SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 15 FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

1.1 Aspect C^1 ou C^2 d'une fonction

1.1 **a.** $-1 \leqslant \dfrac{1+xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}} \leqslant 1 \iff (1+xy)^2 \leqslant (1+x^2)(1+y^2)$ car $2xy \leqslant x^2+y^2$ (clair).

b. Après des calculs assez sympathiques, on trouve : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{1+x^2}$ si $y > x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{1}{1+x^2}$ si $y < x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{1}{1+y^2}$ si $y > x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{1+y^2}$ si $y < x$.

c. Sur l'ouvert convexe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}$, on a $\overrightarrow{\text{grad}}(f-g) = \overrightarrow{0}$ donc $f-g$ est constante et vaut $(f-g)(0,1) = \dfrac{\pi}{2}$. De même sur l'ouvert convexe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\}$, on a $\overrightarrow{\text{grad}}(f+g) = \overrightarrow{0}$ donc $f+g$ est constante et vaut $(f+g)(1,0) = \dfrac{\pi}{2}$. Comme pour $x = y$ on a $f(x,y) = \dfrac{\pi}{2}$ et $g(x,y) = 0$, il vient :

Pour $y \geqslant x$, on a $f(x,y) = \dfrac{\pi}{2} + g(x,y)$ et pour $y \leqslant x$: $f(x,y) = \dfrac{\pi}{2} - g(x,y)$.

1.2 Équations aux dérivées partielles

1.2 **a.** φ est bien définie et de classe C^1 par opérations sur D_2. De plus, pour $(x,y) \in D_1$ et $(u,v) \in D_2$, $\varphi(u,v) = (x,y) \iff \big(u^2+v^2 = 2x,\ u = vy\big) \iff \big(v^2y^2+v^2 = 2x,\ u = vy\big) \iff u = y\sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}},\ v = \sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}$ car $v > 0$ donc φ est bijective et φ^{-1} est clairement de classe C^1 toujours par opérations.

b. Si $f : D_1 \to \mathbb{R}$ est une solution C^1, posons $g = f \circ \varphi \iff \forall (u,v) \in D_2,\ g(u,v) = f(x,y) = f\Big(\dfrac{u^2+v^2}{2}, \dfrac{u}{v}\Big)$ ou encore $\forall (x,y) \in D_1,\ f(x,y) = g(u,v) = g\Big(y\sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}, \sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}\Big)$. Alors g est C^1 par composition. Comme $\forall (x,y) \in D_1,\ 2xy\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + (1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xf(x,y)$, comme φ est une bijection de D_2 sur D_1, cela donne : $\forall (u,v) \in D_2,\ \dfrac{u(u^2+v^2)}{v}\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \dfrac{u^2+v^2}{v^2}\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)) = (u^2+v^2)f(\varphi(u,v))$ ce qui s'écrit encore :

$\forall (u,v) \in D_2,\ \dfrac{(u^2+v^2)}{v}\Big[u\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))\Big] = (u^2+v^2)f(\varphi(u,v))$.

Mais : $\forall (u,v) \in D_2,\ \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)) = u\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))$ donc $\forall (u,v) \in D_2,\ \dfrac{\partial g}{\partial u} = vf(\varphi(u,v)) = vg(u,v)$ (équation différentielle linéaire en la variable u) .

Comme g est de classe C^1, il existe $\psi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall (u,v) \in D_2,\ g(u,v) = \psi(v)e^{uv}$. Ainsi, $\forall (x,y) \in D_1,\ f(x,y) = \psi\Big(\sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}\Big)\exp\Big(\dfrac{2xy}{1+y^2}\Big) = \theta\Big(\dfrac{2x}{1+y^2}\Big)\exp\Big(\dfrac{2xy}{1+y^2}\Big)$ en ayant posé la fonction $\theta = \psi \circ \sqrt{\ }$ qui, par composition, est elle aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Réciproquement, si f est de cette forme, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \Big[\dfrac{2}{1+y^2}\theta'\Big(\dfrac{2x}{1+y^2}\Big) + \dfrac{2y}{1+y^2}\theta\Big(\dfrac{2x}{1+y^2}\Big)\Big]\exp\Big(\dfrac{2xy}{1+y^2}\Big)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \Big[\dfrac{-4xy}{(1+y^2)^2}\theta'\Big(\dfrac{2x}{1+y^2}\Big) + \dfrac{2x(1-y^2)}{(1+y^2)^2}\theta\Big(\dfrac{2x}{1+y^2}\Big)\Big]\exp\Big(\dfrac{2xy}{1+y^2}\Big)$ pour $(x,y) \in D_1$. Ainsi, f de classe C^1 sur D_1 par opérations et si on reporte dans l'équation aux dérivées partielles (E), on a bien (après simplifications) $\forall (x,y) \in D_1,\ 2xy\dfrac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xf$.

En conclusion, par analyse-synthèse, les solutions de (E) sur D_1 sont les fonctions $f : D_1 \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une fonction $\theta : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall (x,y) \in D_1,\ f(x,y) = \theta\Big(\dfrac{2x}{1+y^2}\Big)\, exp\,\Big(\dfrac{2xy}{1+y^2}\Big)$.

1.3 **a.** $U = \psi^{-1}(]0;+\infty[)$ est ouvert comme image réciproque d'un ouvert par $\psi : (x,y) \mapsto y - x$ qui est continue. De même V est ouvert. De plus, par théorèmes généraux φ est de classe C^1 et bijective avec $\varphi^{-1}(u,v) = (v - \sqrt{u+2v^2}, v)$ et φ^{-1} est bien de classe C^1 : φ est un C^1-difféomorphisme.
b. Soit $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $G = F \circ \varphi^{-1}$ qui est aussi de classe C^2 car la fonction φ est en fait un C^∞-difféomorphisme. Alors, en appliquant la formule de la chaîne : $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial G}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2(x-y)\dfrac{\partial G}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial G}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial G}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = -2(x+y)\dfrac{\partial G}{\partial u} + \dfrac{\partial G}{\partial v}$. Ainsi : F est solution de (E) sur U est équivalent à G solution de (F) : $\dfrac{\partial G}{\partial v} = G$ sur V.
On résout ceci en fixant u et en travaillant à $u + 2v^2 > 0$:
- si $u > 0$, $v \mapsto \dfrac{\partial G}{\partial v}(u,v)$ est définie sur $\mathbb{R}$, il existe $C(u)$ tel que $\forall v \in \mathbb{R},\ G(u,v) = C(u)e^v$.
- si $u \leqslant 0$, $v \mapsto \dfrac{\partial G}{\partial v}(u,v)$ est définie sur $I_1 \cup I_2$ avec $I_1 =]-\infty; -\sqrt{-u/2}[$ et $I_2 =]-\sqrt{u/2}; +\infty[$, donc il existe $C_1(u)$ et $C_2(u)$ tels que $\forall v \in I_1,\ G(u,v) = C_1(u)e^v$ et $\forall v \in I_2,\ G(u,v) = C_2(u)e^v$.

Le fait que G, donc F, est de classe C^1 revient à l'aspect C^1 de $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $\varphi_1(u) = C_1(u)$ si $u \leqslant 0$ et $\varphi_1(u) = C(u)$ si $u > 0$ et $\varphi_2(u) = C_2(u)$ si $u \leqslant 0$ et $\varphi_2(u) = C(u)$ si $u > 0$.

1.4 L'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x,y) = (x + ay, x + by)$ est un C^∞-difféomorphisme car c'est même un isomorphisme si son déterminant $b - a$ est non nul. On suppose donc $a \neq b$ dans la suite.
Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2, on pose $g = f \circ \varphi^{-1} \iff f = g \circ \varphi$, alors on dérive et $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = a\dfrac{\partial g}{\partial u} + b\dfrac{\partial g}{\partial v}$. On continue : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = a\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (a+b)\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + b\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = a^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2ab\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + b^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$. En remplaçant dans l'équation : f solution de $(E) \iff g$ solution de $(2-3a-2a^2)\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (4 - 3(a+b) - 4ab)\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + (2 - 3b - 2b^2)\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$. Pour que cela se simplifie, il suffit d'avoir $2 - 3a - 2a^2 = 2 - 3b - 2b^2 = 0$ ce qui revient à prendre $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = -2$ par exemple. Il vient donc $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$ donc $g(u,v) = h_1(u) + h_2(v)$ avec h_1 et h_2 de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de (E) sont les f telles que $f(x,y) = h_1\Big(x + \dfrac{y}{2}\Big) + h_2(x - 2y)$ avec h_1 et h_2 de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

1.3 Recherche d'extrema

1.5 • D est la boule unité fermée pour la norme 2 donc c'est un compact.
• Si l'aspect borné est clair, on peut aussi vérifier que D est fermé en posant $g : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ qui est continue car polynomiale et on a $D = g^{-1}(]-\infty; 1])$ donc D est fermé en tant qu'image réciproque par une application continue d'un fermé de $\mathbb{R}$.
Ainsi f est continue (car polynomiale) sur les compact D donc elle est bornée et y atteint ses bornes.
Points critiques : on résout $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 = 0 = 4y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ ce qui donne l'unique point critique $A\Big(\dfrac{1}{2}, 0\Big)$.
Or $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2,\ f\Big(\dfrac{1}{2} + h, k\Big) - f\Big(\dfrac{1}{2}, 0\Big) = \dfrac{1}{4} + h + h^2 + 2k^2 - \dfrac{1}{2} - h + \dfrac{1}{4} = h^2 + 2k^2 \geqslant 0$ donc f admet en A un minimum absolu sur D (et même sur $\mathbb{R}^2$).
f ne peut donc admettre son maximum absolu sur D qu'en un point du bord de D (sinon ce serait un point critique ce qui est absurde), on paramètre donc le bord de D qui est le cercle unité par $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$ et on étudie la fonction $h : t \mapsto f(\cos(t), \sin(t)) = 1 + \sin^2(t) - \cos(t)$ sur $\mathbb{R}$. Comme h est 2π-périodique et vérifie $h(2\pi - t) = h(t)$, on peut chercher le maximum de h sur $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $[0;\pi]$.
Or $h'(t) = \sin(t)\big(2\cos(t) + 1\big)$ ne s'annule sur $[0;\pi]$ qu'en $t = 0$, $t = \dfrac{2\pi}{3}$ et $t = \pi$.

Comme $h(0)=0$, $h\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{9}{4}$ et $h(\pi)=2$, le maximum de h sur $\mathbb{R}$ vaut donc $\frac{9}{4}$.
Par conséquent : $\underset{D}{\mathrm{Min}}\, f=-\frac{1}{4}$ et $\underset{D}{\mathrm{Max}}\, f=\frac{9}{4}$.

1.6 **a.** Par théorèmes généraux, f est de classe C^∞ sur $[0;1]^2\setminus\{(1,1)\}$ car le seul point de $[0;1]^2$ en lequel $1-xy$ s'annule est le point $(1,1)$: en effet, si $(x,y)\in[0;1)^2$ et $(x,y)\neq(1,1)$, alors $0\leqslant x\leqslant 1$ et $0\leqslant y\leqslant 1$ avec $x<1$ ou $y<1$ donc $xy<1$.
Comme $\forall (x,y)\in[0;1]^2$, $(1-x)(1-y)1-x-y+xy\leqslant 1-2\sqrt{xy}+xy=(1-\sqrt{xy})^2 \iff (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geqslant 0$ ce qui est vrai, on a la majoration $\forall (x,y)\in[0;1]^2\setminus\{(1,1)\}$, $|f(x,y)|\leqslant \dfrac{xy\sqrt{1-xy}}{1+\sqrt{xy}}\leqslant 1-\sqrt{xy}$ par identité remarquable donc f est continue en $(1,1)$. En effet, la fonction $g:(x,y)\mapsto 1-\sqrt{xy}$ est continue par théorèmes généraux sur $\mathbb{R}_+^2$ et vérifie $g(1,1)=0$ donc $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} g(x,y)=0$ et on conclut par le théorème des gendarmes.

En conclusion, la fonction f est continue sur $[0;1]^2\setminus\{(1,1)\}$ et en $(1,1)$ donc sur $[0;1]^2$.
b. La fonction f est continue sur le compact $[0;1]^2$ et est nulle sur son bord, ainsi son maximum est atteint à l'intérieur de $[0;1]^2$ où f est de classe C^1 donc ce maximum est atteint en un point critique (x_0,y_0) : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{y_0(1-y_0)}{(1-x_0y_0)^2}(1-2x_0+x_0^2y_0)=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\dfrac{x_0(1-x_0)}{(1-x_0y_0)^2}(1-2y_0+x_0y_0^2)=0$. Comme $x_0\neq 0$, $x_0\neq 1$, $y_0\neq 0$, $y_0\neq 1$, on a $1-2x_0+x_0^2y_0=1-2y_0+x_0y_0^2 \Longrightarrow (x_0-y_0)(2-x_0y_0)=0$ en soustrayant les deux équations donc $x_0=y_0$. Il vient ensuite $1-2x_0+x_0^3=(x_0-1)(x_0^2+x_0-1)=0$ donc $x_0=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=y_0$ car $x_0\in]0;1[$. Après calculs, on trouve que $\underset{(x,y)\in[0;1]^2}{\mathrm{Sup}} f(x,y)=f(x_0,x_0)=\dfrac{5\sqrt{5}-11}{2}\simeq 0,09$.

1.7 **a.** D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}=(v_1,\cdots,v_n)$ de vecteurs propres. Soit $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k v_k\neq 0$, alors $(f(x)|x)=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\alpha_k v_k\middle|\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k v_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\alpha_k^2>0$ car les λ_k sont strictement positifs par hypothèse et les α_k non tous nuls.
b. La fonction g est polynomiale (en n variables) en les coordonnées de x donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Si on pose $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}}(f)=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, si on associe à x et u les vecteurs colonnes X et U de leurs coordonnées dans la base canonique, $g(x)=\frac{1}{2}(f(x)|x)-(u|x)=\frac{1}{2}{}^tXAX-{}^tUX=\frac{1}{2}\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,j}x_ix_j-\sum\limits_{k=1}^{n}u_kx_k$ pour tout vecteur $x\in\mathbb{R}^n$. Ainsi, pour entier $p\in[\![1;n]\!]$ et en tout point de l'espace $x\in\mathbb{R}^n$, comme on a $g(x)=\frac{a_{p,p}}{2}x_p^2+\Big(\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n}a_{i,p}x_i\Big)x_p-u_px_p+\frac{1}{2}\sum\limits_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq p,\ j\neq p}}a_{i,j}x_ix_j-\sum\limits_{\substack{k=1\\ k\neq p}}^{n}u_kx_k$, en dérivant par rapport à x_p, on obtient $\dfrac{\partial g}{\partial x_p}=a_{p,p}x_p+\Big(\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n}a_{i,p}x_i\Big)-u_p=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{p,j}x_j-u_p$. En recomposant le vecteur, comme $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g(x)=\left(\dfrac{\partial g}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial g}{\partial x_n}\right)$, cela donne $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g(x)=\Big(\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1,j}x_j-u_1,\cdots,\sum\limits_{j=1}^{n}a_{n,j}x_j-u_n\Big)=f(x)-u$.
c. On cherche un vecteur x tels que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g(x)=\overrightarrow{0}$ ce qui équivaut à $f(x)=u$. mais comme f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ car toutes ses valeurs propres sont strictement positives, $f(x)=u\iff x=f^{-1}(u)$. Ainsi $z=f^{-1}(u)$ est l'unique point critique de g et on a $g(z)=-\frac{1}{2}(u|f^{-1}(u))$.
d. Pour $h\in\mathbb{R}^n$, $g(z+h)=\frac{1}{2}(f(z+h)|z+h)-(u|z+h)=\frac{1}{2}(u+f(h)|f^{-1}(u)+h)-(u|f^{-1}(u))-(u|h)$.
Donc $g(z+h)=\frac{1}{2}(u|h)+\frac{1}{2}(u|f^{-1}(u))+\frac{1}{2}(f(h)|f^{-1}(u))+\frac{1}{2}(f(h)|h)-(u|f^{-1}(u))-(u|h)$ mais f est symétrique donc $(f(h)|f^{-1}(u))=(h|f(f^{-1}(u)))=(h|u)$ d'où $g(z+h)=g(z)+\frac{1}{2}(f(h)|h)>g(z)$ dès que $h\neq 0$ d'après **a.**.
g admet donc un minimum absolu sur $\mathbb{R}^n$ valant $-\frac{1}{2}(u|f^{-1}(u))$ et uniquement atteint en z.

1.8 **a.** En notant Ω et Ω' les centres respectifs de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, on se place dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où $\vec{\imath} = \dfrac{\overrightarrow{\Omega'\Omega}}{\Omega'\Omega}$. On pose $M\big(R - R\cos(\theta), R\sin(\theta)\big)_{\mathcal{R}}$ et $M'\big(-R' + R'\cos(\theta'), R'\sin(\theta')\big)_{\mathcal{R}}$. Alors l'aire de OMM' est $\left|\dfrac{RR'}{2}\begin{vmatrix} 1-\cos(\theta) & -1+\cos(\theta') \\ \sin(\theta) & \sin(\theta') \end{vmatrix}\right| = \dfrac{RR'}{2}\big|\sin(\theta)+\sin(\theta')-\sin(\theta+\theta')\big|$.
b. On note $f(\theta,\theta') = \sin(\theta)+\sin(\theta')-\sin(\theta+\theta')$ et on en cherche ses extrema sur $[0\,;2\pi]^2$ sachant qu'elle est nulle sur les bords de ce compact, y est bornée et y atteint ses bornes car continue. Elle atteint donc son maximum en un point critique : $\dfrac{\partial f}{\partial \theta} = \cos(\theta)-\cos(\theta+\theta') = 0 = \cos(\theta')-\cos(\theta+\theta') = \dfrac{\partial f}{\partial \theta'} \Longrightarrow \theta = \theta' = \dfrac{2\pi}{3}$ et on trouve que l'aire maximale de tous les triangles OMM' est $\dfrac{3\sqrt{3}\,RR'}{4}$.

1.9 **a.** Pour un point $M(x,y)$, alors $f(M) = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}$. De plus, l'application $d_A : M \to AM$ est continue car lipschitzienne : en effet, pour M, M' dans le triangle plein ABC : $|d_A(M)-d_A(M')| = |AM-AM'| = \Big|\,||\overrightarrow{AM}||-||\overrightarrow{AM'}||\,\Big| \leqslant ||\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AM'}|| = ||\overrightarrow{M'M}|| = MM'$. Et comme $f = d_A+d_B+d_C$, elle est continue par somme de fonctions continues, ou plus simplement par opérations avec l'expression en fonction de x et y car c'est la somme de racines de fonctions polynomiales prenant des valeurs positives. Ainsi f est continue sur le fermé borné $K = \{(x,y) \in [0;1]^2 \mid x+y \leqslant 1\}$ qui est le triangle plein ABC. Par le théorème des bornes atteintes, f est bornée sur K et y atteint ses bornes.
b. Si f admet un minimum sur K en M, notons s la réflexion d'axe $D : x = y$ (hauteur issue de A), $M' = s(M)$. Comme s est une isométrie, que $A = s(A)$, $B = s(C)$, $C = s(B)$, on a $AM = AM'$, $BM = CM'$ et $CM = BM'$ donc $f(M) = f(M')$ et f admet aussi en M' un minimum sur K. Supposons que M ne fasse pas partie de la droite D, si I est le milieu du segment $[M;M']$, $AI < AM$ et :

$$BI+CI = 2BI = ||\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{BI}|| = ||\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{BM'}+\overrightarrow{M'I}|| = ||\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BM'}|| \leqslant ||\overrightarrow{BM}||+||\overrightarrow{BM'}|| = BM+BM'$$

par inégalité triangulaire car $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{M'I} = \vec{0}$ (définition du milieu).
Par conséquent, $f(I) = AI+BI+CI = AI+2BI < AM+BM+CM = f(M)$ ce qui contredit la minimalité de f en M. On en déduit que f admet son minimum en un point de la première bissectrice D.
Il reste donc à étudier f en $M(x,x) \in D \cap K$. Posons $f_1(x) = f(x,x) = \sqrt{2}x + 2\sqrt{2x^2-2x+1}$ pour $x \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.
La fonction f_1 est dérivable sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ et $f_1'(x) = \sqrt{2}+\dfrac{4x-2}{\sqrt{2x^2-2x+1}}$ et, si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$, avec les quantités conjuguées, on a $f_1'(x) = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{2x^2-2x+1}-2(1-2x)}{\sqrt{2x^2-2x+1}} = \dfrac{2(2x^2-2x+1)-4(1-2x)^2}{\sqrt{2x^2-2x+1}\big(\sqrt{2}\sqrt{2x^2-2x+1}+2(1-2x)\big)}$ or on simplifie $2(2x^2-2x+1)-4(1-2x)^2 = -2(6x^2-6x+1)$ dont les racines sont $x_1 = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{12}}$ et $x_2 = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{12}} \notin \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$. Ainsi, f_1 est croissante sur $[0;x_1]$ et décroissante sur $\left[x_1;\dfrac{1}{2}\right]$, elle atteint donc son maximum en $x_1 = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{12}}$ et $f_1(x_1) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \sim 1.93$. Le point $M_0 = (x_1,x_1)$ en lequel f admet son minimum est le point de Fermat (ou de Torricelli) du triangle ABC.

