrt{y - yx^2}\,(x - xy)$.

a. Montrer que f admet un minimum et un maximum sur H.

b. Trouver les extrema de f sur O.

c. Calculer la valeur du maximum global de f sur H.

1.55 *Centrale Maths1 PSI 2024* Martin Mayot

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 1$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = (x^2+y^2)^x$.

a. Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

c. Trouver les points critiques de f.

d. Déterminer les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.

1.56 *Mines PSI 2024* Martin Mayot II

Soit un entier $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} \dfrac{f(x)}{||x||} = +\infty$.

a. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.

b. Montrer que l'application $x \mapsto \nabla f(x)$ est surjective.

1.6 Officiel de la Taupe

1.57 *OdlT 2012/2013 Mines PSI planche 177 II*

Extrema éventuels de $f(x,y) = \sqrt{x^2+(1-y)^2} + \sqrt{y^2+(1-x)^2}$. Peut-on généraliser ?

1.58 *OdlT 2012/2013 ENTPE/EIVP PSI planche 247 I*

Montrer que $f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x}\right)$ est un C^1-difféomorphisme de $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et déterminer f^{-1}.

1.59 *OdlT 2013/2014 X-Cachan PSI planche 71*

Soit $h(x,y,z) = xyz + xy + zy$; à quelles conditions sur x, y, z, la matrice hessienne associée à h a-t-elle des valeurs propres positives ? Montrer que la matrice hessienne de f, de classe C^2 de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, ayant un minimum local en $X_0 = (x,y,z)$, a ses valeurs propres positives. Montrer que h n'a pas de minimum local.

1.60 *OdlT 2013/2014 Mines PSI planche 195 I*

Résoudre l'équation $(E)\ :\ x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - f(x,y) = -(x^2+y^2)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Indication : on pourra passer en coordonnées polaires.

1.61 *OdlT 2014/2015 Mines PSI planche 174 I*

Extrema de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

1.62 *OdlT 2014/2015 Centrale PSI planche 238 I*

Soit a, b, c trois réels positifs tels que $a+b+c = \dfrac{\pi}{2}$. Montrer que $\sin(a)\sin(b)\sin(c) \leqslant \dfrac{1}{8}$.

1.63 *OdlT 2014/2015 CCP PSI planche 284 II*

La fonction $f : (x, y) \mapsto xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$ admet-elle des extrema locaux sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$?

1.64 *OdlT 2015/2016 Mines PSI planche 132III*

On pose $H(0,0) = 0$ et $H(x, y) = \dfrac{x^4 y}{x^2 + y^2}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$; H est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

1.65 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 240I*

Trouver l'extremum de $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 5x - y$.

1.66 *OdlT 2015/2016 CCP PSI planche 241I*

Extrema globaux puis locaux de $f(x, y) = x^4 y^3 + \ln(1 + y^4)$ sur $[-1; 1]^2$.

1.67 *OdlT 2015/2016 ENSAM PSI planche 271II*

Prouver que $f(x, y) = x \ln y - y \ln x$ admet un point critique et le calculer.

1.68 *OdlT 2015/2016 ENTPE-EIVP planche 278II*

Extrema de $f(x, y) = xy\sqrt{1 - x - y}$ sur $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid 1 - x - y \geqslant 0\}$.

1.69 *OdlT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 34*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$ où $k \in \mathbb{N}^*$ et aussi $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = kf(x, y)$.

Montrer aussi que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = k(k-1)f(x, y)$.

On pose $h(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$; montrer que $h'' + k^2 h = 0$ et en déduire que f est polynomiale en x et y.
Trouver toutes les fonctions f dans le cas où $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et $k \geqslant 1$.

1.70 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 106I*

On note $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On donne $p \in \mathbb{R}$ et $g \in C^2(U, \mathbb{R})$. Trouver les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ vérifiant $\forall (x, y) \in U$, $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$, sachant que $\forall (x, y) \in U$, $\Delta g(x, y) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = (x^2 + y^2)^p$.

1.71 *OdlT 2016/2017 Mines PSI planche 119II*

H, définie par $H(0, 0) = 0$ et $H(x, y) = \dfrac{x^4 y}{(x^4 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

1.72 *OdlT 2016/2017 Centrale PSI planche 169*

Montrer que la série de fonctions $u_n(t) = \dfrac{1}{n^2} e^{-nt}$ converge simplement ; on note S sa somme.

Montrer que $f(x, y) = S(x^2 + y^2)$ est continue et qu'elle admet des dérivées partielles d'ordre 1.
Montrer que f est C^1 et que son gradient est colinéaire à $\binom{x}{y}$; interpréter géométriquement cette propriété.
Soit γ un arc régulier C^1 et 1-périodique ; montrer que la restriction de f à $K = \gamma(\mathbb{R})$ atteint son minimum.

1.73 *OdlT 2017/2018 CCP PSI planche 212I et compléments CCP PSI planche 446I*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 y + \ln(4 + y^2)$.
a. Montrer que f admet un unique point critique sur $\mathbb{R}^2$.
b. On définit $e(x) = f(x, x^3) - f(0, 0)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Trouver un équivalent simple de $e(x)$ en 0.
c. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$?