1.10 **a.** On a $S_a(x,y) = xy+\dfrac{2a}{x}+\dfrac{2a}{y}$ donc $\dfrac{\partial S_a}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial S_a}{\partial y}(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y = x_0 = y_0 = \sqrt[3]{2a}$. On trouve après simplification que $S_a(x_0,x_0) = 3\sqrt[3]{4a^2}$.
b. Point 1 : K est un compact de $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Si $x < \dfrac{x_0}{3}$ alors $S_a(x,y) > \dfrac{6a}{x_0} = S_a(x_0,y_0)$; même chose si $y < \dfrac{y_0}{3}$

et si $xy > 3x_0y_0$ avec l'expression de $S_a(x,y)$ sous forme de somme. Comme S_a est continue, elle est bornée et atteint son minimum sur le compact K et pas au bord d'après ce qui précède donc en un point critique : ce ne peut donc être qu'en (x_0,y_0). Ce minimum sur K l'est aussi sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Point 2 : puisque $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$: $\ln\left(\frac{1}{3}\big(\alpha+\beta+\gamma\big)\right) \geqslant \frac{1}{3}\Big(\ln(\alpha)+\ln(\beta)+\ln(\gamma)\Big)$ d'après l'inégalité de JENSEN et on passe ensuite à l'exponentielle. Ainsi : $S_a(x,y) \geqslant 3\sqrt[3]{xy.\frac{2a}{x}.\frac{2a}{y}} = S_a(x_0,y_0)$ et on conclut.

c. La surface en fonction du volume V fixé vaut $S = xy + 2xz + 2yz = S_V(x,y)$ car $V = xyz$. On a donc $S_{min} = S_V(x_0,y_0)$ avec $x_0 = y_0 = \sqrt[3]{2V}$ et $z_0 = \frac{V}{x_0y_0} = \frac{x_0}{2}$. Donc la base est carrée et la hauteur est la moitié de la longueur d'un côté de la base.

1.11 La fonction f est continue sur le compact $D = F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap [-1;1]^2$ (qui est donc une partie bornée) avec $F_1 = \varphi_1^{-1}([-1;+\infty[)$ qui est fermé comme image réciproque d'un fermé par $\varphi_1 : (x,y) \mapsto y$ continue, de même $F_2 = \varphi_2^{-1}([0;+\infty[)$ avec $\varphi_2 : (x,y) \mapsto x-y$, de même $F_3 = \varphi_3^{-1}(]-\infty;0])$ avec $\varphi_3 : (x,y) \mapsto x$.
L'intérieur du compact D est $D' = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < y < x < 1\big\}$ et en calculant les points critiques de f sur D', on trouve après résolution de $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$: $(x,y) = \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ avec $f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$. Comme il n'y a qu'un point critique, le minimum ou le maximum (ou les deux) est atteint sur la frontière de D.
Frontière 1 : $f(x,-1) = x^3+3x^2-3x+1$ étudié sur $[-1;1]$ nous montre un maximum en $x=1$ qui vaut 6 et un minimum en $\sqrt{2}-1$ qui vaut $6-4\sqrt{2} \geqslant 0$.
Frontière 2 : $f(x,x) = 6x^2$ sur $[-1;1]$ donne un maximum en $x = \pm 1$ qui vaut 6, un minimum en 0 valant 0.
Frontière 3 : $f(1,y) = -y^3+3y^2+3y+1$ étudié sur $[-1;1]$ donne un maximum en $y=-1$ qui vaut 6 et un minimum en $1-\sqrt{2}$ qui vaut $6-4\sqrt{2} \geqslant 0$ (c'est un cas symétrique par rapport au cas 1 car $f(x,y) = f(-y,-x)$).
Comme $-\frac{1}{2}$ est inférieur strictement au minimum de f sur la frontière de D : $\underset{D}{\mathrm{Min}}(f) = -\frac{1}{2}$ et $\underset{D}{\mathrm{Max}}(f) = 6$.

1.12 f est définie sur $D = \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, y est de classe C^∞ et ses points critiques vérifient $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy = 0 \Longrightarrow x = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + (\ln y)^2 + 2\ln(y) = 0 \Longrightarrow y = e^{-2}$ ou $y = 1$. Le point $(0,1)$ est un minimum absolu donc local de f sur D car $\forall (x,y) \in D,\ f(x,y) \geqslant 0 = f(0,1)$. Par contre, sans utiliser les notations de MONGE : $f(h,e^{-2}+k) = (e^{-2}+k)(h^2+(\ln(e^{-2}+k))^2) \underset{(0,0)}{=} 4e^{-2}+h^2e^{-2}-k^2e^2+o(||(h,k)||^2)$ après DL. Ainsi, le point $(0,e^{-2})$ est un point selle : ce n'est pas un extremum local.

1.4 Courbes et surfaces

1.13 Un point $M(r,\theta)$ de cette surface paramétrée est régulier si $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r}$ et $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta}$ forment une famille libre, or $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \theta} = \left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r}, -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}, r\right)$; si ce vecteur n'est pas nul, le plan tangent à S en M est : $\big(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} - r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r}\big)(x - r\cos\theta) - \big(r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\big)(y - r\sin\theta) + r(z - f(r,\theta)) = 0$. Alors l'intersection entre (Oz) et ce plan est le point $(0,0,z)$ avec $z = f(r,\theta) - r\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)$ (même si $r = 0$).

1.14 S est d'équation $f(x,y,z) = z^3 - xy = 0$ donc les points réguliers de S sont tels que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \neq \overrightarrow{0}$. Comme $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y) = (-y,-x,3z^2)$, seul le point $(0,0,0)$ n'est pas régulier sur S. Si $M = (x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$ et $M_0 \in S$, le plan tangent P_0 à S en M_0 a pour équation $P_0\ :\ -y_0(x-x_0) - x_0(y-y_0) + 3z_0^2(z-z_0) = 0$ ou encore $P_0\ :\ y_0x + x_0y - 3z_0^2z + z_0^3 = 0$. La droite D est paramétrée par $x = 2$, $y = 3(t+1)$, $z = t$ pour $t \in \mathbb{R}$.
<u>Analyse</u> : si M_0 convient, $D \subset P_0$ donc, en remplaçant, $\forall t \in \mathbb{R},\ 2y_0 + x_0(3t+3) - 3z_0^2t + z_0^3 = 0$ ou encore $\forall t \in \mathbb{R},\ 3(x_0 - z_0^2)t + (2y_0 + 3x_0 + z_0^3) = 0$ ce qui équivaut à $x_0 = z_0^2$ et $2y_0 + 3x_0 + z_0^3 = 0$. Alors, on a $x_0 = z_0^2$, $y_0 = -\frac{3z_0^2+z_0^3}{2}$ donc $x_0y_0 = z_0^3$ implique $2z_0^3 + 3z_0^4 + z_0^5 = z_0^3(2+3z_0+z_0^2)$ ce qui donne $z_0 = 0$

(exclu car alors $x_0 = y_0 = 0$ et $M_0 \neq (0,0,0)$) ou $z_0 = -1$ ou $z_0 = -2$.

Si $z_0 = -1$, on a $x_0 = 1$ et $y_0 = -1$ et si $z_0 = -2$, on trouve $x_0 = 4$ et $y_0 = -2$.

Synthèse : réciproquement, le plan P_1 tangent à S en $M_1 = (1,-1,-1)$ est d'équation $P_1 \ : \ -x+y-3z-1 = 0$ et il contient bien D comme le plan $P_2 \ : \ -2x+4y-12z-8 = 0$ tangent à S en $M_2 = (4,-2,-2)$.

En conclusion, il existe exactement deux plans tangents à S et contenant la droite D, ce sont les plans $P_1 \ : \ -x+y-3z-1 = 0$ et $P_2 \ : \ x-2y+6z+4 = 0$ tangents à S en $M_1 = (1,-1,-1)$ et $M_2 = (4,-2,-2)$.

1.15 **a.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2xyz-1$. f est de classe C^∞ par opérations et $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y,z) = (2x-2yz, 2y-xz, 2z-2xy)$. Ainsi, (x,y,z) est un point singulier (non régulier) de S si et seulement si $(2x-2yz, 2y-xz, 2z-2xy) = (0,0,0)$. Dans ce cas, on a $xyz = (xyz)^2$ en multipliant les trois relations ce qui prouve que $xyz = 0$ ou $xyz = 1$. Si $xyz = 0$, alors $x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 0$ mais dans ce cas, si par exemple $x = 0$, on a $y = xz = 0$ et $z = xy = 0$ donc $(x,y,z) = (0,0,0)$ qui n'est pas dans S. Par contre, si $xyz = 1$, on a $x = yz = \dfrac{1}{x}$ donc $x = \pm 1$ et, de même, $y = \pm 1$ et $z = \pm 1$. En testant les huit cas, les seuls points critiques de f sont les points $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$. Or ces quatre points critiques sont dans S, et ce sont donc des points singuliers de S (ils forment un tétraèdre régulier).

b. Si $x^2+y^2+z^2-2xyz = 1$ et $z = 0$, alors $x^2+y^2 = 1$ ce qui est l'équation du cercle de centre $(0,0,0)$ et de rayon $R = 1$ inclus dans le plan $z = 0$. Aucun des points $M_0 = (x_0, y_0, 0)$ de ce cercle n'est un point singulier de S d'après la question **a.**, et on a donc en ce point un plan tangent P_0 à S en M_0. On calcule $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0, 0) = (2x_0, 2y_0, -2x_0y_0)$ et on sait que ce vecteur est normal à P_0 qui passe par M_0 d'où l'équation de $P_0 \ : \ x_0(x-x_0)x_0 + y_0(y-y_0) - x_0y_0(z-0) = 0 \iff x_0x + y_0y - x_0y_0z = x_0^2 + y_0^2 = 1$.

1.16 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2-1$. f est de classe C^∞ par opérations et on calcule $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y,z) = (2x, 2y, 4z)$. Ainsi, le seul point critique de f est $(0,0,0)$ qui n'appartient pas à S. La surface S est donc régulière par définition puisque tous ses points sont réguliers : c'est un ellipsoïde de révolution dont les huit sommets sont les points $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$, $\left(0,0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0,0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

En un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S, comme $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)$ est orthogonal au plan P_0 tangent à S en M_0, une équation de P_0 est $P_0 \ : \ x_0(x-x_0) + y_0(y-y_0) + 2z_0(z-z_0) = 0 \iff x_0x + y_0y + 2z_0z = x_0^2 + y_0^2 + 2z_0^2 = 1$ (à nouveau obtenue par dédoublement comme pour toute quadrique).

Analyse : le vecteur $\vec{v} = (1,3,-2)$ est un vecteur directeur de D. On cherche donc les points M_0 tels que $\vec{v}$ est normal à P_0, ce qui équivaut au fait que les vecteurs non nuls $\vec{v}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)$ sont colinéaires. Si M_0 convient, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*,\ x_0 = \lambda,\ y_0 = 3\lambda$ et $2z_0 = -2\lambda$. Puisque $M_0 \in S$, $(1+9+2)\lambda^2 = 1 \iff \lambda = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ donc $M_0 = M_1 = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, \dfrac{3}{2\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ ou $M_0 = M_2 = \left(-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, -\dfrac{3}{2\sqrt{3}}, \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.

Synthèse : réciproquement, d'après les calculs précédents, les deux plans tangents P_1 et P_2 à S en M_1 et M_2 respectivement ont pour équation $P_1 \ : \ \dfrac{x}{2\sqrt{3}} + \dfrac{3y}{2\sqrt{3}} - \dfrac{z}{\sqrt{3}} = 1$ et $P_2 \ : \ -\dfrac{x}{2\sqrt{3}} - \dfrac{3y}{2\sqrt{3}} + \dfrac{z}{\sqrt{3}} = 1$ et ils ont bien des vecteurs normaux colinéaires à $\vec{v}$ donc P_1 et P_2 sont bien orthogonaux à D.

En conclusion, il existe exactement deux plans qui sont à la fois tangents à S et orthogonaux à D, ce sont les plans P_1 et P_2 tangents à S respectivement aux points M_1 et M_2.

1.17 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2-21$. f est de classe C^∞ par opérations et on calcule $\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y,z) = (2x,4y,6z)$. Ainsi, le seul point critique de f est $(0,0,0)$ qui n'appartient pas à S. S est donc régulière par définition puisque tous ses points sont réguliers : c'est un ellipsoïde mais pas de révolution.

En un point $M_0 = (x_0,y_0,z_0)$ de S, comme $\overrightarrow{\text{grad}}f(M_0)$ est orthogonal au plan P_0 tangent à S en M_0, une équation de P_0 est $P_0\ :\ x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+3z_0(z-z_0) = 0 \iff x_0x+2y_0y+3z_0z = x_0^2+2y_0^2+3z_0^2 = 21$ (à nouveau obtenue par dédoublement comme pour toute quadrique).

Le vecteur $\overrightarrow{v} = (1,4,6)$ est clairement un vecteur normal à P. On cherche donc les points M_0 tels que $\overrightarrow{v}$ est aussi normal à P_0, ce qui équivaut au fait que les deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}f(M_0)$ sont colinéaires. Si M_0 convient, $\exists\lambda \in \mathbb{R}^*$, $x_0 = \lambda$, $2y_0 = 4\lambda$ et $3z_0 = 6\lambda$. Puisque $M_0 \in S$, $(1+8+12)\lambda^2 = 21 \iff \lambda = \pm 1$ donc $M_0 = M_1 = (1,2,2)$ ou $M_0 = M_2 = (-1,-2,-2)$.

Réciproquement, d'après les calculs précédents, les plans tangents P_1 et P_2 à S en M_1 et M_2 respectivement ont pour équation $P_1\ :\ x+4y+6z = 21$ et $P_2\ :\ x+4y+6z = -21$ et ils ont bien des vecteurs normaux colinéaires à $\overrightarrow{v}$ donc P_1 et P_2 sont bien parallèles à P.

Par analyse-synthèse, il existe deux plans qui sont à la fois tangents à S et parallèles à P, ce sont les plans P_1 et P_2 tangents à S respectivement aux points M_1 et M_2.

1.18 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = z^2 - xy$. f est de classe C^∞ par opérations et $\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y,z) = (-y,-x,2z)$ donc le seul point singulier de S est le sommet $(0,0,0)$ de ce cône de révolution.

En un point $M_0 = (x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$ de S, comme $\overrightarrow{\text{grad}}f(M_0)$ est orthogonal au plan P_0 tangent à S en M_0, une équation de P_0 est $P_0\ :\ -y_0(x-x_0)-x_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0) = 0 \iff 2z_0z-y_0x-x_0y = 2z_0^2-2x_0y_0 = 0$ (à nouveau obtenue par dédoublement comme pour toute quadrique en remplaçant $2xy$ par x_0y+y_0x).

<u>Analyse</u> : si $M_0 \neq (0,0,0)$ est un point de S et que le plan tangent P_0 contient la droite D, alors en paramétrant la droite D par $x = y = z = t$ avec $t \in \mathbb{R}$, on doit avoir $\forall t \in \mathbb{R}$, $(2z_0-y_0-x_0)t = 0$ donc $x_0+y_0 = 2z_0$. Mais comme $M_0 \in S$, on aussi $4x_0y_0 = 4z_0^2 = (2z_0)^2 = (x_0+y_0)^2$ donc $x_0^2+2x_0y_0+y_0^2 = 4x_0y_0$ qui se transforme en $(x_0-y_0)^2 = 0 \iff x_0 = y_0$. Ainsi, $x_0 = y_0 = z_0$ donc $M_0 \in D$.

<u>Synthèse</u> : réciproquement, si $M_0 \in D$ et $M_0 \neq (0,0,0)$, alors le plan tangent P_0 à S en M_0 a pour équation $P_0\ :\ 2x_0z-x_0x-x_0y = 0$ d'après ce qui précède ou $P_0\ :\ 2z = x+y$ et la droite D est bien incluse dans P.

En conclusion, les points M de S en lesquels le plan tangent à S en M contient D sont justement les points de D sauf l'origine $O = (0,0,0)$.

1.19 La fonction f est de classe C^∞ par opérations et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{yz}{(1+(xyz)^2)^2} - \dfrac{2xy^2z^2}{(1+(xyz)^2)^2}\,\text{Arctan}(xyz)$, et par symétrie entre les variables x, y et z, on a aussi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{xz}{(1+(xyz)^2)^2} - \dfrac{2xy^2z^2}{(1+(xyz)^2)^2}\,\text{Arctan}(xyz)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{xy}{(1+(xyz)^2)^2} - \dfrac{2zx^2y^2}{(1+(xyz)^2)^2}\,\text{Arctan}(xyz)$.

Comme $(1,1,1) \in S$ car $f(1,1,1) = \dfrac{(\pi/4)}{2} - \dfrac{\pi}{8} = 0$ et que $\overrightarrow{\text{grad}}f(1,1,1) = \left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{\pi}{8}\right)(1,1,1) \neq 0$, le point $(1,1,1)$ est régulier sur S et le plan tangent P à S en M a pour équation $P\ :\ (x-1)+(y-1)+(z-1) = 0 \iff x+y+z = 3$. C'est logique car on constatait une symétrie totale entre les trois coordonnées x, y, z dans la fonction f.

1.5 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

1.20 **a.** • Pour $n = 2$, on étudie $g_2 : x_1 \mapsto f(x_1, 2\lambda - x_1) = x_1 \ln(x_1) + (2\lambda - x_1)\ln(2\lambda - x_1)$ sur $]0; 2\lambda[$. Elle est dérivable, se prolonge par continuité sur $[0; 2\lambda]$ avec $g(0) = g(2\lambda) = 2\lambda \ln(2\lambda)$.

On a $g_2'(x_1) = \ln(x_1) + 1 - \ln(2\lambda - x_1) - 1 = \ln\left(\dfrac{x_1}{2\lambda - x_1}\right)$. Ainsi, g_2 est décroissante sur $[0; \lambda]$ et croissante sur $[\lambda; 2\lambda]$. On en déduit que $M_\lambda = 2\lambda \ln(2\lambda)$ et $m_\lambda = 2\lambda \ln(\lambda)$.

• Pour $n = 3$, on fixe d'abord $x_1 \in]0; 3\lambda[$ et a ensuite $x_2 + x_3 = 3\lambda - x_1 = 2\left(\dfrac{3\lambda}{2} - \dfrac{x_1}{2}\right) = 2\lambda'$. Alors, avec des notations évidentes : $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \ln(x_1) + f(x_2, x_3)$. On peut majorer avec le cas précédent : $f(x_1, x_2, x_3) \leqslant x_1 \ln(x_1) + M_{\lambda'} = x_1 \ln(x_1) + 2\lambda' \ln(2\lambda') = x_1 \ln(x_1) + \big(3\lambda - x_1\big) \ln\big(3\lambda - x_1\big) = h(x_1)$. Une étude comme celle qui précède montre que h est majorée par $3\lambda \ln(3\lambda)$, valeur limite quand par exemple x_1 tend vers 3λ et donc x_2 et x_3 vers 0 : par conséquent $M_\lambda = 3\lambda \ln(3\lambda)$.

De même, $f(x_1, x_2, x_3) \geqslant x_1 \ln(x_1) + m_{\lambda'} = x_1 \ln(x_1) + \big(3\lambda - x_1\big) \ln\left(\dfrac{3\lambda}{2} - \dfrac{x_1}{2}\right) = k(x_1)$. Une étude en fonction de x_1 permet d'établir que $k(x_1) \geqslant 3\lambda \ln(\lambda)$, obtenu pour $x_1 = \lambda$. Ainsi : $m_\lambda = 3\lambda \ln(3\lambda)$.

b. Il est naturel de conjecturer : $\forall n \geqslant 2,\ M_\lambda = n\lambda \ln(n\lambda)$ et $m_\lambda = n\lambda \ln(\lambda)$. Si c'est vrai pour un $n - 1 \geqslant 3$, même méthode qu'avant, on fixe $x_1 \in]0; n\lambda[$ et $x_2 + \cdots + x_n = n\lambda - x_1 = (n-1)\left(\dfrac{n\lambda}{n-1} - \dfrac{x_1}{n}\right) = (n-1)\lambda'$. Alors $f(x_1, \cdots, x_n) = x_1 \ln(x_1) + f(x_2, \cdots, x_n)$. On peut maintenant majorer par hypothèse de récurrence : $f(x_1, \cdots, x_n) \leqslant x_1 \ln(x_1) + M_{\lambda'} = x_1 \ln(x_1) + (n-1)\lambda' \ln((n-1)\lambda') = x_1 \ln(x_1) + \big(n\lambda - x_1\big) \ln\big(n\lambda - x_1\big) = h(x_1)$. Une nouvelle étude montre que h est majorée par $n\lambda \ln(n\lambda)$, valeur limite quand par exemple x_1 tend vers $n\lambda$ et donc x_2 et x_3 vers 0 : par conséquent $M_\lambda = n\lambda \ln(n\lambda)$.

De même, $f(x_1, \cdots, x_n) \geqslant x_1 \ln(x_1) + m_{\lambda'} = x_1 \ln(x_1) + \big(n\lambda - x_1\big) \ln\left(\dfrac{n\lambda}{n-1} - \dfrac{x_1}{n-1}\right) = k(x_1)$. Une étude en fonction de x_1 permet d'établir que $k(x_1) \geqslant n\lambda \ln(\lambda)$, obtenu pour $x_1 = \lambda$. Ainsi : $m_\lambda = n\lambda \ln(n\lambda)$.

On conclut par principe de récurrence que $\forall n \geqslant 2, M_\lambda = n\lambda \ln(n\lambda)$ et $m_\lambda = n\lambda \ln(\lambda)$.

1.21 **a.** À $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, on dérive avec règle de la chaîne, puisque f et $t \mapsto t^a$ sont de classe C^1, la relation $f(tx, ty) = t^a f(x, y)$ pour avoir $\forall t > 0,\ \dfrac{\partial(tx)}{\partial t}\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + \dfrac{\partial(ty)}{\partial t}\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = at^{a-1}f(x, y)$ ce qui s'écrit aussi $\forall t > 0,\ x\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = at^{a-1}f(x, y)$. Il suffit ensuite de prendre $t = 1$ dans cette relation pour obtenir la relation voulue : $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = af(x, y)$ qui est valable pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b. À $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(tx, ty) - t^a f(x, y)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall t > 0,\ tg'(t) = tx\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + ty\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) - at^a f(x, y) = af(tx, ty) - at^a f(x, y) = ag(t)$. On résout cette équation différentielle et on a $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall t > 0,\ g(t) = \alpha t^a$ mais comme $g(1) = 0$, on trouve $\alpha = 0$ et g nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $f(0, 0) = 0$ en prenant $t = 1$ et $x = y = 0$ dans $(E_a)\ :\ x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = af$. Or $\lim\limits_{t \to 0^+} t^a = 0$ car $a > 0$ donc on peut écrire $0^a = 0$ et $g(0) = f(0, 0) - 0^a f(0, 0) = 0$ ce qui prouve que g est nulle sur $\mathbb{R}_+$: $\forall t \geqslant 0,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(tx, ty) = t^a f(x, y)$ (on dit alors que f est homogène de degré a).

c. Ce qu'on a fait aux questions précédentes marche encore si $a = 0$ car $0^0 = 1$. Ainsi, si on pose $(E_0)\ :\ x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ l'équation homogène associée à (E), on peut déduire de la question **b** que l'on a $\forall t \geqslant 0,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y)$ ce qui montre qu'en polaires (avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$), f ne dépend que de θ et pas de r. Il existe donc une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 2π-périodique telle que $f(x, y) = h(\theta)$. Comme la fonction $g : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et vérifie $\forall t > 0,\ g(tx, ty) = t^2 g(x, y)$, la question **a.** montre que $x\dfrac{\partial g}{\partial x} + y\dfrac{\partial g}{\partial y} = 2g$ donc que la fonction $\dfrac{g}{2}$ est solution particulière de (E) sur U. Par théorème de structure pour cette équation aux dérivées partielles linéaire avec second membre (comme pour les équations différentielles), les solutions générales de (E) sur U sont de la forme $f : (x,y) \mapsto h(\theta) + \dfrac{\sqrt{x^4+y^4}}{2}$ (le problème est de trouver une expression de θ en fonction de x et y qui ne considère pas des cas particuliers).

On aurait aussi pu passer en polaires en posant $h : (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et trouver l'équation $\dfrac{\partial h}{\partial r} = 0$ que doit vérifier h si f vérifie (E) en raisonnant par analyse/synthèse.

1.22 **a.** Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$. D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (formé de deux demi-plans) et pour tout $(x,y) \in D$, on a $f(x,y) = y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$ donc f est continue sur D par théorèmes généraux.
Comme $||\sin||_\infty = 1$, on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x,y)| \leqslant y^2$ (valable aussi si $y = 0$). Par conséquent, si $x_0 \in \mathbb{R}$, comme $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} y^2 = 0$ (par continuité des fonctions polynomiales), on a par encadrement : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = 0 = f(x_0,0)$ donc f est continue en $(x_0,0)$. On en conclut que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b. Si $(x,y) \in D$, on a par calcul direct : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) - x\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Si $x_0 \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{f(x_0+t,0)-f(x_0,0)}{t} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{f(x_0,t)-f(x_0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to0} t\sin\left(\dfrac{x_0}{t}\right) = 0$.
Ainsi, les dérivées partielles de f existent partout dans $\mathbb{R}^2$.
c. Comme avant, par théorèmes généraux, les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur D.
• Si $x_0 \in \mathbb{R}$, comme $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant |y|$, comme avant, par encadrement, on a la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(x_0,0)$ donc sur $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
• Encore une fois, en majorant $|\sin|$ par 1, on a la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de $(x,y) \mapsto 2y\sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Mais, si $x_0 \neq 0$, la fonction $\psi_{x_0} : y \mapsto x_0\cos\left(\dfrac{x_0}{y}\right)$ n'admet visiblement pas de limite en 0 (prendre $y = \dfrac{x_0}{2n\pi}$ puis $y = \dfrac{x_0}{(2n+1)\pi}$ dans ψ_{x_0}), a fortiori $\psi : (x,y) \mapsto x\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$ n'en admet pas non plus donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (en tant que somme d'une fonction continue et d'une fonction qui ne l'est pas) n'est pas continue en $(x_0,0)$.
Si $x_0 = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \psi_0\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{2n\pi}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \psi_0\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{(2n+1)\pi}\right) = -\infty$ alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{2n\pi}\right) = (0,0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{(2n+1)\pi}\right) = (0,0)$: ψ_0 n'est pas continue en $(0,0)$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

1.23 **a.** Comme $f(x,y) = e^{x\ln(x^2+y^2)}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par opérations. Puisque $f(0,y) = 1$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Si $t \neq 0$, $\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \dfrac{e^{t\ln(t^2)}-1}{t} = \dfrac{e^{t\ln(t^2)}-1}{t\ln(t^2)} \times \ln(t^2)$ qui tend vers $-\infty$ quand t tend vers 0 car $\lim\limits_{t\to0} t\ln(t^2) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{t\to0} \dfrac{e^{t\ln(t^2)}-1}{t\ln(t^2)} = 1$ par composée.
Ainsi, la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'existe pas en $(0,0)$, la fonction f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Par continuité de $\exp$ en 0, si $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall z \in [-\alpha;\alpha]$, $|e^z - 1| \leqslant \varepsilon$. Comme $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$, on a $|x\ln(x^2+y^2)| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}|\ln(x^2+y^2)|$. Or $\lim\limits_{t\to0} \sqrt{t}\ln(t) = 0$ par croissances comparées, donc il existe $\beta > 0$ tel que $\forall t \in]0;\beta]$, $|\sqrt{t}\ln(t)| \leqslant \alpha$.
Par conséquent, dès que $||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \beta$, on a $|\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)| \leqslant \alpha$ et on traite deux cas :
- si $x \geqslant 0$, $|f(x,y)-f(0,0)| = f(x,y) - 1 = e^{x\ln(x^2+y^2)} - 1 \leqslant e^{\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)} - 1 \leqslant \varepsilon$.
- si $x < 0$, $|f(x,y)-f(0,0)| = 1 - f(x,y) = \dfrac{e^{(-x)\ln(x^2+y^2)}-1}{e^{(-x)\ln(x^2+y^2)}} \leqslant e^{(-x)\ln(x^2+y^2)} - 1 \leqslant e^{\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)} - 1 \leqslant \varepsilon$.

On a donc $||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \beta \Longrightarrow |f(x,y) - f(0,0)| \leqslant \varepsilon$ d'où la continuité de f en $(0,0)$ donc sur $\mathbb{R}^2$.

b. Si $x \in]0;1[$, $f(x,0) = e^{x\ln(x^2)} < 1 = f(0,0)$ donc f n'admet pas en $(0,0)$ un minimum local.

Si $x \in]-1;0[$, $f(x,0) = e^{x\ln(x^2)} > 1 = f(0,0)$ donc f n'admet pas en $(0,0)$ un maximum local.

f n'admet donc pas d'extremum local au point $(0,0)$.

c. Extrema locaux : comme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un ouvert, si f y admet un extremum local, c'est en un point critique d'après le cours. On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)f(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)f(x,y)$.
Comme $f(x,y) > 0$, en supposant $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) = (0,0)$, on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow xy = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0)$.

Si $x = 0$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \ln(y^2) = 0 \Longleftrightarrow y = \pm 1$.

Si $y = 0$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \ln(x^2) + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm e^{-1}$.

Il existe donc 4 points critiques : $(0,1)$, $(0,-1)$, $(e^{-1},0)$ et $(-e^{-1},0)$.

Comme on a $f(x,y) = f(x,-y)$, la surface S d'équation $z = f(x,y)$ est invariante par la réflexion de plan $y = 0$. Il suffit donc d'étudier f au voisinage de $(0,1)$, $(e^{-1},0)$ et $(-e^{-1},0)$.

• Comme $f(0,1+t) = f(0,1) = 1$, rien à dire dans cette direction. Mais $f(t,1) = e^{t\ln(1+t^2)}$ donc $f(t,1) < 1$ si $t < 0$ et $f(t,1) > 1$ si $t > 0$. Donc f n'admet pas en $(0,1)$ d'extremum local. En $(0,-1)$ non plus donc.

• En ce qui concerne l'étude de f au voisinage des points $(e^{-1},0)$ et $(-e^{-1},0)$, on va montrer que ce sont des extrema locaux en considérant une restriction de f à un fermé borné. Il semble logique de considérer la boule fermée unité $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Comme f est continue sur le fermé borné B, f y est bornée et y atteint ses bornes. Sur la frontière de B, c'est-à-dire sur le disque unité $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$, la fonction f est constante et vaut 1. Comme les valeurs en ces deux points sont $f(e^{-1},0) = (e^{-2})^{e^{-1}} = e^{-2/e} < 1$ et $f(-e^{-1},0) = (e^{-2})^{-e^{-1}} = e^{2/e} > 1$, on a donc $\underset{B}{\text{Max}}(f) \geqslant e^{2/e}$ et $\underset{B}{\text{Min}}(f) \leqslant e^{-2/e}$. Ainsi, la restriction de f à B n'atteint pas son minimum et son maximum sur sa frontière D mais dans son intérieur $\overset{\circ}{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$, c'est-à-dire sur un ouvert. On sait alors d'après le cours que ce minimum et ce maximum sont atteints en des points critiques de f, qui ne peuvent être d'après l'étude précédente que les points $(e^{-1},0)$ et $(-e^{-1},0)$. On en déduit donc que f atteint son minimum absolu sur B en $(e^{-1},0)$ et que $\underset{B}{\text{Min}}(f) = f(e^{-1},0) = e^{-2/e}$ et que f atteint son maximum absolu sur B en $(-e^{-1},0)$ avec $\underset{B}{\text{Max}}(f) = f(-e^{-1},0) = e^{2/e}$. Ces points sont donc des extrema locaux de f en tant que fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, f admet en $(e^{-1},0)$ un minimum local (sur B) et f admet en $(-e^{-1},0)$ un maximum local.

Extrema absolus : on a $f(x,0) = (x^2)^x$ qui tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$ donc f n'admet pas de minimum absolu car f est strictement positive sur $\mathbb{R}^2$. Ce qui précède montre que $\underset{\mathbb{R}^2}{\text{Inf}}\, f = 0$ alors que 0 ne peut pas être une valeur prise par la fonction f. De même $f(x,0) = (x^2)^x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ donc f n'admet pas de maximum absolu sur $\mathbb{R}^2$ car f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^2$.

1.24 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x,x) = x^2$. Si $x \neq y$: $g(x,y) = \dfrac{y^3-x^3}{3(y-x)} = \dfrac{y^2+xy+x^2}{3}$.

On a donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = \dfrac{x^2+xy+y^2}{3}$ donc g est de classe C^1 car polynomiale (même C^∞).

b. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'intégration, $\varphi : (x,y) \mapsto \int_x^y f(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -f(x)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = f(y)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ sont donc continues sur $\mathbb{R}^2$ comme la fonction f l'est sur $\mathbb{R}$. Comme $(x,y) \to y-x$ est de classe C^1 car polynomiale et ne s'annule pas sur D par définition, g est de classe C^1 sur D par opérations.

De plus, $\forall (x,y) \in D$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{(y-x)^2}\displaystyle\int_x^y f(t)dt - \dfrac{f(x)}{y-x} = \dfrac{1}{(y-x)^2}\Big(\displaystyle\int_x^y f(t)dt - (y-x)f(x)\Big)$.

De même, on a $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{1}{(y-x)^2}\displaystyle\int_x^y f(t)dt + \dfrac{1}{y-x}f(y) = \dfrac{1}{(y-x)^2}\Big((y-x)f(y) - \displaystyle\int_x^y f(t)dt\Big)$.

c. Soit $a \in \mathbb{R}$, pour $t \neq 0$, $g(a,a+t) - g(a) = \dfrac{1}{t}\Big(\displaystyle\int_a^{a+t} f(u)du\Big) - f(a)$. La fonction $F : t \mapsto \displaystyle\int_a^{a+t} f(u)du$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ car $F'(t) = f(a+t)$ (f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$) et on a $\forall t \neq 0$, $g(a+t,a) - g(a) = \dfrac{F(t) - tf(a)}{t}$.

D'après Taylor-Young, puisque F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, le développement limité d'ordre 2 de F en 0 est donné par $F(t) \underset{0}{=} F(0) + F'(0)t + \dfrac{F''(0)}{2}t^2 + o(t^2)$. Or $F(0) = 0$, $F'(0) = f(a)$ et $F''(0) = f'(a)$, donc $F(t) - tf(a) \underset{0}{=} \dfrac{f'(a)}{2}t^2 + o(t^2)$ donc $\dfrac{g(a,a+t) - g(a,a)}{t} = \dfrac{f'(a)}{2} + o(1)$. On en déduit que $\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,a) = \dfrac{f'(a)}{2}$.

Comme $g(a+t,a) = g(a,a+t)$, on a aussi : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a) = \dfrac{f'(a)}{2}$.

d. <u>Méthode 1</u> : si $x \neq y$, on a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{(y-x)^2}\displaystyle\int_x^y (f(t) - f(x))dt$. Soit $a \in \mathbb{R}$, par continuité de f' sur $\mathbb{R}$, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|t-a| \leqslant \alpha \implies |f'(t) - f'(a)| \leqslant 2\varepsilon$. Essayons de majorer $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right|$ au voisinage de (a,a) pour établir la continuité de $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ en (a,a). Soit donc $(x,y) \in [a-\alpha; a+\alpha]^2$ de sorte que $||(x,y) - (a,a)||_\infty \leqslant \alpha$, alors considérons deux cas :

- si $x = y$, alors $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| = \dfrac{|f'(x) - f'(a)|}{2} \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$ car $|x-a| \leqslant \alpha$.

- si $x \neq y$, alors il vient $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| = \left|\dfrac{1}{(y-x)^2}\displaystyle\int_x^y (f(t) - f(x))dt - \dfrac{f'(a)}{2}\right|$ qu'on peut majorer en $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| = \dfrac{1}{(y-x)^2}\left|\displaystyle\int_x^y (f(t) - f(x) - (t-x)f'(a))dt\right| \leqslant \dfrac{1}{(y-x)^2}\left|\displaystyle\int_x^y |f(t) - f(x) - (t-x)f'(a)|dt\right|$

puis, avec le théorème des accroissements finis, $\forall t \in \widetilde{[x;y]}$, $c \in \widetilde{[x;t]} \subset [a-\alpha; a+\alpha]$, $f(t) - f(x) = (t-x)f'(c)$ donc $|f(t) - f(x) - (t-x)f'(a)| \leqslant |t-x| \times |f'(c) - f'(a)| \leqslant 2\varepsilon|t-x|$, on obtient par conséquent la majoration suivante $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| \leqslant \dfrac{1}{(y-x)^2}\left|\displaystyle\int_x^y 2\varepsilon|t-x|dt\right| = \varepsilon$.

Ceci prouve que $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est continue en (a,a) pour tout $a \in \mathbb{R}$ donc, avec **b.**, que $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De même, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ est aussi continue sur $\mathbb{R}^2$. Par définition, la fonction g est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

<u>Méthode 2</u> : si $x \neq y$, en posant $t = \varphi(u) = x + u(y-x)$, comme φ est de classe C^1, strictement monotone et bijective de $[0;1]$ dans $\widetilde{[x;y]}$, on a $g(x,y) = \displaystyle\int_0^1 f\big(x + u(y-x)\big)du$. Cette expression est aussi valable quand $x = y$. On a donc l'expression plus simple de g : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x,y) = \displaystyle\int_0^1 f\big(x + u(y-x)\big)du$.

On fixe $y \in \mathbb{R}$, alors en notant $\varphi_y(x,u) = f\big(x + u(y-x)\big)$ définie sur $[0;1] \times \mathbb{R}$, pour $a > 0$:

- $\forall x \in [-a;a]$, la fonction $u \mapsto \varphi_y(x,u)$ est continue et intégrable sur $[0;1]$.
- $\forall u \in [0;1]$, $x \mapsto \varphi_y(x,u)$ est dérivable sur $[-a;a]$ et sa dérivée est $x \mapsto (1-u)f'\big(x + u(y-x)\big)$.
- $\forall (u,x) \in [0;1] \times [-a;a]$, $\left|\dfrac{\partial \varphi_y}{\partial x}(x,u)\right| = \left|(1-u)f'\big(x + u(y-x)\big)\right| \leqslant \underset{[\mathrm{Min}(-a,y);\mathrm{Max}(a,y)]}{\mathrm{Max}}|f'|$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ existe sur $\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)f'\big(x + u(y-x)\big)du$.

De même, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ existe sur $\mathbb{R}^2$ et on a $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \displaystyle\int_0^1 uf'\big(x + u(y-x)\big)du$.

Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé et une suite $\big((a_n,b_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers (x_0,y_0), montrons alors que la suite $\Big(\frac{\partial g}{\partial x}(a_n,b_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)$ ce qui garantira la continuité de $\frac{\partial g}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$.
Pour $n\in\mathbb{N}$, on a $\frac{\partial g}{\partial x}(a_n,b_n) = \int_0^1 (1-u)f'\big(a_n+u(b_n-a_n)\big)du$.
La suite $\big((a_n,b_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée. Soit donc $M >$ tel que $\forall n\in\mathbb{N},\ |a_n|\leqslant M$ et $|b_n|\leqslant M$.
La fonction f' est bornée sur $[-M;M]$ donc il existe $B>0$ tel que $\forall t\in[-M;M],\ |f'(t)|\leqslant B$.
Posons $g_n : u\mapsto (1-u)f'\big(a_n+u(b_n-a_n)\big)$, alors $\frac{\partial g}{\partial x}(a_n,b_n)=\int_0^1 g_n$.

- Toutes les g_n sont continues et intégrables sur $[0;1]$.
- Par continuité de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $h : u\mapsto (1-u)f'\big(x_0+u(y_0-x_0)\big)$ qui est continue sur $[0;1]$.
- $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall u\in[0;1],\ |g_n(u)|\leqslant B$ et $u\mapsto B$ est intégrable sur $[0;1]$.

Par le théorème de convergence dominée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n = \int_0^1 (1-u)f'\big(x_0+u(y_0-x_0)\big)du$ ce qui s'écrit aussi $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\partial g}{\partial x}(a_n,b_n) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)$. Par caractérisation séquentielle de la continuité, la fonction $\frac{\partial g}{\partial x}$ est donc continue sur $\mathbb{R}^2$. De même $\frac{\partial g}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

1.25 **a.** Si $A\cup B=\Omega$ et A, B incompatibles, alors $\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(\Omega)=1$ donc en notant $x=P(A)$, on a $\big|\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\big| = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = x(1-x)$ et l'étude sur $[0;1]$ de la fonction $x\mapsto x(1-x)$ montre qu'elle admet son maximum en $\frac{1}{2}$ où elle vaut $\frac{1}{4}$ (parabole). Ainsi $\big|\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\big|\leqslant\frac{1}{4}$.
b. Si A et B sont incompatibles, $\mathbb{P}(A\cap B)=0$. Avec $x=\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)\leqslant\mathbb{P}(\Omega)=1$ donc $\mathbb{P}(B)\leqslant 1-x$. Ainsi $\big|\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\big| = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\leqslant x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$.
c. K est un tétraèdre et F est la réunion de 4 triangles dans l'espace dont 3 sont rectangles isocèles et le dernier équilatéral : $T_1=\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+)^3 \mid x=0 \text{ et } y+z\leqslant 1\}$, $T_2=\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+)^3 \mid y=0 \text{ et } x+z\leqslant 1\}$, $T_3=\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+)^3 \mid z=0 \text{ et } x+y\leqslant 1\}$ et $T_4=\{(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+)^3 \mid x+y+z=1\}$.
- Si $(x,y,z)\in T_1$, on a $h(x,y,z)=h(0,y,z)=-yz$ donc $-\frac{1}{4}\leqslant -y(1-y)\leqslant h(x,y,z)\leqslant 0$. Or $(0,0,0)\in T_1$ et $h(0,0,0)=0$ et $\Big(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)\in T_1$ et $h\Big(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)=-\frac{1}{4}$. Ainsi : $\underset{T_1}{\mathrm{Min}}\,h=-\frac{1}{4}$ et $\underset{T_1}{\mathrm{Max}}\,h=0$.
- Si $(x,y,z)\in T_2$, on a $h(x,y,z)=h(x,0,z)=x(1-x-z)$ donc $0\leqslant h(x,y,z)\leqslant x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$. Or $(0,0,0)\in T_2$ et $h(0,0,0)=0$ et $\Big(\frac{1}{2},0,0\Big)\in T_2$ et $h\Big(\frac{1}{2},0,0\Big)=\frac{1}{4}$. Ainsi : $\underset{T_2}{\mathrm{Min}}\,h=0$ et $\underset{T_2}{\mathrm{Max}}\,h=\frac{1}{4}$.
- Par symétrie entre y et z dans h, on a aussi $\underset{T_3}{\mathrm{Min}}\,h=0$ et $\underset{T_3}{\mathrm{Max}}\,h=\frac{1}{4}$.
- Si $(x,y,z)\in T_4$, on a $h(x,y,z)=-yz$ et comme avant $\underset{T_4}{\mathrm{Min}}\,h=-\frac{1}{4}$ et $\underset{T_4}{\mathrm{Max}}\,h=0$.

Ainsi $\underset{F}{\mathrm{Min}}\,h=-\frac{1}{4}$ et $\underset{F}{\mathrm{Max}}\,h=\frac{1}{4}$.
d. h est continue sur le compact K : h y est bornée et y atteint ses bornes. Comme $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z)=1-2x-y-z$, $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z)=-x-z$ et $\frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z)=-x-y$, il n'y a pas de point critique de h dans K.
Ainsi, les extrema de h sur K sont atteints en des points de sa frontière sur laquelle $|h|\leqslant\frac{1}{4}$. Par conséquent $\underset{K}{\mathrm{Min}}\,h=-\frac{1}{4}$ et $\underset{K}{\mathrm{Max}}\,h=\frac{1}{4}$ atteint en $\Big(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)$, $\Big(\frac{1}{2},0,0\Big)$ par exemple.
e. Soit A, B deux évènements, posons $x=\mathbb{P}(A\cap B)\geqslant 0$, $y=\mathbb{P}(A\setminus B)\geqslant 0$ et $z=\mathbb{P}(B\setminus A)\geqslant 0$. Comme $x+y+z=\mathbb{P}(A\cup B)\leqslant 1$, le point (x,y,z) appartient à K. Alors $\mathbb{P}(A)=x+y$, $\mathbb{P}(B)=x+z$ et

$\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)=x-(x+y)(x+z)=x-x^2-xy-xz-yz=x(1-x-y-z)-yz=h(x,y,z)$. D'après la question **c.**, on a $|h(x,y,z)|\leqslant\dfrac{1}{4}$ donc $\big|\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\big|\leqslant\dfrac{1}{4}$.

$\boxed{\textbf{1.26}}$ **a.** Puisque $U=(\mathbb{R}_+^*)^2$ est un ouvert de l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^2$ et (x_0,y_0) un point de cet ouvert où f admet un minimum absolu, f admet donc a fortiori en (x_0,y_0) un minimum local et le cours nous apprend alors que f admet en (x_0,y_0) un point critique.

Si on veut la preuve, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}$ et si $t>0$ on a $\dfrac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}>0$ donc, en passant à la limite, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\geqslant0$. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim\limits_{t\to0^-}\dfrac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}$ et si $t<0$ on a $\dfrac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}<0$ donc, en passant à la limite, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\leqslant0$. Ainsi, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$ et, par symétrie, on a aussi $\dfrac{\partial f}{\partial x}y(x_0,y_0)=0$ donc f admet un point critique en (x_0,y_0).

b. D'abord, on décompose S_a en “éléments simples” en écrivant $S_a(x,y)=xy+\dfrac{2a}{x}+\dfrac{2a}{y}$ donc S_a est de classe C^1 par opérations sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et on a les dérivées partielles $\dfrac{\partial S_a}{\partial x}(x,y)=y-\dfrac{2a}{x^2}$ et $\dfrac{\partial S_a}{\partial y}(x,y)=x-\dfrac{2a}{y^2}$. Ainsi, $\overrightarrow{\text{grad}}\,S_a(x,y)=(0,0)\Longleftrightarrow\Big(y-\dfrac{2a}{x^2}=x-\dfrac{2a}{y^2}=0\Big)\Longleftrightarrow(yx^2=xy^2=2a)\Longleftrightarrow(x=y=x_0=y_0=\sqrt[3]{2a})$.

f admet un unique point critique $(x_0,y_0)=(\sqrt[3]{2a},\ \sqrt[3]{2a})$ et, après calculs, $S_a(x_0,y_0)=3\sqrt[3]{4a^2}=3x_0^2=3y_0^2$.

c. K est une sorte de triangle délimité par deux droites ($x=\dfrac{x_0}{3}$ et $y=\dfrac{y_0}{3}$) et de l'autre côté par une hyperbole ($xy=3x_0y_0$). De plus, K est bornée car si $(x,y)\in K$, on a $0<x=\dfrac{xy}{y}\leqslant\dfrac{3x_0y_0}{(y_0/3)}=9x_0$ et $y=\dfrac{xy}{x}\leqslant\dfrac{3x_0y_0}{(x_0/3)}=9y_0$. Enfin, K est fermé car si une suite $\big((a_n,b_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de K converge vers $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, en passant à la limite dans les trois inégalités $a_n\geqslant\dfrac{x_0}{3}$ et $b_n\geqslant\dfrac{y_0}{3}$ et $a_nb_n\leqslant3x_0y_0$, on obtient $a\geqslant\dfrac{x_0}{3}$ et $b\geqslant\dfrac{y_0}{3}$ et $ab\leqslant3x_0y_0$ donc $(a,b)\in K$. Comme S_a est continue sur le fermé borné (compact) K (on est bien en dimension finie), elle est bornée et atteint son minimum sur K donc $\underset{K}{\text{Min}}\,S_a$ existe.

- Si $x\leqslant\dfrac{x_0}{3}$ alors $S_a(x,y)=xy+\dfrac{2a}{x}+\dfrac{2a}{y}>0+\dfrac{6a}{x_0}+0=3x_0^2=S_a(x_0,y_0)$.
- Si $y\leqslant\dfrac{y_0}{3}$, de même, $S_a(x,y)=xy+\dfrac{2a}{x}+\dfrac{2a}{y}>0+0+\dfrac{6a}{y_0}=3y_0^2=S_a(x_0,y_0)$.
- Si $xy\geqslant3x_0y_0$, $S_a(x,y)=xy+\dfrac{2a}{x}+\dfrac{2a}{y}>3x_0^2+0+0=S_a(x_0,y_0)$.

Comme $\forall(x,y)\in U\setminus K,\ S_a(x,y)>S_a(x_0,y_0)\geqslant\underset{K}{\text{Min}}\,S_a$, on a $\forall(x,y)\in U,\ S_a(x,y)\geqslant\underset{K}{\text{Min}}\,S_a$ ainsi S_a admet son minimum absolu à l'intérieur de K donc en un point critique.

Or il n'existe qu'un point critique de S_a et il est en $(x_0,y_0)\in K$. Enfin, le minimum absolu de S_a est atteint en (x_0,y_0) : $\underset{U}{\text{Min}}(S_a)=\underset{K}{\text{Min}}(S_a)=\underset{\mathring{K}}{\text{Min}}(S_a)=S_a(x_0,y_0)=3\sqrt[3]{4a^2}=3x_0^2$.

d. La surface en fonction du volume V fixé vaut $S=\underbrace{xy}_{\text{fond}}+\underbrace{2xz+2yz}_{\text{côtés}}=S_V(x,y)=xy+\dfrac{2(x+y)V}{xy}$ car $V=xyz$. On a donc $S_{min}=S_V(x_0,y_0)$ avec $x_0=y_0=\sqrt[3]{2V}$ et $z_0=\dfrac{V}{x_0y_0}=\dfrac{x_0}{2}$.

La boîte de surface minimale est de base carrée et la hauteur est la moitié de la longueur d'un côté.

$\boxed{\textbf{1.27}}$ U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel g est définie et de classe C^2. Par hypothèse, $g=f\circ h$ où la fonction $h:U\to\mathbb{R}_+^*$ est définie par $h(x,y)=x^2+y^2$.

Par composition de fonctions C^2, $\forall(x,y)\in U$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2xf'(x^2+y^2)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=2yf'(x^2+y^2)$. On dérive une fois de plus et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=2f'(x^2+y^2)+4x^2f''(x^2+y^2)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=2f'(x^2+y^2)+4y^2f''(x^2+y^2)$. $\forall(x,y)\in U$, on a $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=(x^2+y^2)^p \iff 4f'(x^2+y^2)+4(x^2+y^2)f''(x^2+y^2)=(x^2+y^2)^p$.
Comme h est surjective de U dans $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit la nouvelle équivalence :

$$\forall(x,y)\in U,\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=(x^2+y^2)^p \iff \forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ 4f'(t)+4tf''(t)=t^p.$$

On résout $(E)\ :\ ty''+y'=\dfrac{t^p}{4}$ en distinguant selon la valeur de p :

- si $p\neq-1$, la fonction f' est de la forme : $t\mapsto\dfrac{\lambda}{t}+\dfrac{t^p}{4(p+1)}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.
- si $p=-1$, la fonction f' est de la forme : $t\mapsto\dfrac{\lambda}{t}+\dfrac{\ln(t)}{4t}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

On intègre à nouveau et on a la forme des fonctions f vérifiant les conditions imposées :

- si $p\neq-1$, la fonction f est de la forme : $f:t\mapsto\lambda\ln(t)+\mu+\dfrac{t^{p+1}}{4(p+1)^2}$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
- si $p=-1$, la fonction f est de la forme : $f:t\mapsto\lambda\ln(t)+\mu+\dfrac{\ln^2(t)}{8}$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

1.28 La fonction f est de classe C^1 par opérations sur l'ouvert $U=(\mathbb{R}_+^*)^2$. Si f admet en (x_0,y_0) un extremum local, (x_0,y_0) est un point critique de f. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{a}{y_0}-\dfrac{by_0}{x_0^2}=0=\dfrac{b}{x_0}-\dfrac{ax_0}{y_0^2}=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\iff ax_0^2=by_0^2$.
Il convient donc de distinguer selon les signes de a et b :

- <u>Si $a=b=0$</u>, f est nulle sur U donc $\underset{U}{\mathrm{Min}}(f)=\underset{U}{\mathrm{Max}}(f)=0$.
- <u>Si $a=0$ et $b>0$</u>, $f(x,y)=\dfrac{by}{x}$ donc f est strictement positive, la borne inférieure de f vaut 0 car $\lim\limits_{y\to0^+}f(1,y)=0$ par exemple et f n'est pas majorée car $\lim\limits_{x\to0^+}f(x,1)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(1,y)=+\infty$. Mais f n'admet pas de point critique ($by_0^2=0$ est impossible) donc ni extremum local ni extremum absolu.
- <u>Si $a=0$ et $b<0$</u>, $f(x,y)=\dfrac{by}{x}$ donc f est strictement négative, la borne supérieure de f vaut 0 car $\lim\limits_{y\to0^+}f(1,y)=0$ par exemple et f n'est pas minorée car $\lim\limits_{x\to0^+}f(x,1)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(1,y)=-\infty$. Mais f n'admet pas de point critique ($by_0^2=0$ est impossible) donc ni extremum local ni extremum absolu.
- <u>Si ($a<0$ et $b=0$) ou ($a>0$ et $b=0$)</u>, on fait comme avant.
- <u>Si $a>0$ et $b<0$</u>, $ax_0^2=by_0^2$ ne peut pas être vérifié sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ donc f n'admet pas de point critique donc pas d'extremum local. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,1)=+\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty}f(1,y)=-\infty$ donc f n'est ni majorée ni minorée..
- <u>Si $a>0$ et $b<0$</u>, de même f n'est ni majorée ni minorée sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et n'admet pas de d'extremum local.
- <u>Si $a>0$ et $b>0$</u>, les points critiques de f se situent sur la droite D d'équation $D\ :\ y=\sqrt{\dfrac{a}{b}}x$. La fonction f est strictement positive sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x,1)=+\infty$ donc f n'est pas majorée. Si $(x,y)\in D$, on a $f(x,y)=2\sqrt{ab}$. Or, pour $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $f(x,y)-2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{\dfrac{ax}{y}}-\sqrt{\dfrac{by}{x}}\right)^2\geqslant0$ donc le minimum absolu de f vaut $2\sqrt{ab}$ et est atteint en tout point de la droite D dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
- <u>Si $a<0$ et $b<0$</u>, on se ramène au cas précédent en prenant l'opposé de f.

1.29 **a.** La surface Σ est définie par $f(x,y,z)=0$ où $f(x,y,z)=xyz-1$. Un point $M_0\in\Sigma$ est régulier si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(M_0)\neq\overrightarrow{0}$. Or, si $M_0=(x_0,y_0,z_0)$, alors $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(x_0,y_0,z_0)=(y_0z_0,x_0z_0,x_0y_0)\neq(0,0,0)$ car

$x_0y_0z_0 = 1 \neq 0$: Σ est une surface régulière. Σ est formée de 4 composantes connexes située dans les “zones” $H_1 = \{x > 0, y > 0, z > 0\}$, $H_2 = \{x > 0, y < 0, z < 0\}$, $H_3 = \{x < 0, y > 0, z < 0\}$ et $H_4 = \{x < 0, y < 0, z > 0\}$.

b. Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$, $x_0y_0z_0 = 1$ et le plan P_0 tangent à Σ en M_0 a pour équation, comme $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0, y_0, z_0)$ lui est normal : $P_0\ :\ (x-x_0)y_0z_0 + (y-y_0)x_0z_0 + (z-z_0)x_0y_0 = 0 \iff \dfrac{x}{x_0} + \dfrac{y}{y_0} + \dfrac{z}{z_0} = 3$.

$P_0 \cap (Ox) = P_0 \cap (xOy) \cap (xOz)$ ne contient que le point $I = (3x_0, 0, 0)$.

$P_0 \cap (Oy) = P_0 \cap (yOx) \cap (yOz)$ ne contient que le point $J = (0, 3y_0, 0)$.

$P_0 \cap (Oz) = P_0 \cap (zOx) \cap (zOy)$ ne contient que le point $K = (0, 0, 3z_0)$.

OIJK a pour volume $V = \dfrac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\right)\right| = \dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} 3x_0 & 0 & \\ 0 & 3y_0 & 0 \\ 0 & 0 & 3z_0 \end{vmatrix} = \dfrac{27x_0y_0z_0}{6} = \dfrac{9}{2}$ qui est constant.

1.30 **a.** Pour $n = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\nabla u(x) = u'(x)$. Par exemple pour $u = \mathrm{ch}$, on a bien u de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{|\mathrm{ch}\,(x)|}{|x|} = +\infty$ par croissances comparées car $|\mathrm{ch}\,(x)| = \mathrm{ch}\,(|x|) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{|x|}}{2}$; dans ce cas, on a $u' = \mathrm{sh}$ et on sait que u' est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Par contre pour $u = \mathrm{sh}$, on a aussi u de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{|\mathrm{sh}\,(x)|}{|x|} = +\infty$ car $|\mathrm{sh}\,(x)| = \mathrm{sh}\,(|x|) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{|x|}}{2}$ mais $u' = \mathrm{ch}$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[1; +\infty[$ mais pas de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = u(x) - (x|v)$ est de classe C^1 car u l'est et que $g : x \mapsto (x|v)$ est polynomiale en les coordonnées de x donc de classe C^1 aussi, d'ailleurs elle est aussi linéaire donc continue car on est en dimension finie. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x) = \nabla u(x) - \nabla g(x)$ par linéarité des dérivées partielles. Or, si $v = (v_1, v_2)$, $g(x_1, x_2) = x_1v_1 + x_2v_2$ donc $\nabla g(x_1, x_2) = (v_1, v_2) = v$. Ainsi, $\nabla f(x) = \nabla u(x) - v$. Il suffit donc de choisir $v \notin \nabla u(\mathbb{R}^2)$ (on le peut car ∇u est non surjective par hypothèse) pour que ∇f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $|(x|v)| \leqslant ||x||\,||v||$ donc, par inégalité triangulaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ |f(x)| = |u(x) - (x|v)| \geqslant \big||u(x)| - |(x|v)|\big| \geqslant |u(x)| - |(x|v)| \geqslant |u(x)| - ||x||\,||v||.$$

Ainsi, dès que $x \neq (0,0)$, $||x|| > 0$ donc $\dfrac{|f(x)|}{||x||} \geqslant \dfrac{|u(x)|}{||x||} - ||v||$. Or $\lim\limits_{||x||\to+\infty} \dfrac{|u(x)|}{||x||} = +\infty$ par hypothèse donc, par minoration, on a aussi $\lim\limits_{||x||\to+\infty} \dfrac{|f(x)|}{||x||} = +\infty$.

c. Soit $r > 0$ et $(a, b) \in (\mathbb{R}^2 \setminus B_r)^2$, alors $||a|| \geqslant r$ et $||b|| \geqslant r$. Écrivons a et b en coordonnées polaires, $a = (||a||\cos(\alpha), ||a||\sin(\alpha))$ et $b = (||b||\cos(\beta), ||b||\sin(\beta))$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Définissons alors l'application $\gamma : [0; 1] \to \mathbb{R}^2$ par $\forall t \in [0; 1]$, $\gamma(t) = ((1-t)||a|| + t||b||).(\cos((1-t)\alpha + t\beta), \sin((1-t)\alpha + t\beta))$. Alors γ définit un arc paramétré dans le plan, bien sûr de classe C^∞, tel que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ et tel que l'on ait $\forall t \in [0; 1]$, $||\gamma(t)|| = (1-t)||a|| + t||b|| \geqslant \mathrm{Min}(||a||, ||b||) \geqslant r$. Ainsi $\gamma([0; 1]) \subset (\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$.

Soit $(p, q) \in f(\mathbb{R}^2 \setminus B_r)^2$, alors par définition il existe $(a, b) \in (\mathbb{R}^2 \setminus B_r)^2$ tels que $p = f(a)$ et $q = f(b)$. On suppose que $p < q$ et on choisit $r \in [p; q]$. Alors avec la fonction γ précédente, $h : [0; 1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = f \circ \gamma(t)$ est continue en tant que composée de fonctions continues (elle est même de classe C^1) et $h(0) = f(a) = p$, $h(1) = f(b) = q$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in [0; 1]$ tel que $h(t) = r$ ce qui signifie que $r = f(\gamma(t))$ et on a vu que $\gamma(t) \in (\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$ donc $r \in f(\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$.

En conclusion, $f(\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$ est un intervalle car c'est un convexe.

d. Comme $\lim\limits_{||x||\to+\infty} \dfrac{|f(x)|}{||x||} = +\infty$, $\exists r > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^2,\ ||x|| \geqslant r \Longrightarrow |f(x)| \geqslant ||x|| > 0 \Longrightarrow f(x) \neq 0$. Ainsi, pour un tel réel r, on a $0 \notin f(\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$. Comme $\lim\limits_{||x||\to+\infty} |f(x)| = +\infty$ puisque $|f(x)| = \dfrac{|f(x)|}{||x||} \times ||x||$, l'intervalle $f(\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$ ne peut pas être borné. Il ne reste plus que quatre possibilités : $f(\mathbb{R}^2 \setminus B_r) =]a; +\infty[$, $[a; +\infty[$, $]-\infty; b[$ ou $]-\infty; b]$. Supposons (les autres cas sont identiques) que $f(\mathbb{R}^2 \setminus B_r) =]a; +\infty[$ (avec $a \in \mathbb{R}_+$). Comme f est continue donc bornée sur le fermé borné $\overline{B_r}$, et qu'elle est minorée par a sur $\mathbb{R}^2 \setminus B_r$, f est minorée sur $\mathbb{R}^2$. Puisque $\lim\limits_{||x||\to+\infty} |f(x)| = +\infty$, $\exists r' > r,\ \forall x \in \mathbb{R}^2,\ ||x|| \geqslant r' \Longrightarrow |f(x)| = f(x) \geqslant f(0,0)$. Comme f est continue sur le fermé borné $\overline{B_{r'}}$, elle y admet un minimum $m = \underset{\overline{B_{r'}}}{\mathrm{Min}}(f) \leqslant f(0,0)$. Si $x \in \mathbb{R}^2$, on a $||x|| \leqslant r' \Longrightarrow f(x) \geqslant m = \underset{\overline{B_{r'}}}{\mathrm{Min}}(f)$ et $||x|| > r' \Longrightarrow f(x) \geqslant f(0,0) \geqslant m$. Par conséquent, $m = \underset{\mathbb{R}^2}{\mathrm{Min}}(f) = f(x_0)$ avec $x_0 \in \overline{B_{r'}}$. Mais comme ce minimum de f est atteint dans l'ouvert $\mathbb{R}^2$, il l'est en un point critique de f. On obtient donc une contradiction puisqu'on a construit f pour que son gradient ne s'annule pas.

On conclut donc, dès que $n \geqslant 2$, que $u \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{||x||\to+\infty} \dfrac{|u(x)|}{||x||} = +\infty$ vérifie ∇u surjectif.

1.31 **a.** f est polynomiale donc continue et A est fermé bornée dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^2$, ainsi, par un théorème du cours, f est bornée sur A et elle atteint ses bornes. Par conséquent, f admet bien des extrema sur A un minimum absolu et un maximum absolu.

b. Soit un extremum local de f est atteint à l'intérieur de $A =]-2; 2[^2$, et alors c'est en un point critique de f ; soit cet extremum local est atteint sur la frontière de A, c'est-à-dire sur l'un des quatre côtés du carré A. Or $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4(x-y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4(x-y)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x,y) = \overrightarrow{0}$ équivaut au système suivant : $x^3 - x + y = x^3 + y^3 = 0 \Longleftrightarrow x + y = x^3 - 2x = 0$ car $t \mapsto t^3$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, les seuls points critiques de f dans A (et d'ailleurs dans $\mathbb{R}^2$) sont $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ avec pour images $f(0,0) = 0$, $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$.

c. Comme $f(x,x) = 2x^4 > 0$ si $x \neq 0$ et $f(x,-x) = 2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2-4) = 2x^2(x-2)(x+2) < 0$ si $x \notin \{0, -2, -2\}$, le point $(0,0)$ est un point selle pour f.

d. Comme $f(0,0) = 0 > f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$, les deux autres points critiques ne peuvent être que des minima locaux (ou absolus).

e. Comme $f(x,y) = f(y,x) = f(-x,-y) = f(-y,-x)$, une étude sur un bord suffira à savoir ce qui se passe sur les quatre bords du carré A. Or, en ce concerne le bord droit de A, $h(y) = f(2,y) = y^4 + 16 - 2(y-2)^2$ donc $h(y) = y^4 - 2y^2 + 8y + 8 = (y+2)(y^3 - 2y^2 + 2y + 4)$. Comme $h'(y) = 4y^3 - 4y + 8$ ne s'annule qu'en $\alpha \sim -1,52$ où $h(\alpha) \sim -3,44 > -8$, que $h(-2) = 0$ et $h(2) = 32$, $\underset{[-2;2]}{\mathrm{Min}}(h) = h(\alpha)$ et $\underset{[-2;2]}{\mathrm{Max}}(h) = 32$.

Avec l'étude des points critiques qui précède, on a donc $\underset{A}{\mathrm{Min}}(f) = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$ et $\underset{A}{\mathrm{Max}}(f) = f(2,2) = 32$.

1.32 **a.** Par opérations, la fonction f est de classe C^2 (et même C^∞) sur l'ouvert $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Comme $|f(x,y)| \leqslant |xy| \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |x||y| \leqslant ||(x,y)||_2^2$ donc, comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} ||(x,y)||_2 = 0$, par encadrement, on trouve $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et f est aussi continue en $(0,0)$. Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0$ en revenant à la définition et, par un calcul brutal, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2+y^2)^2}$. Le second calcul n'était pas nécessaire puisque $f(x,y) = -f(y,x)$ (1) donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$ en dérivant (1) par rapport à x avec la règle de la chaîne. De même, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur l'ouvert D par opérations. De plus, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \frac{|y|(2x^4+4x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2} = 2|y| \leqslant 2||(x,y)||_2$ et, comme en **a.**, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est aussi continue en $(0,0)$. Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est aussi continue en $(0,0)$.

Ainsi, par définition, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

c. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = -1$. On peut aussi calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = 0$.

d. Par contraposée du théorème de SCHWARZ, f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

1.33 **a.** La condition s'écrit encore $\forall t \in [0;T],\ g'(t) - \lambda g(t) \leqslant 0$. Si on se rappelle la démonstration du cas homogène des équations différentielles linéaires du premier ordre, on l'écrit aussi $\forall t \in [0;T],\ (g'(t) - \lambda g(t))e^{-\lambda t} \leqslant 0$ ce qui prouve que $h : t \mapsto g(t)e^{-\lambda t}$ est décroissante sur l'intervalle $[0;T]$. Ainsi, $\forall t \in [0;T],\ h(t) \leqslant h(0) = g(0)$. Par conséquent, on obtient la majoration $\forall t \in [0;T],\ g(t) \leqslant g(0)e^{\lambda t}$.

b. D'après le cours, le polynôme caractéristique de A vaut $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}\,(A)X + \det(A)$ dont le discriminant vaut $\Delta = \mathrm{Tr}\,(A)^2 - 4\det(A) > 0$ par hypothèse. Ainsi, A possède deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2 telles que $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}\,(A)$ et $\lambda_1\lambda_2 = \det(A) > 0$. A est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: $A = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Distinguons deux cas :

• Si les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 sont strictement positives, $X' = AX \iff Y' = DY$ avec $X = PY$ (classique) et si ${}^tY = (y_1\ y_2)$, l'équation $Y' = DY$ équivaut à l'existence de deux constantes réelles α_1 et α_2 telles que $\forall t \in \mathbb{R},\ y_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}$ et $y_2(t) = \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$. Il y a à nouveau deux cas, soit $Y = 0$ et alors $X = 0$, soit $Y \neq 0$ donc $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$ et, comme $||Y||^2 = \alpha_1^2 e^{2\lambda_1 t} + \alpha_2^2 e^{2\lambda_2 t}$, il vient $\lim_{t\to+\infty} ||Y(t)||^2 = +\infty$ ce qui montre avec l'implication admise (et démontrée en fin d'exercice) que $\lim_{t\to+\infty} ||X(t)|| = +\infty$.

• Si les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 sont strictement négatives, on a toujours $X' = AX \iff Y' = DY$ avec $X = PY$ et l'existence de deux constantes réelles α_1 et α_2 telles que $\forall t \in \mathbb{R},\ y_1(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}$ et $y_2(t) = \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$. Dans tous les cas cette fois-ci, on a $\lim_{t\to+\infty} y_1(t) = \lim_{t\to+\infty} y_2(t) = 0$ donc $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = 0$. Par continuité (par linéarité en dimension finie) de $\varphi : V \mapsto PV$, on a donc $\lim_{t\to+\infty} X(t) = 0$.

c. Comme $\mathrm{Tr}\,(J(f))^2 = 16 > 8 = 4\det(J(f))$ et que $\mathrm{Tr}\,(J(f)) = -4 < 0$, la matrice $J(f)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec deux valeurs propres λ_1 et λ_2 strictement négatives d'après **b.**. Comme $\chi_A = X^2 + 4X + 2$, les valeurs propres de $J(f)$ sont $\lambda_1 = -2 + \sqrt{2}$ et $\lambda_2 = -2 - \sqrt{2}$ avec des vecteurs propres associés $v_1 = (\sqrt{2}, 1)$ et $v_2 = (\sqrt{2}, -1)$. On peut donc écrire $J(f) = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ et $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ inversible.

Si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ C^1 vérifie $y' = f(y)$, on définit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ par $\forall t \geqslant 0,\ g(t) = ||y(t)||^2 = (y(t)|y(t))$. On sait que g est dérivable car y l'est et que l'on a $g'(t) = 2(y'(t)|y(t)) = 2(f(y(t))|y(t))$.

La jacobienne donne le développement limité de f au voisinage de $(0,0)$: $f(h) \underset{0}{=} f(0,0) + J(f)h + o(||h||)$ ce qui s'écrit aussi $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall h \in \mathbb{R}^2,\ ||h|| \leqslant \alpha \Longrightarrow ||f(h) - J(f)h|| \leqslant \varepsilon ||h||$.

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, majorons d'abord $g'(t)$ en supposant que $\forall t \in [0;T]$, $||y(t)|| \leqslant \alpha$ (α associé à ε), ainsi $g'(t) = 2(f(y(t)) - J(f)y(t) + J(f)y(t)|y(t))$ et $g'(t) - 2(J(f)y(t)|y(t)) = 2(f(y(t)) - J(f)y(t)|y(t))$ d'où l'on déduit $|g'(t)-2(J(f)y(t)|y(t))| \leqslant 2\varepsilon||y||^2$ d'après CAUCHY-SCHWARZ d'où $g'(t) \leqslant 2(J(f)y(t)|y(t))+2\varepsilon||y(t)||^2$. Or si on décompose $y(t) = y_1(t)v_1 + y_2(t)v_2$ dans la base (v_1, v_2), alors $J(f)y(t) = \lambda_1 y_1(t)v_1 + \lambda_2 y_2(t)v_2$ donc $(J(f)y(t)|y(t)) = \lambda_1 y_1(t)^2||v_1||^2 + (\lambda_1+\lambda_2)y_1(t)y_2(t)(v_1|v_2) + \lambda_2 y_2(t)^2||v_2||^2$ qu'on simplifie avec $\lambda_1+\lambda_2 = -4$ en $(J(f)y(t)|y(t)) = 3\lambda_1 y_1(t)^2 - 4y_1(t)y_2(t) + 3\lambda_2 y_2(t)^2$. Or, $||y(t)||^2 = ||y_1(t)v_1 + y_2(t)v_2||^2$ et il vient $||y(t)||^2 = y_1(t)^2||v_1||^2 + 2y_1(t)y_2(t)(v_1|v_2) + y_2(t)^2||v_2||^2 = 3y_1(t)^2 + 2y_1(t)y_2(t) + 3y_2(t)^2$ et, par calculs avec les valeurs de λ_1 et λ_2 : $(J(f)y(t)|y(t)) \leqslant -||y(t)||^2$. Ainsi, $g'(t) \leqslant -||y(t)||^2 + 2\varepsilon||y(t)||^2 = (-1+2\varepsilon)||y(t)||^2$. Soit donc $\varepsilon = \frac{1}{4}$, on prend α associé ci-dessus, si on impose $||y(0)|| \leqslant \frac{\alpha}{2}$ (par exemple), alors par continuité de y, il existe $T > 0$ tel que $\forall t \in [0;T]$, $||y(t)|| \leqslant \alpha$ et alors on peut utiliser les inégalités précédentes pour montrer que $g'(t) \leqslant (-1+2\varepsilon)||y(t)||^2 = -\frac{g(t)}{2}$. D'après **a.**, on a $\forall t \in [0;T]$, $g(t) \leqslant g(0)e^{-t/2}$ donc aussi $||y(T)|| \leqslant ||y(0)|| \leqslant \frac{\alpha}{2}$. Comme le système est autonome (le temps n'apparaît pas dans l'équation), on peut recommencer à partir de $y(T)$ car les solutions sont invariantes par translation temporelle. On obtient alors $||y(2T)|| \leqslant \frac{\alpha}{2}$ et ainsi de suite. Par récurrence, on a donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $||y(kT)|| \leqslant \frac{\alpha}{2}$ donc, $\forall t \in [kT;(k+1)T], ||y(t)|| \leqslant \frac{\alpha}{2}$. Par conséquent, l'inégalité $g(t) \leqslant g(0)e^{-t/2}$ est valable pour tout $t \geqslant 0$ ce qui justifie bien que $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = (0,0)$ dès que $y(0,0)$ est assez petit en norme.

En plus : on peut montrer l'assertion admise avant la question **b.**, supposons donc que l'on se donne une fonction vectorielle $Y : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $\lim\limits_{t\to+\infty} ||Y(t)|| = +\infty$. Alors $||X||^2 = {}^tXX = {}^tY{}^tPPY$. Or $M = {}^tPP$ est inversible, symétrique et réelle. Comme ${}^tUMU = ||PU||^2 > 0$ si $U \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, cette matrice M est symétrique définie positive donc ses valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (pas forcément distinctes) sont strictement positives. Si on décompose $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i V_i$ dans une base orthonormale (elle existe d'après le théorème spectral) de vecteurs propres de M (telle que $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $MV_i = \lambda_i V_i$), comme cette base est orthonormale, $||Y||^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 \to +\infty$ quand $t \to +\infty$ mais en notant $\lambda = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Min}}\ \lambda_i > 0$, on a aussi $||X||^2 = (Y|MY) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geqslant \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 = \lambda||Y||^2$. Ainsi, par minoration, $\lim\limits_{t\to+\infty} ||X(t)|| = +\infty$.
On pouvait aussi dire que les deux applications $U \mapsto ||U||$ et $U \mapsto ||PU||$ sont deux normes sur $\mathbb{R}^n$ (car P est inversible) donc elles sont équivalentes : $\alpha||U|| \leqslant ||PU|| \leqslant \beta||U||$ avec $\alpha, \beta > 0$. Ainsi, en remplaçant U par $Y(t)$, on a $||X(t)|| = ||PY(t)|| \geqslant \alpha||Y(t)||$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} ||X(t)|| = +\infty$ par minoration si $\lim\limits_{t\to+\infty} ||Y(t)|| = +\infty$. D'ailleurs, la double inégalité ci-dessus donne l'équivalence : $\lim\limits_{t\to+\infty} ||Y(t)|| = +\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} ||X(t)|| = +\infty$.

1.34 (1) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifie $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, alors pour tout réel y, la fonction $f_y : x \mapsto f(x,y)$ est dérivable et a une dérivée nulle par hypothèse donc il existe une constante $\varphi(y)$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_y(x) = f(x,y) = \varphi(y)$. Comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, la fonction f admet une dérivée partielle continue selon y donc φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, s'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, alors $f : (x,y) \mapsto \varphi(y)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi'(y)$. Ainsi, les solutions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 de $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sont les $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $f(x,y) = \varphi(y)$ avec $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Bien sûr, si on impose f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, cela équivaut au fait que φ soit de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

(2) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifie $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, comme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ signifie $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0$ avec $g = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, l'étude de l'équation (1) montre qu'il existe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi(y)$. Avec le même raisonnement que ci-dessus, il existe une autre fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \varphi(y)x + \psi(y)$. Mais comme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, elle doit admettre des dérivées partielles premières et secondes continues, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto \varphi(y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto \varphi'(y)x + \psi'(y)$ sont continues (on le savait) mais aussi de classe C^1 par rapport à x et y, ce qui impose que φ et ψ soient de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} : (x,y) \mapsto 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : (x,y) \mapsto \varphi'(y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} : (x,y) \mapsto \varphi''(y)x + \psi''(y)$ sont bien continues sur $\mathbb{R}^2$. Réciproquement, on vérifie comme ci-dessus que ces fonctions sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie (2). Par conséquent, les solutions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ sont les $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $f(x,y) = \varphi(y)x + \psi(y)$ avec $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

(3) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifie $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, comme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ signifie $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0$ avec $g = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ (avec SCHWARZ), l'étude de (1) montre qu'il existe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi(y)$. Avec le même raisonnement que ci-dessus, en notant Φ une primitive de φ sur $\mathbb{R}$ (il en existe), il existe une autre fonction $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \Phi(y) + \Psi(x)$. Mais comme f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, elle doit admettre des dérivées partielles premières et secondes continues, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto \Psi'(x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto \Phi'(y) = \varphi(y)$ sont continues (on le savait) mais aussi de classe C^1 par rapport à x et y, ce qui impose que Φ et Ψ soient de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} : (x,y) \mapsto \Psi''(x)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : (x,y) \mapsto 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} : (x,y) \mapsto \Phi''(y)$ sont bien continues sur $\mathbb{R}^2$. Réciproquement, on vérifie que ces fonctions sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie (3). Au final, les solutions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ sont les $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $f(x,y) = \Phi(y) + \Psi(x)$ avec $\Phi, \Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

1.35 **a.** La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ par opérations car $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 4 + y^2 > 0$. De plus, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + \dfrac{2y}{4+y^2}$. Ainsi, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de f, on a $xy = 0 = x^2 + \dfrac{2y}{4+y^2}$ donc soit $x = 0 \Longrightarrow y = 0$, soit $y = 0 \Longrightarrow x = 0$. Le seul point critique de f sur $\mathbb{R}^2$ est le point $(0,0)$.

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $e(x) = x^5 + \ln(4 + x^6) - \ln(4)$. Alors $e(x) = x^5 + \ln\left(1 + \dfrac{x^6}{4}\right) \underset{0}{=} x^5 + \dfrac{x^6}{4} + o(x^6) \underset{0}{\sim} x^5$.

c. Si f admettait des extrema locaux sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, on sait d'après le cours que ce serait en un point critique donc ce serait en $(0,0)$ puisqu'il n'y a qu'un seul point critique. Or $e(x) \underset{0}{\sim} x^5$ donc e est strictement négative au voisinage de 0^- et strictement positive au voisinage de 0^+ ce qui interdit l'existence d'un extremum local en $(0,0)$. Par l'absurde, il n'y a donc aucun extremum local pour la fonction f sur $\mathbb{R}^2$.

1.36 **a.** $K = [0;\pi]^2$ est un carré fermé borné et T est un triangle ouvert. Dessins à faire.

b. Par construction $F(x,y) = \mathrm{Min}(x,y)(\pi - \mathrm{Max}(x,y))$ pour $(x,y) \in K$. Or $\mathrm{Min}(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$ et $\mathrm{Max}(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$. On peut donc réécrire $F(x,y) = \dfrac{\pi}{2}\big(x+y-|x-y|\big) - \dfrac{1}{4}\big((x+y)^2 - |x-y|^2\big)$ d'où $F(x,y) = \dfrac{\pi}{2}\big(x+y-|x-y|\big) + \dfrac{1}{4}\big((x+y)^2 - |x-y|^2\big) = \dfrac{\pi}{2}\big(x+y-|x-y|\big) + xy$. Cette expression universelle montre que F est continue sur K car $t \mapsto |t|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Comme T est un ouvert car $\mathbb{R}_+^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et que $\mathsf{T} = f_1^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \cap f_2^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \cap f_3^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ en posant $f_1 : (x,y) \mapsto x$, $f_2 : (x,y) \mapsto y - x$ et $f_3 : (x,y) \mapsto \pi - y$ qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiales. Si F admet un extremum local sur T, c'est forcément en un point critique. Comme $\forall (x,y) \in T$, $F(x,y) = x(\pi - y)$, $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x,y) = (\pi - y, -x)$ ne peut pas s'annuler sur T : F n'admet aucun extremum local sur T.

d. Comme K est un fermé bornée (compact) en dimension finie et que F est continue sur K, la fonction F est bornée et atteint ses bornes sur K donc F admet sur K un minimum et un maximum. Le compact K est formé des quatre bords du carré K, $B_1 = \{(x,0) \mid x \in [0;\pi]\}$, $B_2 = \{(x,\pi) \mid x \in [0;\pi]\}$, $B_3 = \{(0,y) \mid y \in [0;\pi]\}$ et $B_4 = \{(\pi,y) \mid y \in [0;\pi]\}$, de sa diagonale $D = \{(x,x) \mid x \in [0;\pi]\}$ et enfin des deux triangles T et $T' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x < \pi\}$. Comme $F(x,y) = F(y,x)$, il ne peut pas non plus y avoir de point critique de F dans T'. Ainsi, F atteint ses extrema sur B_1, B_2, B_3, B_4 ou D. On étudie F sur chacun de ces 5 segments, ce qui donne $F(x,0) = F(0,y) = F(x,\pi) = F(\pi,y) = 0$ et $F(x,x) = x(\pi - x)$. La fonction F étant par construction positive sur K, son minimum vaut clairement $\underset{K}{\text{Min}}(F) = 0$ atteint sur les bords du carré K, et son maximum est atteint en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ où $\underset{K}{\text{Max}}(F) = \frac{\pi^2}{4}$.

1.37 **a.** f est polynomiale sur D donc elle y est de classe C^1. Par conséquent, F est aussi de classe C^1 sur $D \times \mathbb{R}$. De plus, on a clairement $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -4x(x^2+y^2) + 3x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4y(x^2+y^2) + 3y$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = -1$ donc $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x,y,z) = (-4x(x^2+y^2) + 3x, -4y(x^2+y^2) + 3y, -1)$.

b. S est la surface d'équation $F(x,y,z) = 0$ par définition et tous les points de cette surface sont réguliers car $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x,y,z) \neq \overrightarrow{0}$ pour $(x,y,z) \in D \times \mathbb{R}$ d'après la question **a.**. Le plan tangent en un point (x,y,z) de cette surface admet d'après le cours comme vecteur normal $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x,y,z)$. On cherche donc (x,y,z) tel que $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x,y,z)$ et $\overrightarrow{v} = (0,1,-1)$ sont colinéaires, ce qui se traduit par $\begin{cases} -4x(x^2+y^2) + 3x & = 0 \\ 4y(x^2+y^2) - 3y & = -1 \end{cases}$. Or la condition $-4x(x^2+y^2) + 3x = -4x\left(x^2 + y^2 - \frac{3}{4}\right) = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$. Deux cas :

- Si $x = 0$, $4y(x^2+y^2) - 3y = -1 \iff 4y^3 - 3y = -1 \iff (y+1)\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff \left(y = -1 \text{ ou } y = \frac{1}{2}\right)$.
- Si $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$, $4y(x^2+y^2) - 3y = 0 \neq -1$ donc ceci ne correspond pas à un point critique.

Ainsi, les points $M = (x,y,z)$ de S en lesquels le plan tangent à S en M est normal à $\overrightarrow{v}$ sont $(0,-1,f(0,-1))$ et $\left(0, \frac{1}{2}, f\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)$. Or $f(0,-1) = \frac{3}{2}$ et $f\left(0, \frac{1}{2}\right) = \frac{21}{16}$. Les points de S cherchés sont $\left(0, 1, \frac{3}{2}\right)$ et $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{21}{16}\right)$.

c. Comme f est définie sur D et que $(t,t) \in D \iff t^2 + t^2 \leqslant 1 \iff |t| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, les applications f et $t \mapsto t$ étant de classe C^1 sur leurs ensembles de définition respectifs (D et $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$), g l'est aussi par composée sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et $\forall t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $g'(t) = 1 \times \frac{\partial f}{\partial x}(t,t) + 1 \times \frac{\partial f}{\partial y}(t,t) = (-8t^3 + 3t) + (-8t^3 + 3t) = 2t(3 - 8t^2)$ par la règle de la chaîne. Comme $g : t \mapsto -4t^4 + 3t^2 + 1$ est paire, il suffit de l'étudier sur $I = \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. La dérivée précédente montre que g est croissante sur $\left[0; \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Ainsi, g est maximale en $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et minimale en 0 ou en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (les extrémités de I). Or $g(0) = 1$ et $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}$ donc $\underset{I}{\text{Min}}(g) = 1$. Comme on a $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) = -4 \times \frac{9}{64} + 3 \times \frac{3}{8} + 1 = \frac{25}{16}$, il vient $\underset{I}{\text{Max}}(g) = \frac{25}{16}$. Par parité de g, si $J = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$,

$\underset{J}{\mathrm{Min}}(g) = 1$ et $\underset{J}{\mathrm{Max}}(g) = \frac{25}{16}$. Enfin, si $(x,y) \in D$, on a $f(x,y) = f\Big(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}\Big) = g\Big(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}\Big)$ (l'image de (x,y) par f ne dépend que du "rayon" $r = \sqrt{x^2+y^2}$) d'où $\underset{D}{\mathrm{Min}}(f) = 1$ et $\underset{D}{\mathrm{Max}}(f) = \frac{25}{16}$.

1.38 **a.** Les fonctions $(x,y) \mapsto x^3 - y^3$ et $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ sont polynomiales donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Comme $x^2 + y^2$ ne s'annule qu'en $(0,0)$, par rapport de fonctions de classe continues, la fonction f est continue sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $|f(x,y) - f(0,0)| = \Big|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\Big| \leqslant \frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}$ or $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} = ||(x,y)||_2$ et $|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} = ||(x,y)||_2$ donc $|f(x,y) - f(0,0)| \leqslant \frac{2||(x,y)||_2^3}{||(x,y)||_2^2} = 2||(x,y)||_2$ donc $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta = \frac{\varepsilon}{2} > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ ||(x,y) - (0,0)||_2 \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x,y) - f(0,0)| \leqslant \varepsilon$ ce qui garantit la continuité de f en $(0,0)$. Ainsi, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. De même, en tant que rapport de telles fonctions, f est de classe C^1 sur U. Par exemple, si $(x,y) \in U$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x(x^3+3xy^2+2y^3)}{(x^2+y^2)^2}$. Par définition, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t-0} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$. Pour $y \in \mathbb{R}^*$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0$ donc $\lim\limits_{y \to 0^+} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ ce qui interdit la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$. Ainsi, f n'est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (on aurait pu vérifier aussi que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe partout mais n'est pas continue en $(0,0)$).

c. Encore une fois, comme f est de classe C^2 sur U, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existe sur U. La quantité $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe si $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t-0}$ admet une limite finie quand t tend vers 0 (par valeurs différentes). Or, comme avant, si $(x,y) \in U$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y(y^3+3x^2y+2x^3)}{(x^2+y^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t-0} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{-t}{t} = -1$. Ainsi, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ n'existe pas car $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t-0} = \frac{1}{t}$ n'a pas de limite finie en 0.

1.39 **a.** f est polynomiale donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2(1-x-y) - x^3y^2 = x^2y^2(3-4x-3y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y(1-x-y) - x^3y^2 = x^3y(2-2x-3y)$. Les points critiques de f sont ceux qui vérifient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow (x = 0$ ou $y = 0$ ou $4x+3y-3 = 2x+3y-2 = 0)$ ce qui donne, en résolvant ce petit système : (x,y) est un point critique de $f \Longleftrightarrow \Big(x = 0$ ou $y = 0$ ou $(x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3})\Big)$.

b. Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que f y est de classe C^1, si f admet en (a,b) un extremum local, alors (a,b) est un point critique pour f donc ce ne peut être qu'en les points $(x_0,0)$, $(0,y_0)$ ou en $\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\Big)$.

<u>Méthode 1</u> : brutale et superflue dans ce cas

• <u>En $(0,0)$</u> : $f(x,-x) = x^5$ qui change de signe au voisinage de $x = 0$ donc f n'admet en $(0,0)$ ni un maximum ni un minimum local, c'est un point selle !

• <u>En $(1,0)$</u> : $f(1,y) = -y^3$ qui change de signe au voisinage de $y = 0$ donc f n'admet en $(1,0)$ ni un maximum ni un minimum local, c'est un point selle !

• <u>En $(x_0,0)$ avec $x_0 > 1$</u> : soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $||(x,y) - (x_0,0)||_\infty \leqslant \frac{x_0-1}{2}$, par inégalité triangulaire : $1 - x - y = 1 - x_0 + x_0 - x - y \leqslant 1 - x_0 + |x_0 - x| + |y| \leqslant 1 - x_0 + 2 \times \frac{x_0-1}{2} = 0$ donc $1 - x - y \leqslant 0$. De plus, $x \geqslant x_0 - \frac{x_0-1}{2} > 0$. Ainsi, $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y) \leqslant 0$ donc f admet en $(x_0,0)$ un maximum local.

• <u>En $(x_0,0)$ avec $x_0<0$</u> : soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $||(x,y)-(x_0,0)||_\infty\leqslant -\dfrac{x_0}{2}$. Alors $x\leqslant x_0-\dfrac{x_0}{2}=\dfrac{x_0}{2}<0$ et $1-x-y\geqslant 1-\dfrac{x_0}{2}+\dfrac{x_0}{2}=1$ car $-y\geqslant -|y|$. Ainsi, $f(x,y)=x^3y^2(1-x-y)\leqslant 0$ donc f admet en $(x_0,0)$ un maximum local.
• <u>En $(x_0,0)$ avec $0<x_0<1$</u> : soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $||(x,y)-(x_0,0)||_\infty\leqslant \dfrac{1}{2}\mathrm{Min}(x_0,1-x_0)=r$. Comme avant, $x>0$ car $x\geqslant x_0-r\leqslant x_0-\dfrac{x_0}{2}>0$ et $1-x-y=1-x_0+x_0-x+y\geqslant 1-x_0-2r\geqslant 0$ car $x_0-x\geqslant -|x_0-x|\geqslant -r$ et $y\geqslant -|y|\geqslant -r$. Ainsi, $f(x,y)=x^3y^2(1-x-y)\geqslant 0$ donc f admet en $(x_0,0)$ un minimum local.

• <u>En $(0,y_0)$ avec $y_0\neq 0$ et $y_0\neq 1$</u> : $f(x,y_0)=x^3y_0^2(1-y_0-x)\underset{0}{\sim}x^3y_0^2(1-y_0)$ qui change de signe au voisinage de $x=0$ donc f n'admet en $(0,y_0)$ ni un maximum ni un minimum local, c'est un point selle !

• <u>En $(0,1)$</u> : $f(x,1)=-x^4\leqslant 0$ alors que $f(x,1-2x)=x^4(1-2x)^2\geqslant 0$ donc f change de signe au voisinage du point $(0,1)$. Ainsi, f n'admet en $(0,1)$ ni un maximum ni un minimum local, c'est un point selle !

• <u>En $(1/2,1/3)$</u> : on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2xy^2(3-4x-3y)-4x^2y^2$ donc $r=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{9}$, mais aussi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=x^3(2-2x-3y)-3x^3y$ donc $t=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{8}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=2yx^2(3-4x-3y)-3x^2y^2$ donc $s=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{12}$. Ainsi, $rt-s^2=\dfrac{1}{144}>0$ avec $r<0$ donc, d'après le cours, f admet en $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$ un maximum local tel que $f\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{432}$ (après calcul).

<u>Méthode 2</u> : élégante mais encore faut-il y penser !
Comme l'expression de f fait intervenir des produits, et que la grande majorité des points critiques sont des points où f est nulle (à part $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$), on peut s'intéresser au signe de f. D'abord, f est nulle sur les trois droites $d_1\ :\ x=0$, $d_2\ :\ y=0$ et $d_3\ :\ x+y=1$ et que le signe de $f(x,y)$ est celui du produit $xy^2(1-x-y)$ donc f est positive sur les trois domaines $D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \text{ et } 1-x-y\geqslant 0\}$, $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\geqslant 0,\ y\leqslant 0 \text{ et } 1-x-y\geqslant 0\}$, $D_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\leqslant 0 \text{ et } 1-x-y\leqslant 0\}$ et elle est négative sur les quatre autres domaines $D_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \text{ et } 1-x-y\leqslant 0\}$, $D_5=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\geqslant 0,\ y\leqslant 0 \text{ et } 1-x-y\leqslant 0\}$, $D_6=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\leqslant 0,\ y\geqslant 0 \text{ et } 1-x-y\geqslant 0\}$ et $D_7=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\leqslant 0,\ y\leqslant 0 \text{ et } 1-x-y\geqslant 0\}$.

• <u>En $(0,0)$</u> : il est à l'intersection de D_1,D_2,D_6 et D_7 où f change de signe donc il s'agit d'un point selle.

• <u>En $(1,0)$</u> : il est à l'intersection de D_1,D_2,D_4 et D_5 où f change de signe donc il s'agit d'un point selle.

• <u>En $(0,1)$</u> : il est à l'intersection de D_1,D_3,D_4 et D_6 où f change de signe donc il s'agit d'un point selle.

• <u>En $(0,y_0)$ avec $y_0\neq 0$ et $y_0\neq 1$</u> : ce point est entre les domaines D_3 et D_4 si $y_0>1$, D_1 et D_6 si $0<y_0<1$ ou D_2 et D_7 si $y_0<0$, à chaque fois f change de signe au voisinage de $(0,y_0)$ donc c'est encore un point selle.

• <u>En $(x_0,0)$ avec $x_0>1$ ou $x_0<0$</u> : ce point est entre les domaines D_4 et D_5 si $x_0>1$ ou entre les domaines D_6 et D_7 si $x_0<0$ donc f reste négative au voisinage de $(x_0,0)$ donc f admet en ce point un maximum local.

• <u>En $(x_0,0)$ avec $0<x_0<1$</u> : ce point est entre les domaines D_1 et D_2 donc f reste positive au voisinage de $(x_0,0)$ donc f admet en ce point un minimum local.

• <u>En $(1/2,1/3)$</u> : f est continue sur le fermé borné (compact) D_1 (c'est le triangle entre les trois droites

d_1, d_2, d_3) donc y est bornée et y atteint ses bornes. Or $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{432}$ et f est nulle sur les bords de ce triangle. Ainsi, f admet son maximum sur D_1 en un point intérieur à D_1 et c'est donc forcément en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$. Ainsi, f admet en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ un maximum local.

Comme $f(x,1) = -x^4$ et $f(x,-x) = x^5$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x, 1-2x) = +\infty$ donc f n'est ni majorée, ni minorée donc elle n'admet pas d'extremum absolu.

1.40 **a.** Soit $x \in [a;b]$ et $w_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $w_x(t) = v_t(x) = (x, \varphi_t(x), \varphi_t'(x)) = v(x) + t(0, \varphi(x), \varphi'(x))$. Comme les trois coordonnées de w_x sont affines en fonction de t, elles sont continues sur $\mathbb{R}$ donc w_x l'est aussi par théorème. Or $w_x(0) = v_0(x) = v(x) \in U$ par hypothèse et U est un ouvert donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(v(0), \varepsilon) \subset U$. Par continuité de w_x en 0, $\exists \alpha > 0,\ \forall t \in [-\alpha;\alpha],\ |w_x(t) - w_x(0)| = |v_t(x) - v(x)| < \varepsilon$. Ainsi, $\forall t \in [-\alpha;\alpha],\ |v_t(x) - v(x)| < \varepsilon$ donc $v_t(x) \in B(v(0), \varepsilon) \subset U$ d'où $v_t(x) \in U$.

b. D'abord, l'intégrale I_{φ_t} est bien définie car, par opérations, $x \mapsto f(v_t(x)) = f(x, \varphi(x)+tg(x), \varphi'(x)+tg'(x))$ est continue sur le segment $[a;b]$. Dérivons sous le signe somme en définissant $\varphi : [-\alpha;\alpha] \times [a;b] \to \mathbb{R}$ par la relation $\varphi(t,x) = f(v_t(x)) = f(x, \varphi(x) + tg(x), \varphi'(x) + tg'(x))$.

- $\forall x \in [a;b]$, $t \mapsto \varphi(t,x)$ est de classe C^1 sur $[-\alpha;\alpha]$ par la règle de la chaîne et on a la relation suivante : $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) = g(x)\frac{\partial f}{\partial y}(v_t(x)) + g'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(v_t(x))$.
- $\forall t \in [-\alpha;\alpha]$, $x \mapsto \varphi(t,x)$ est continue sur le segment $[a;b]$ donc y est intégrable. De plus, l'application $x \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x)$ est continue sur $[a;b]$ par opérations.
- Comme f est de classe C^2 sur U, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ y sont de classe C^1 donc continues. Comme φ et g sont de classe C^1 sur $[a;b]$, φ_t est de classe C^1 sur $[a;b]$ donc $(t,x) \mapsto v_t(x) = (x, \varphi(x)+tg(x), \varphi'(x)+tg'(x))$ est continue sur le fermé borné $K = [-\alpha;\alpha] \times [a;b]$. Par opérations, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ est continue sur K donc elle y est bornée par le théorème des bornes atteintes. Il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall (t,x) \in K$, $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant M = \psi(t)$ et ψ est continue et intégrable sur $[a;b]$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, h est dérivable sur $[-\alpha;\alpha]$ donc en particulier en 0 où l'on a $h'(0) = \int_a^b \left(g(x)\frac{\partial f}{\partial y}(v_0(x)) + g'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(v_0(x))\right)dx$. Ainsi, $h'(0) = \int_a^b g(x)\frac{\partial f}{\partial y}(v(x))dx + \int_a^b g'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(v(x))dx$ par linéarité. Dans la seconde intégrale, on pose $u(x) = g(x)$ et $w(x) = \frac{\partial f}{\partial z}(v(x))$, u et w sont bien de classe C^1 sur $[a;b]$ car f est de classe C^2 sur U. Comme $w'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(v(x))\right)$, $u(a) = u(b) = 0$, par intégration par parties, on trouve $\int_a^b g'(x)\frac{\partial f}{\partial z}(v(x))dx = -\int_a^b g(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(v(x))\right)dx$ de sorte qu'on a comme attendu $h'(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(v(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(v(x))\right)\right]g(x)dx$ par linéarité de l'intégrale.

c. Posons $c : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(v(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(v(x))\right)$, la question précédente montre que $\int_a^b c(x)g(x)dx = 0$ pour toute fonction $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $g(a) = g(b) = 0$. Par la règle de la chaîne, on obtient la relation $c(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(v(x)) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(v(x)) - \varphi'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(v(x)) - \varphi''(x)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(v(x))$ donc c est de classe C^1 car φ et f sont supposées de classe C^3. Si on prend $g(x) = c(x)(x-a)(b-x)$, alors g est bien de classe C^1 sur $[a;b]$ et, pour $x \in [a;b]$, $c(x)g(x) = c^2(x)(x-a)(b-x) \geqslant 0$ donc $\int_a^b c(x)g(x)dx = 0 \Longrightarrow \forall x \in [a;b],\ c^2(x)(x-a)(b-x) = 0$

donc $\forall x \in]a;b[,\ c(x) = 0$. Enfin, par continuité de c en a et en b, on en déduit que $c(a) = c(b) = 0$ donc c est la fonction nulle sur $[a;b]$ et $\forall x \in [a;b],\ \frac{\partial f}{\partial y}(\nu(x)) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\nu(x)) - \varphi'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\nu(x)) - \varphi''(x)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\nu(x)) = 0$.

1.41 **a.** On définit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y,z) = z - g(x,y)$ de sorte que $S\ :\ f(x,y,z) = 0$. Les points réguliers $M = (x,y,z)$ de S sont ceux pour lesquels on a $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y,z) \neq (0,0,0)$ et ce vecteur $\overrightarrow{v}$ est alors normal au plan tangent Π à la surface S en M. Or $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y,z) = \overrightarrow{k} - \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\overrightarrow{i} - \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\overrightarrow{j}$ de sorte que g vérifié la propriété (P) si et seulement si $\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y)|\overrightarrow{u}\right) = 0 \iff 2\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0$ car $\mathcal{B}$ est orthonormée.

Ainsi, g vérifié (P) si et seulement si g est solution de (E).

b. φ est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi(x,y) = (0,0) \iff x = y = 0$ donc $\text{Ker}(\varphi) = \{(0,0)\}$ de sorte que φ est injectif. φ est donc un automorphisme car $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie. On résout le système $(x',y') = \varphi(x,y) = (x-2y,y) \iff (x = x'+2y', y' = y)$. Ainsi $\varphi^{-1}(x',y') = \psi(x',y') = (x'+2y',y')$.

c. Si on pose $h(s,t) = g \circ \psi(s,t) = g(s+2t,t)$, alors h est de classe C^1 par composée car g et ψ le sont puis $\frac{\partial h}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial g}{\partial x}(s+2t,t)$ et $\frac{\partial h}{\partial t}(s,t) = 2\frac{\partial g}{\partial x}(s+2t,t) + \frac{\partial g}{\partial y}(s+2t,t)$ par la règle de la chaîne.

d. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ solution de (E), alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$. Comme φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ d'après **b.**, on peut aussi écrire $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ 2\frac{\partial g}{\partial x}(\psi(s,t)) + \frac{\partial g}{\partial y}(\psi(s,t)) = 0$ ce qui, d'après la question **c.**, s'écrit aussi $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ 2\frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(s,t)) + \frac{\partial g}{\partial y}(\varphi(s,t)) = \frac{\partial h}{\partial t}(s,t) = 0$. On a donc $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ h(s,t) = f(s)$ avec f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = h(\varphi(x,y)) = f(x-2y)$.

Réciproquement, si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = f(x-2y)$ avec f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f'(x-2y) - 2f'(x-2y) = 0$.
Les solutions de (E) sont donc, par analyse-synthèse, les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 avec $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = f(x-2y)$.

1.42 **a.** Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'intégration, $\varphi : (x,y) \mapsto \int_x^y f(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -f(x)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = f(y)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ sont donc continues sur $\mathbb{R}^2$ comme la fonction f. Comme $(x,y) \to y - x$ est de classe C^1 car polynomiale et ne s'annule pas sur D par définition, g est de classe C^1 sur D par opérations.

De plus, $\forall (x,y) \in D,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y f(t)dt - \frac{f(x)}{y-x} = \frac{1}{(y-x)^2}\left(\int_x^y f(t)dt - (y-x)f(x)\right)$. Comme on a $(y-x)f(x) = \int_x^y f(x)dt$, on a la formule plus compacte $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y (f(t)-f(x))dt$.

De même, on a $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y f(t)dt + \frac{1}{y-x}f(y) = \frac{1}{(y-x)^2}\left((y-x)f(y) - \int_x^y f(t)dt\right)$, ou encore $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(y-x)^2}\int_x^y (f(y)-f(t))dt$, relation qu'on aurait pu obtenir aussi car $g(x,y) = g(y,x)$ ce qui montre, en dérivant ceci par rapport à x par la règle de la chaîne, que $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(y,x)$.

b. Soit $h \neq 0$, $g(a,a+h) - g(a) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{a+h} f(t)dt\right) - f(a)$. La fonction $F : h \mapsto \int_a^{a+h} f(t)dt$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ car $F'(h) = f(a+h)$ (f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$) et on a $\forall h \neq 0,\ g(a+h,a) - g(a) = \frac{F(h) - hf(a)}{h}$.
D'après Taylor-Young, puisque F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, le développement limité d'ordre 2 de F en 0 est donné par $F(h) \underset{0}{=} F(0) + F'(0)h + \frac{F''(0)}{2}h^2 + o(h^2)$. Or $F(0) = 0$, $F'(0) = f(a)$ et $F''(0) = f'(a)$, donc

$F(h)-hf(a)\underset{0}{=}\dfrac{f'(a)}{2}h^2+o(h^2)$ d'où $\dfrac{g(a,a+h)-g(a,a)}{h}=\dfrac{f'(a)}{2}+o(1)$. On en déduit que $\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,a)=\dfrac{f'(a)}{2}$.
Comme $g(a+h,a)=g(a,a+h)$, on a aussi $\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a)=\dfrac{f'(a)}{2}$.

c. Si $x\neq y$, d'après **a.**, on a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\dfrac{1}{(y-x)^2}\displaystyle\int_x^y (f(t)-f(x))dt$. En posant $u:t\mapsto f(t)-f(x)$ et $v:t\mapsto -(y-t)$, les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\widetilde{[x;y]}$ donc, par intégration par parties, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\dfrac{1}{(y-x)^2}\displaystyle\int_x^y(f(t)-f(x))dt=\dfrac{1}{(y-x)^2}\Big([u(t)v(t)]_x^y+\displaystyle\int_x^y(y-t)f'(t)dt\Big)=\dfrac{1}{(y-x)^2}\displaystyle\int_x^y(y-t)f'(t)dt$.
Or $\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a)=\dfrac{f'(a)}{2}=f'(a)\times\dfrac{1}{(y-x)^2}\displaystyle\int_x^y(y-t)dt$ car $\displaystyle\int_x^y(y-t)dt=\Big[-\dfrac{-(y-t)^2}{2}\Big]_x^y$. Ainsi, en soustrayant les deux expressions, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a)=\dfrac{1}{(y-x)^2}\displaystyle\int_x^y(y-t)\big(f'(t)-f'(a)\big)dt$ si $(x,y)\in D$.

d. Comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, f' est continue en a. Soit $\varepsilon>0$, il existe donc $\alpha>0$ tel que $\forall t\in]a-\alpha;a+\alpha[$, $|f'(t)-f'(a)|<2\varepsilon$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $||(x,y)-(a,a)||_\infty<\alpha$, traitons deux cas :

- si $x=y$, alors $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right|=\dfrac{|f'(x)-f'(a)|}{2}<\varepsilon$ car $|x-a|<\alpha$.
- si $x\neq y$, avec la question précédente et par inégalité de la moyenne, on obtient la majoration $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)-\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right|\leqslant\dfrac{1}{(y-x)^2}\left|\displaystyle\int_x^y(y-t)|f'(t)-f'(a)|dt\right|<\dfrac{\varepsilon}{(y-x)^2}\left|\Big[-\dfrac{-(y-t)^2}{2}\Big]_x^y\right|=\varepsilon$.

Ceci prouve que $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est continue en (a,a) pour tout $a\in\mathbb{R}$ donc, avec **a.**, que $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De même, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ est aussi continue sur $\mathbb{R}^2$. Par définition, la fonction g est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

1.43 **a.** Par opérations, la fonction f est de classe C^2 (et même C^∞) sur l'ouvert $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Comme $|f(x,y)|\leqslant|xy|\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=|x||y|\leqslant||(x,y)||_2^2$ donc, comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}||(x,y)||_2=0$, par encadrement, on trouve $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$ et f est aussi continue en $(0,0)$. Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0$ en revenant à la définition et, par un calcul brutal, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{x(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}$. Le second calcul n'était pas nécessaire puisque $f(x,y)=-f(y,x)$ (1) donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$ en dérivant (1) par rapport à x avec la règle de la chaîne. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur l'ouvert D par opérations. De plus, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\leqslant\dfrac{|y|(2x^4+4x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2}=2|y|\leqslant2||(x,y)||_2$ et, comme en **a.**, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est aussi continue en $(0,0)$.
Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est aussi continue en $(0,0)$.
Ainsi, par définition, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

c. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t}{t}=1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t}=-1$. On peut aussi calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(t,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t}=0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,t)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t}=0$.

d. Par contraposée du théorème de SCHWARZ, f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

1.44 **a.** En posant les matrices $M=(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $N=M^TAM=(n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, la matrice N est bien symétrique car $(M^TAM)^T=M^TA^TM=N$ puisque $A^T=A$ par hypothèse. Comme N est symétrique, elle peut être décrite par ses coefficients au dessus de la diagonale donc on peut poser $\Phi(M)=(n_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$. En ce sens, Φ peut être considérée de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Par définition du produit matriciel, les coordonnées $n_{i,j}$ dépendent polynomialement (de degré 2) des coordonnées $m_{i,j}$. Ainsi, comme toutes les composantes $n_{i,j}$ sont de classe C^1, d'après le cours, Φ est elle-même de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{n^2}$.

b. La différentielle d'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ en un point $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, si elle existe, est l'unique application linéaire $d_a f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ telle que $f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + d_a f(h) + o(||h||)$.

c. • Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\Phi(I_n+H) - \Phi(I_n) = (I_n+H)^T A(I_n+H) - I_n^T A I_n = A + H^T A + AH + H^T AH - A$ par linéarité de la transposée et en développant le produit. Ainsi, $\Phi(I_n+H) - \Phi(I_n) = H^T A + AH + H^T AH$. L'application $u : M \mapsto M^T A + AM$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $S_n(\mathbb{R})$, elle peut donc être vue comme une application linéaire de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ comme ci-dessus.

• Prenons le produit scalaire canonique $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \mapsto \mathrm{Tr}\,(A^T B) \in \mathbb{R}$ et la norme euclidienne associée $||A||_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^T A)}$, en notant respectivement $L_i(M)$ et $C_j(M)$ la ligne i et la colonne j de la matrice M, $||AB||_2^2 = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\Big)^2 = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (L_i(A)|C_j(B))^2$. Avec CAUCHY-SCHWARZ, on a l'inégalité $(L_i(A)|C_j(B))^2 \leqslant ||L_i(A)||^2 ||C_j(B)||^2 = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\Big) \times \Big(\sum\limits_{\ell=1}^{n} b_{\ell,j}^2\Big)$. Par conséquent, on a la majoration $||AB||_2^2 \leqslant \sum\limits_{1 \leqslant i,j,k,\ell \leqslant n} a_{i,k}^2 b_{\ell,j}^2 = \Big(\sum\limits_{1 \leqslant i,k \leqslant n} a_{i,k}^2\Big) \times \Big(\sum\limits_{1 \leqslant j,\ell \leqslant n} b_{\ell,j}^2\Big) = ||A||_2^2\,||B||_2^2$. Ainsi, $||AB||_2 \leqslant ||A||_2\,||B||_2$ (c'est une norme d'algèbre). Ainsi, $||H^T AH||_2 \leqslant ||H^T||_2\,||AH||_2 \leqslant ||A||_2\,||H||_2^2$ car $||H^T||_2 = ||H||_2$ et on a bien $\Phi(I_n+H) - \Phi(I_n) - u(H) = H^T AH \underset{0}{=} o(||H||_2)$. D'après la définition de la différentielle, on a donc $d_{I_n}\Phi = u$ donc $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d_{I_n}\Phi(H) = H^T A + AH$.

• Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d_{I_n}\Phi(H) = 0 \iff H^T A + AH = 0 \iff H^T A^T = (AH)^T = -AH \iff AH \in A_n(\mathbb{R})$ (matrices antisymétriques) car A est symétrique. Ainsi, $\mathrm{Ker}(d_{I_n}\Phi) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AH \in A_n(\mathbb{R})\}$.

• Comme A est symétrique, pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $d_{I_n}\Phi(H) = H^T A + AH = (AH)^T + AH$ est symétrique. Réciproquement, si M est symétrique, comme A est inversible, on peut poser la matrice $H = \frac{1}{2}A^{-1}M$ et on a $d_{I_n}\Phi(H) = (AH)^T + AH = \frac{M^T}{2} + \frac{M}{2} = M$ donc $\mathrm{Im}\,(d_{I_n}\Phi) = S_n(\mathbb{R})$.

d. L'application $f : M \to AM$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car A est inversible ($f^{-1} : M \to A^{-1}M$). Comme $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, leurs images réciproques par f le sont aussi. D'après la question précédente, on a $\mathrm{Ker}(d_{I_n}\Phi) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, AH \in A_n(\mathbb{R})\} = f^{-1}(A_n(\mathbb{R}))$ et aussi $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, AM \in S_n(\mathbb{R})\} = f^{-1}(S_n(\mathbb{R}))$. Ainsi, $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM \in S_n(\mathbb{R})\}$ et $\mathrm{Ker}(d_{I_n}\Phi)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

e. La fonction $\det$ est polynomiale donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. On sait d'après le cours qu'alors $\det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Or $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ et $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ donc il existe par définition une boule ouverte $U = B(I_n, r)$ centrée en I_n et de rayon $r > 0$ telle que $U \subset GL_n(\mathbb{R})$.

1.45 **a.** Le carré $C = [0;1]^2$ est composé de trois morceaux : $C_1 = \{(x,y) \in C \mid x < y\}$, $C_2 = \{(x,y) \in C \mid x > y\}$ et $C_3 = \{(x,y) \in C \mid x = y\}$. C_3 est la diagonale du carré C et constitue la frontière commune entre les adhérences des triangles C_1 et C_2. Comme K est polynomiale sur C_1 et C_2, elle y est continue. Par contre, la définition de K en les points de C_3, $K(x,x) = x(1-x)$, ne permet pas de conclure directement à la continuité de K car il y a des expressions différentes de $K(x,y)$ dans C_1 et C_2.

Soit $(x_0,x_0)\in C_3$ et $(x,y)\in C$. On va majorer $|K(x,y)-K(x_0,y_0)|$ selon (x,y).

- si $(x,y)\in C_3$, on a $y=x$ et $|K(x,y)-K(x_0,y_0)|=|x(1-x)-x_0(1-x_0)|=|x-x_0|.|1-(x+x_0)|\leqslant|x-x_0|$ car $x+x_0\in[0;2]$ donc $|K(x,y)-K(x_0,y_0)|\leqslant|x-x_0|\leqslant||(x,y)-(x_0,x_0)||_\infty$.
- si $(x,y)\in C_1$, on a $y>x$ et $|K(x,y)-K(x_0,y_0)|=|x(1-y)-x_0(1-x_0)|=|x-x_0-(x-x_0)y+x_0(x_0-y)|$ donc $|K(x,y)-K(x_0,y_0)|\leqslant|x-x_0|+y|x-x_0|+x_0|y-x_0|\leqslant 3||(x,y)-(x_0,x_0)||_\infty$.
- si $(x,y)\in C_2$, on a $y<x$ et $|K(x,y)-K(x_0,y_0)|=|y(1-x)-x_0(1-x_0)|=|y-x_0-(y-x_0)x+x_0(x_0-x)|$ donc $|K(x,y)-K(x_0,y_0)|\leqslant|y-x_0|+x|x-x_0|+x_0|x-x_0|\leqslant 3||(x,y)-(x_0,x_0)||_\infty$.

Ainsi, $\forall\varepsilon>0,\ \forall(x,y)\in C,\ ||(x,y)-(x_0,x_0)||_\infty\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\Longrightarrow|K(x,y)-K(x_0,x_0)|\leqslant\varepsilon$ et la fonction f est continue en (x_0,x_0) donc en tout point de C_3. D'après ce qui précède, K est continue sur le carré $C=C_1\cup C_2\cup C_3$.

b. La surface S est définie localement autour du point $M_0=(x_0,y_0,z_0=K(x_0,y_0))$, comme $(x_0,y_0)\in C_1$, par la relation $S\ :\ z-x(1-y)=z-K(x,y)=f(x,y,z)=0$. Comme f est de classe C^1 car polynomiale et que, en ce point M_0 de S on a $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x_0,y_0,z_0)=(-1+y_0,x_0,1)\neq(0,0,0)$, le point M_0 est régulier dans S et une équation du plan tangent P en M_0 à S est donnée par $P\ :\ (y_0-1)(x-x_0)+x_0(y-y_0)+(z-z_0)=0$ qu'on peut simplifier, puisque $z_0=x_0(1-y_0)=x_0-x_0y_0$, en $P\ :\ (y_0-1)x+x_0y+z=x_0y_0$. Un vecteur non nul normal à P est d'après le cours le vecteur gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x_0,y_0,z_0)=(-1+y_0,x_0,1)$.

1.46 **a.** Pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n\ :\ t\mapsto t^ne^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(t)\underset{+\infty}{=}o\big(e^{-t^2/2}\big)\underset{+\infty}{=}o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de Riemann et I_n existe.

b. Dans $I_{n+2}=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{n+1}(te^{-t^2})dt$, on effectue une intégration par parties en posant $u\ :\ t\mapsto t^{n+1}$ et $v\ :\ t\mapsto -\dfrac{e^{-t^2}}{2}$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)v(t)=0$ par croissances comparées. Ainsi, $I_{n+2}=0+\dfrac{n+1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}t^ne^{-t^2}dt=\dfrac{n+1}{2}I_n$.

c. Par parité de $t\mapsto e^{-t^2}$, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=2\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ donc $I_0=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Classiquement, on obtient $I_{2p}=\dfrac{2p-1}{2}I_{2p-2}=\dfrac{2p-1}{2}\times\dfrac{2p-3}{2}I_{2p-4}=\cdots=\dfrac{(2p-1)\times(2p-3)\times\cdots\times 1}{2^p}I_0$ qu'on transforme en $I_{2p}=\dfrac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\cdots.2.1}{(2p)(2p-2)\cdots.2\times 2^p}I_0=\dfrac{(2p)!}{2^{2p+1}p!}\sqrt{\pi}$.

Comme $I_1=\displaystyle\int_0^{+\infty}te^{-t^2}dt=\Big[-\dfrac{e^{-t^2}}{2}\Big]_0^{+\infty}=\dfrac{1}{2}$, de même, $I_{2p+1}=\dfrac{(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2}{2^p}I_1=\dfrac{p!}{2}$.

d. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, par linéarité de l'intégrale, comme tout converge et que l'intégrale des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$ est nulle, on a $\sqrt{\pi}F(x,y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(t^4-2(x+y)t^3+2xyt^2+(x+y)^2t^2-2xy(x+y)t+x^2y^2)e^{-t^2}dt$ puis $\sqrt{\pi}F(x,y)=2I_4+2(2xy+(x+y)^2)I_2+2x^2y^2I_0=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}+(2xy+(x+y)^2)\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}+x^2y^2\sqrt{\pi}$ et enfin $F(x,y)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{2xy+(x+y)^2}{2}+x^2y^2$. Comme F est polynomiale, elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ car toutes ses dérivées partielles à tout ordre sont encore polynomiales.

e. Comme $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=2xy^2+2y+x$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2yx^2+2x+y$, (x,y) est un point critique pour F si et seulement si $2xy^2+2y+x=2yx^2+2x+y=0$. Ceci équivaut, en faisant la somme et la différence de ces deux relations, à $(2xy+3)(x+y)=(2xy+1)(x-y)=0$.

- $2xy+3 = 2xy+1 = 0$ est impossible.
- $x+y = x-y = 0$ revient à $x = y = 0$.
- $2xy+3 = x-y = 0$ conduit à $2x^2+3 = 0$ ce qui est impossible car $x \in \mathbb{R}$.
- $2xy+1 = x+y = 0$ conduit à $2x^2 = 1$ et $y = -x$ donc $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

On a exactement trois points critiques pour F : $M_1 = (0,0)$, $M_2 = \Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)$ et $M_3 = \Big(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)$. Les dérivées partielles secondes de F sont $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = 2y^2+1$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 2x^2+1$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = 4xy+2$.

Au voisinage de $M_1 = (0,0)$: la hessienne de F en $(0,0)$ vaut $H = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et son polynôme caractéristique vaut $\chi_H = X^2 - 2X - 3$ qui admet deux racines de signes opposés car $\det(H) = -3$. Ainsi, $(0,0)$ est un point selle pour F. On pouvait le voir en considérant $F(x,0) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{x^2}{2} \geqslant \dfrac{3}{4} = F(0,0)$ et $F(x,-x) = \dfrac{3}{4} - x^2 + x^4$ donc $F(x,-x) - F(0,0) \underset{0}{\sim} -x^2 < 0$ donc est localement négatif au voisinage de 0 ce qui montre que $F(x,-x) \leqslant F(0,0)$ si x est assez petit.

Au voisinage de M_2 : la hessienne de F en M_2 vaut $H' = H_f(M_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ qui est clairement définie positive donc F admet en M_2 un minimum local.

Au voisinage de M_3 : la hessienne de F en M_3 vaut $H' = H_f(M_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ et on a encore un minimum local pour F en M_3. On pouvait le voir en constatant que $F(-x,-y) = F(x,y)$ donc la surface d'équation $z = F(x,y)$ est invariante par la rotation d'angle π autour de la droite d'équation $x = y = 0$ (axe vertical). Comme M_3 est l'image de M_2 par cette rotation, ce qui se passe au voisinage de M_2 se passe aussi au voisinage de M_3. On a d'ailleurs $F(M_2) = F(M_3) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Mieux, comme $F(x,y) - F\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big) = F(x,y) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{2xy + (x+y)^2}{2} + x^2y^2 = \dfrac{(2xy+1)^2}{4} + \dfrac{(x+y)^2}{2} \geqslant 0$ donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) \geqslant F(M_2) = F(M_3)$ donc F admet en M_2 et M_3 un minimum absolu.

1.47 Avec un dessin en dimension 1, on se rend compte que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 admet un minimum local en x_0, alors $f''(x_0) \geqslant 0$. On s'attend donc à avoir $\Delta f(x_0,y_0) \geqslant 0$ en généralisant !

Méthode 1 : on peut écrire la relation $\mathrm{Tr}\,(H_f(x_0,y_0)) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = \Delta f(x_0,y_0)$ si on pose $H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ la hessienne de f en (x_0,y_0). Si $H_f(x_0,y_0)$ est définie positive, alors ses deux valeurs propres λ_1, λ_2 sont strictement positives par définition. Comme $\mathrm{Tr}\,(H_f(x_0,y_0))$ est la somme de ces valeurs propres, on a $\Delta f(x_0,y_0) > 0$. Le problème est que f peut admettre un minimum local en (x_0,y_0) sans que $H_f(x_0,y_0)$ soit définie positive. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\Delta f(x_0,y_0)$, alors $\mathrm{Tr}\,(H_f(x_0,y_0)) = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ donc, par exemple, $\lambda_1 < 0$. Soit un vecteur propre unitaire v_1 de $H_f(x_0,y_0)$ associé à λ_1. Comme on connaît le développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de (x_0,y_0) qui est $f((x_0+y_0)+v) \underset{v \to (0,0)}{=} f(x_0,y_0) + (\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0,y_0) | v) + \dfrac{v^T H_f(x_0,y_0) v}{2} + o(||v||^2)$. Comme f admet en (x_0,y_0) et que $\mathbb{R}^2$ est un ouvert, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0,y_0) = (0,0)$. En restreignant le développement à $v = tv_1$, on a $f((x_0+y_0)+tv_1) \underset{t \to 0}{=} f(x_0,y_0) + \dfrac{t^2 v_1^T H_f(x_0,y_0) v_1}{2} + o(t^2)$. Or $H_f(x_0,y_0)v_1 = \lambda_1 v_1$ et λ_1 est unitaire donc

$f\big((x_0+y_0)+tv_1\big) \underset{t\to 0}{=} f(x_0,y_0)+\dfrac{\lambda_1 t^2}{2}+o(t^2)$ ce qui montre que $\dfrac{f\big((x_0,y_0)+tv_1\big)-f(x_0,y_0)}{t^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{\lambda_1}{2}$ ce qui contredit la minimalité locale de f au voisinage de (x_0,y_0).

Méthode 2 : soit les deux fonctions $f_1 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par $f_1(x)=f(x,y_0)$ et $f_2(y)=f(x_0,y)$. Puisque f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, f_1 et f_2 sont aussi de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par composition avec les fonctions $\varphi_1 : x\mapsto (x,y_0)$ et $\varphi_2 : y\mapsto(x_0,y)$ car $f_1=f\circ\varphi_1$ et $f_2=f\circ\varphi_2$. De plus, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f_1'(x)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)$, $f_1''(x)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y_0)$ et $f_2'(y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)$, $f_2''(y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y)$. Puisque $\mathbb{R}^2$ est un ouvert et que f admet en (x_0,y_0) un minimum local, d'après le cours, $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x_0,y_0)=(0,0)$ donc $f_1'(x_0)=f_2'(y_0)=0$.

Comme f_1 et f_2 sont de classe C^2, elles admettent en tout point un développement limité d'ordre 2 par le théorème de Taylor-Young. Notamment, $f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} f_1(x_0)+(x-x_0)f_1'(x_0)+\dfrac{(x-x_0)^2}{2}f_1''(x_0)+o\big((x-x_0)^2\big)$ et $f_2(x) \underset{y\to y_0}{=} f_2(y_0)+(y-y_0)f_2'(y_0)+\dfrac{(y-y_0)^2}{2}f_2''(y_0)+o\big((y-y_0)^2\big)$. Comme on a localement les minorations $f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\geqslant 0$ et $f(x_0,y)-f(x_0,y_0)\geqslant 0$ quand x est proche de x_0 et y proche de y_0, cela donne localement $f_1(x)-f_1(x_0)\geqslant 0$ et $f_2(y)-f_2(y_0)\geqslant 0$. Comme $f_1(x)-f_1(x_0) \underset{x\to x_0}{=} \dfrac{(x-x_0)^2}{2}f_1''(x_0)+o\big((x-x_0)^2\big)$ et $f_2(x)-f_2(x_0) \underset{y\to y_0}{=} \dfrac{(y-y_0)^2}{2}f_2''(y_0)+o\big((y-y_0)^2\big)$, les signes précédents imposent que $f_1''(x_0)\geqslant 0$ et $f_2''(y_0)\geqslant 0$, sinon, par exemple $\dfrac{f_1(x)-f_1(x_0)}{(x-x_0)^2} \underset{x\to x_0}{\sim} \dfrac{f_1''(x_0)}{2}<0$ si on avait $f_1''(x_0)<0$ ce qui est absurde.

Par conséquent, $\Delta f(x_0,y_0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)=f_1''(x_0)+f_2''(y_0)\geqslant 0$.

1.48 **a.** La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ par opérations car les fonctions polynomiales $(x_1,\cdots,x_n)\mapsto \sum\limits_{k=1}^n x_k$ et $(x_1,\cdots,x_n)\mapsto \sum\limits_{k=1}^n x_k^2$ et même $\exp$ sont de classe C^1. Pour $(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on calcule le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x_1,\cdots,x_n)=\exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^n x_k^2\Big)\Big(1-2x_1\sum\limits_{k=1}^n x_k,\cdots,1-2x_n\sum\limits_{k=1}^n x_k\Big)$.

Analyse : si $(x_1,\cdots,x_n)$ est un point critique de f, alors $\forall j\in[\![1;n]\!]$, $1-2x_j\sum\limits_{k=1}^n x_k=0$ donc $x_j\neq 0$ et $\sum\limits_{k=1}^n x_k=\dfrac{1}{2x_j}$ donc $x_1=\cdots=x_n=\lambda$ et en reportant dans les équations, $1-2\lambda(n\lambda)=0$ donc $\lambda=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

Synthèse : réciproquement, si $(x_1,\cdots,x_n)=\pm\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2n}},\cdots,\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\Big)$, comme $\sum\limits_{k=1}^n x_k=\pm n\times\dfrac{1}{\sqrt{2n}}=\pm\sqrt{\dfrac{n}{2}}$ et $\sum\limits_{k=1}^n x_k^2=n\times\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{2}$, on a $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x_1,\cdots,x_n)=\exp\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)\Big(1-\dfrac{2}{\sqrt{2n}}\sqrt{\dfrac{n}{2}},\cdots,1-\dfrac{2}{\sqrt{2n}}\sqrt{\dfrac{n}{2}}\Big)=(0,\cdots,0)$.

Ainsi, il y a deux points critiques de f sur $\mathbb{R}^n$ qui sont $a_n=\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2n}},\cdots,\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\Big)$ et $-a_n$.

b. De même, la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ et, pour tout $(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et tout $j\in[\![1;n]\!]$, on calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_j}^2}(x_1,\cdots,x_n)=\Big(-2x_j-2\sum\limits_{k=1}^n x_k-2x_j\Big(1-2x_j\sum\limits_{k=1}^n x_k\Big)\Big)\exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^n x_k^2\Big)$ ce qui montre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_j}^2}(a_n)=\Big(-2\dfrac{1}{\sqrt{2n}}-2\sqrt{\dfrac{n}{2}}-2\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\Big(1-2\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\sqrt{\dfrac{n}{2}}\Big)\Big)e^{-1/2}=-(n+1)\sqrt{\dfrac{2}{en}}$. Si $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$ avec $i\neq j$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x_1,\cdots,x_n)=\Big(-2x_j-2x_i\Big(1-2x_j\sum\limits_{k=1}^n x_k\Big)\Big)\exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^n x_k^2\Big)=\Big(-2x_i-2x_j+4x_ix_j\sum\limits_{k=1}^n x_k\Big)\exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^n x_k^2\Big)$ donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a_n)=\Big(-4\dfrac{1}{\sqrt{2n}}+\dfrac{4}{2n}\sqrt{\dfrac{n}{2}}\Big)e^{-1/2}=-\sqrt{\dfrac{2}{en}}$. Ainsi, la matrice hessienne de f en a_n vaut

$H = -\sqrt{\dfrac{2}{en}}\begin{pmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{pmatrix}$. Soit la matrice symétrique réelle $M = \begin{pmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{pmatrix}$, $M - nI_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1, d'après la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(M - nI_n)) = n-1$ donc n est une valeur propre de M d'ordre de multiplicité supérieure à $n-1$. De plus, en notant $v = (1, \cdots, 1)$, on a $Mv = 2nv$ avec $v \neq 0$ donc $2n \in Sp(M)$ de sorte que $Sp(M) = \{n, 2n\} \subset \mathbb{R}_+^*$ (avec $\chi_M = (X-n)^{n-1}(X-2n)$). Ainsi, M est symétrique définie positive donc H est symétrique définie négative ce qui montre que f admet en a_n un maximum local.

c. Comme $f(-x_1, \cdots, -x_n) = -f(x_1, \cdots, x_n)$, puisque f admet en a_n un minimum local, la fonction f admet un maximum local en $-a_n$ car si $\forall x \in B(a_n, r),\ f(x) \geqslant f(a_n)$, alors $\forall -x \in B(-a_n, r),\ f(-x) \leqslant f(-a_n)$.

d. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|f(x)| \leqslant \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|\right) \exp\left(-\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)$ et on sait que $||x||_1 \leqslant \sqrt{n}||x||_2$ (par Cauchy-Schwarz) donc $|f(x)| \leqslant g(||x||_2)$ avec $g : r \mapsto \sqrt{n}re^{-r^2}$. Comme $\lim\limits_{r \to +\infty} g(r)$ par croissances comparées, on a bien $\lim\limits_{||x||_2 \to +\infty} f(x) = 0$ par encadrement.

e. Posons $\alpha_n = f(a_n) > 0$, il existe $r_n > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ||x||_2 \geqslant r_n \Longrightarrow |f(x)| \leqslant \frac{\alpha_n}{2}$ d'après la question précédente. La fonction f étant continue sur le fermé borné $K_n = B_f(0, r_n)$, comme on est en dimension finie, d'après le théorème des bornes atteintes, f admet un maximum absolu sur K_n. Comme f est inférieure à $\frac{\alpha_n}{2}$ sur la frontière de K_n et que $f(a_n) = \alpha_n > \frac{\alpha_n}{2}$, le maximum de f sur K_n est atteint dans l'intérieur de K_n, c'est-à-dire dans l'ouvert $\overset{\circ}{K_n} = B(0, r_n)$ donc en un point critique, donc en a_n ou en $-a_n$ avec les calculs de la question **a.**. Mais $f(a_n) > 0$ et $f(-a_n) < 0$ donc $m_n = \underset{K_n}{\mathrm{Max}}(f) = f(a_n)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a deux possibilités :

- Si $x \in K_n$, alors $f(x) \leqslant m_n = f(a_n)$.
- Si $x \notin K_n$, alors $f(x) \leqslant \frac{\alpha_n}{2} \leqslant f(a_n)$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \leqslant f(a_n) = m_n$ donc $\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\mathrm{Max}}\ f(x) = f(a_n)$ et f admet bien en a_n un maximum absolu.

1.49 La fonction $x \mapsto ||x||$ est de classe C^2 par composée sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ car $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ et que la fonction $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_1^2 + \cdots + x_n^2$ est polynomiale donc C^2 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et que $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, la fonction $F : x \mapsto f\left(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Pour $k \in [\![1; n]\!]$, on a $\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(x) = \dfrac{2x_k}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} f'(||x||) = \dfrac{x_k}{||x||} f'(||x||)$. On dérive une fois de plus et on a $\dfrac{\partial^2 F}{\partial {x_k}^2}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} f'(||x||) - \dfrac{2x_k^2}{2(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{3/2}} f'(||x||) + \dfrac{4x_k^2}{4(x_1^2 + \cdots + x_n^2)} f''(||x||)$ qui se met sous forme plus compacte en $\dfrac{\partial^2 F}{\partial {x_k}^2}(x) = \dfrac{f'(||x||)}{||x||} - \dfrac{x_k^2 f'(||x||)}{||x||^3} + \dfrac{x_k^2 f''(||x||)}{||x||^2}$.

Or, par hypothèse, on a $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \Delta F(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2 F}{\partial {x_k}^2}(x) = 0$ donc, en regroupant tous les termes, on obtient $\dfrac{nf'(||x||)}{||x||} - \dfrac{||x||^2 f'(||x||)}{||x||^3} + \dfrac{||x||^2 f''(||x||)}{||x||^2} = \dfrac{(n-1)f'(||x||)}{||x||} + f''(||x||) = 0$. Comme la fonction $x \mapsto ||x||$ est surjective de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ tf''(t) + (n-1)f'(t) = 0$. Ainsi, f' est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $(E)\ :\ ty' + (n-1)y = 0$ qu'on sait résoudre et $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t > 0,\ f'(t) = \dfrac{\lambda}{t^{n-1}}$. Traitons deux cas :

- Si $n = 1$, on a donc $\forall t > 0,\ f'(t) = \lambda$ donc, comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle, $\exists \mu \in \mathbb{R},\ \forall t > 0,\ f(t) = \lambda t + \mu$ et f est affine ce qui est logique pour une fonction dont la dérivée seconde est nulle !
- Si $n = 2$, on a donc, à nouveau, $\exists \mu \in \mathbb{R},\ \forall t > 0,\ f(t) = \lambda \ln(t) + \mu$.
- Si $n \geqslant 3$, il vient, encore, $\exists \mu \in \mathbb{R},\ \forall t > 0,\ f(t) = -\dfrac{\lambda}{(n-2)t^{n-2}} + \mu$.

1.50 **a.** Comme $(x,y) \mapsto x^2$, $(x,y) \mapsto y^2$ et $(x,y) \mapsto xy$ sont polynomiales donc de classe C^1 sur Ω et que la dernière ne s'annule pas, la fonction f est de classe C^1 sur Ω par inverse et somme de fonctions de classe C^1.

b. Les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto 2x - \dfrac{a}{x^2 y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto 2y - \dfrac{a}{xy^2}$ sont continues sur Ω pour les mêmes raisons et on a l'expression du gradient : $\forall (x,y) \in \Omega,\ \overrightarrow{\text{grad}} f(x,y) = \left(2x - \dfrac{a}{x^2 y}, 2y - \dfrac{a}{xy^2}\right)$.

c. Comme $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t,t) = \lim\limits_{t \to 0^+} \left(2t^2 + \dfrac{a}{t^2}\right) = +\infty$ alors que $\lim\limits_{t \to 0^+} (t,t) = (0,0)$, la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

d. Comme Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si f admet en un point un extremum local, ce point sera un point critique de f d'après le cours. Or, si $\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y) = (0,0)$ pour $(x,y) \in \Omega$, on a $2x - \dfrac{a}{x^2 y} = 0$ (1) et $2y - \dfrac{a}{xy^2} = 0$ (2). En multipliant (1) et (2), il vient $4xy = \dfrac{a^2}{x^3 y^3}$ donc $(xy)^4 = \dfrac{a^2}{4}$ d'où $xy = \sqrt{\dfrac{a}{2}}$. Ainsi, en reportant ceci dans (1) et en multipliant par x, $2x^2 = \sqrt{2a}$ donc $x = \left(\dfrac{a}{2}\right)^{1/4} = x_0$. Par symétrie entre x et y dans ces équations, $y = \left(\dfrac{a}{2}\right)^{1/4} = y_0 = x_0$. Il y a un seul point critique de f sur Ω, le point $(x_0, y_0) = \left(\left(\dfrac{a}{2}\right)^{1/4}, \left(\dfrac{a}{2}\right)^{1/4}\right)$.
La valeur de f en (x_0,y_0) est $f(x_0,y_0) = \sqrt{\dfrac{a}{2}} + \sqrt{\dfrac{a}{2}} + \sqrt{2a} = 2\sqrt{2a} = m$. La fonction f est de classe C^2 sur Ω pour les mêmes raisons qu'avant et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + \dfrac{2a}{x^3 y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 + \dfrac{2a}{xy^3}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{a}{x^2 y^2}$, donc la hessienne de f en (x_0,y_0) vaut $H = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Puisque $\chi_H = X^2 - 12X + 32 = (X-4)(X-8)$, $\text{Sp}(H) = \{4, 8\}$ donc H est une matrice symétrique définie positive et f admet en (x_0,y_0) un minimum local.
Soit $T = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid x \leqslant \sqrt{m},\ y \leqslant \sqrt{m}, xy \geqslant \dfrac{a}{m}\right\}$. Comme T est borné par définition, fermé (grâce aux inégalité larges), et non vide car $(x_0,y_0) \in T$ puisque $\left(\dfrac{a}{2}\right)^{1/4} \leqslant \sqrt{m} = (8a)^{1/4}$ et $\left(\dfrac{a}{2}\right)^{1/2} \geqslant \dfrac{a}{m} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2}\right)^{1/2}$, la fonction continue f admet un minimum absolu sur le “triangle” T par le théorème des bornes atteintes. Si (x,y) est sur la frontière de T, on a $x = \sqrt{m}$ ou $y = \sqrt{m}$ donc $f(x,y) > m = f(x_0,y_0)$ ou $xy = \dfrac{a}{m}$ donc $f(x,y) > m = f(x_0,y_0)$. Ainsi, le minimum de f sur T est atteint à l'intérieur de T donc en un point critique, donc forcément en (x_0,y_0). Ainsi, $\underset{T}{\text{Min}}(f) = f(x_0,y_0) = m$.
Par conséquent, pour $(x,y) \in \Omega$, soit $(x,y) \in T$ et on a vu que $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0) = \underset{T}{\text{Min}}(f)$, soit $(x,y) \notin T$ et,

comme avant, $x > \sqrt{m}$ ou $y > \sqrt{m}$ donc $f(x,y) > m = f(x_0,y_0)$ ou $xy > \dfrac{a}{m}$ donc $f(x,y) > m = f(x_0,y_0)$. On a donc $m = f(x_0,y_0) = \underset{\Omega}{\mathrm{Min}}(f)$ et f admet en (x_0,y_0) un minimum absolu.

1.51 **a.** Par opérations, la fonction f est de classe C^2 (et même C^∞) sur l'ouvert $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Comme $\forall (x,y) \in D,\ |f(x,y)| \leqslant |xy|\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |x||y| \leqslant ||(x,y)||_2^2$ et que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} ||(x,y)||_2 = 0$, par encadrement, on trouve $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et f est aussi continue en $(0,0)$. Par conséquent, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$ en revenant à la définition et, par un calcul brutal, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}$. Le second calcul n'était pas nécessaire puisque $f(x,y) = -f(y,x)$ (1) donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$ en dérivant (1) par rapport à x avec la règle de la chaîne.

c. De même, les fonctions rationnelles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur l'ouvert D par opérations. De plus, $\forall (x,y) \in D,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \dfrac{|y|(2x^4+4x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2} = 2|y| \leqslant 2||(x,y)||_2$ et, comme en **a.**, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est aussi continue en $(0,0)$. Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est aussi continue en $(0,0)$.

Ainsi, par définition, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

d. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = -1$. On peut aussi calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = 0$. Par contraposée du théorème de SCHWARZ, f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ car $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

1.52 **a.** La surface S est définie implicitement par $S\ :\ F(x,y,z) = 0$ avec $F(x,y,z) = f(x,y) - z = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - z$. La fonction f est de classe C^1 par opérations sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et, de même, F est de classe C^1 par opérations sur $(\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R}$. Comme $\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,F(x,y,z) = \left(y - \dfrac{1}{x^2}, x - \dfrac{1}{y^2}, -1\right) \neq (0,0,0)$, la surface S n'admet que des points réguliers donc $\dfrac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)(x-a) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)(y-b) + \dfrac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)(z-c) = 0$ est une équation du plan tangent P à S en $(a,b,c) \in S$. Ceci se simplifie en $P\ :\ \left(b - \dfrac{1}{a^2}\right)(x-a) + \left(a - \dfrac{1}{b^2}\right)(y-b) - (z-c) = 0$.

b. Comme la fonction f est de classe C^1 l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$, si elle admet en un point $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ un extremum local, c'est forcément en un point critique de f d'après le cours. Or, pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, $\nabla f(x,y) = \left(y - \dfrac{1}{x^2}, x - \dfrac{1}{y^2}\right) = (0,0) \iff (yx^2 = xy^2 = 1)$. Or si $yx^2 = xy^2 = 1$, on a $\dfrac{yx^2}{xy^2} = \dfrac{x}{y} = 1$ donc $x = y$ et $x^3 = 1$ impose $x = 1$ donc $y = 1$. Comme réciproquement, si $x = y = 1$, on a bien $\nabla f(x,y) = (0,0)$, le seul point critique de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est $(1,1)$.

Or $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = t$ et $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) = 1$ donc la hessienne de f en $(1,1)$ est la matrice $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et elle est symétrique (normal avec le théorème de SCHWARZ car f est de classe C^2 par opérations sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$) et elle est définie positive car $\chi_H = X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$ donc $\mathrm{Sp}(H) = \{1,3\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, f admet en $(1,1)$ son unique extremum local et c'est un minimum local.

c. Soit $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de K qui converge vers $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n y_n \leqslant 3$, $x_n \geqslant \dfrac{1}{3}$ et $y_n \geqslant \dfrac{1}{3}$ par définition de K donc, en passant à la limite dans ces inégalités larges, on a $xy \leqslant 3$, $x \geqslant \dfrac{1}{3}$ et $y \geqslant \dfrac{1}{3}$ donc $(x,y) \in K$. Ainsi, K est fermé. De plus, si $(x,y) \in K$, on a $x = \dfrac{xy}{y} \leqslant \dfrac{3}{1/3} = 9$ et $y = \dfrac{xy}{x} \leqslant \dfrac{3}{1/3} = 9$ donc K est borné.

d. Comme K est un fermé borné en dimension finie et que f est continue sur K, f admet un minimum absolu sur K par le théorème des bornes atteintes. Comme $(1,1) \in K$, $\underset{K}{\text{Min}}(f) \leqslant f(1,1) = 3$. Mais f est strictement supérieure à 3 sur la frontière de K. En effet, K est un sorte de triangle avec un bord hyperbolique :

- Si $(x,y) \in K$ vérifie $xy = 3$, on a $f(x,y) = 3 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} > 3$.
- Si $(x,y) \in K$ vérifie $x = \dfrac{1}{3}$, on a $f(x,y) = xy + 3 + \dfrac{1}{y} > 3$.
- Si $(x,y) \in K$ vérifie $y = \dfrac{1}{3}$, on a $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + 3 > 3$.

Ainsi le minimum de f sur K est atteint à l'intérieur de K donc en un point critique or il n'en existe qu'un. Par conséquent, f atteint son minimum sur K en $(1,1)$ et $\underset{K}{\text{Min}}(f) = f(1,1) = 3$.

Maintenant, pour un point $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)2$, on a deux possibilités :

- Si $(x,y) \in K$, d'après ce qui précède, $f(xx,y) \geqslant \underset{K}{\text{Min}}(f) = f(1,1) = 3$.
- Si $(x,y) \notin K$, on a $f(x,y) > 3$ en distinguant selon que $xy > 3$ ou $x < \dfrac{1}{3}$ ou $y < \dfrac{1}{3}$.

Par conséquent, $\underset{(\mathbb{R}_+^*)^2}{\text{Min}}(f) = \underset{K}{\text{Min}}(f) = f(1,1) = 3$ et f admet un unique minimum absolu en $(1,1)$.

1.53 **a.** En définissant le cercle $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$, comme $x^2+2y^2 = 8 \Longleftrightarrow \left(\dfrac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 1$, on a $(x,y) \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow \left(\dfrac{x}{2\sqrt{2}}, \dfrac{y}{2}\right) \in C$ et l'application $a : \mathcal{E} \to C$ définie par $a(x,y) = \left(\dfrac{x}{2\sqrt{2}}, \dfrac{y}{2}\right)$ est donc bijective. Or, les applications $b : (x,y) \in C \mapsto z = x + iy \in \mathbb{U}$ et $c : t \in [0; 2\pi[\mapsto \cos(t) + i\sin(t) \in \mathbb{U}$ (argument principal) sont des bijections classiques, de sorte que $\Phi = a^{-1} \circ b^{-1} \circ c$ est une bijection de $[0; 2\pi[$ dans $\mathcal{E}$. Comme $\cos$ et $\sin$ sont de classe C^1 sur $[0; \pi[$, Φ est aussi de classe C^1 (coordonnée par coordonnée).

b. Δ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ car si $(x,y) \in \Delta$, $||(x,y)||_2^2 = x^2 + y^2 \leqslant x^2 + 2y^2 \leqslant 8$ donc $||(x,y)||_2 \leqslant 2\sqrt{2}$ et $h : (x,y) \mapsto x^2 + 2y^2$ est polynomiale donc continue (en dimension finie) et $\Delta = h^{-1}([0; 8])$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue donc est lui-même un fermé. Comme f est continue par théorème généraux sur $\mathbb{R}^2$ donc a fortiori sur Δ, le théorème des bornes atteintes permet de conclure que f est bornée sur Δ et y atteint ses bornes.

c. • Clairement $\forall (x,y) \in \Delta,\ f(x,y) \geqslant \sqrt{1 + 0^2 + 0^2} + 0^2 = 1 = f(0,0)$ et $(0,0) \in \Delta$ donc $\underset{\Delta}{\text{Min}}(f) = f(0,0) = 1$.
• Si le maximum de f sur Δ est atteint en un point intérieur (x,y) à Δ, on a $\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y) = (0,0)$. Or $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + 2x = x\left(\dfrac{1 + 2\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ ce qui montre que $\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow (x,y) = (0,0)$. Mais comme f atteint en $(0,0)$ son minimum et qu'elle n'est pas constante, car par exemple, $f(0,1) = \sqrt{2} > f(0,0)$ avec $(0,1 \in \Delta$, ce n'est pas à l'intérieur de Δ que f admet son maximum sur Δ donc forcément à la frontière de Δ, c'est-à-dire sur $\mathcal{E}$ (ellipse). Pour tout $(x,y) \in \mathcal{E}$, $\exists t \in [0; 2\pi[,\ (x,y) = (2\sqrt{2}\cos(t), 2\sin(t))$ et $f(x,y) = g(t) = \sqrt{1 + 8\cos^2(t) + 4\sin^2(t)} + 8\cos^2(t)$. Il s'agit

donc de déterminer le maximum de g sur $[0;2\pi[$. Or g est dérivable sur $[0;2\pi[$ et on obtient la relation $g'(t)=\dfrac{-8\sin(t)\cos(t)+4\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{1+8\cos^2(t)+4\sin^2(t)}}-16\sin(t)\cos(t)=-2\sin(2t)\left[\dfrac{1}{\sqrt{1+8\cos^2(t)+4\sin^2(t)}}+4\right]$ donc g est décroissante sur $[0;\pi/2]$ et $[\pi;3\pi/2]$ et décroissante sur $[\pi/2;\pi]$ et sur $[3\pi/2;2\pi[$.
Comme $g(0)=11=g(\pi)$ donc g est maximale sur $[0;2\pi[$ en $t=0$ et en π donc f est maximale sur Δ en $(x,y)=(2\sqrt{2},0)$ et $(x,y)=(-2\sqrt{2},0)$ et $\underset{\Delta}{\mathrm{Max}}(f)=11$.

1.54 **a.** H est borné car $\forall (x,y)\in H,\ ||(x,y)||_\infty \leqslant 1$ par construction. De plus, si $\big((x_n,y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de H qui converge vers $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $\forall n\in\mathbb{N},\ -1\leqslant x_n\leqslant 1\ \ (1),\ 0\leqslant y_n\leqslant 1\ \ (2)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=y$ (passage par les coordonnées en dimension finie) donc, en passant à la limite dans les inégalités larges (1) et (2), on obtient $-1\leqslant x\leqslant 1$ et $0\leqslant y\leqslant 1$ ce qui prouve que $(x,y)\in H$. Par caractérisation séquentielle d'un fermé, on en conclut que H est fermé. Or f est continue sur H par théorèmes généraux car $t\mapsto\sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $\forall(x,y)\in H,\ y-yx^2=y(1-x^2)\geqslant 0$. Ainsi, comme f est continue sur un fermé borné en dimension finie, d'après le théorème des bornes atteintes, f admet un minimum et un maximum sur H et ces valeurs sont atteintes.
b. La partie O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car, par exemple, si $(x,y)\in O^2$, en posant $r=\mathrm{Min}(1-x,x+1,y,1-y)>0$, la boule ouverte de centre (x,y) et de rayon r est incluse dans O (faire un dessin). La fonction f est de classe C^1 sur O par théorèmes généraux car $\forall(x,y)\in O,\ y(1-x^2)>0$ donc si f admet un extremum en $(x,y)\in O$, le point (x,y) est un point critique de f. De plus, en écrivant $f(x,y)=x(1-y)\sqrt{y}\sqrt{1-x^2}$, on a la relation $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(1-y)\sqrt{y}\sqrt{1-x^2}+x(1-y)\sqrt{y}\left(\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)=\dfrac{(1-2x^2)(1-y)\sqrt{y}}{\sqrt{1-x^2}}$ et, de même, on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-x\sqrt{y}\sqrt{1-x^2}+x(1-y)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right)\sqrt{1-x^2}=\dfrac{x(1-3y)\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{y}}$. Pour un point (x,y) de O, on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(x,y)=(0,0)$ si et seulement si $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $y=\dfrac{1}{3}$ d'après les expressions précédentes. Il y a donc deux points critiques de f dans O, ce sont les points $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{3}\right)$ et $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{3}\right)$.
Comme f est de classe C^2 sur O par théorèmes généraux, on peut considérer la hessienne de f en ces deux points. Or $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{(1-3y)\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{y}}-\dfrac{x^2(1-3y)}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{y}}$ donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{3}\right)=0$ et les deux hessiennes sont diagonales. De plus, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\dfrac{x(1-2x^2)(1-y)\sqrt{y}}{(1-x^2)^{3/2}}-\dfrac{4x(1-y)\sqrt{y}}{\sqrt{1-x^2}}$ donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{8}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{8}{\sqrt{3}}$. Enfin, on calcule la dernière dérivée partielle seconde $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-\dfrac{x(1-3y)\sqrt{1-x^2}}{4y^{3/2}}-\dfrac{3x\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{y}}$ d'où $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. Ainsi, $H_f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{3}\right)$ a des valeurs propres strictement négatives donc f admet en $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{3}\right)$ un maximum local et $H_f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{3}\right)$ a des valeurs propres strictement positives donc f admet en $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{3}\right)$ un minimum local.
Les valeurs de f en ces points sont $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ et $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.
Les deux études n'étaient pas nécessaires en se rendant compte que $\forall(x,y)\in O,\ f(-x,y)=-f(x,y)$.
c. Le maximum de f sur H existe d'après la question **a.**. En les points (x,y) de la frontière du rectangle

H, on a soit $x = -1$, soit $x = 1$, soit $y = 0$, soit $y = 1$ et, dans tous les cas, $f(x,y) = 0$. Comme f n'est pas une fonction négative sur H car par exemple $f\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\Big) = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} > 0$, le maximum de f sur H n'est pas atteint sur la frontière de H donc il est atteint à l'intérieur O de H, donc en un point critique. Puisque $\forall (x,y) \in H,\ f(-x,y) = -f(x,y)$, la recherche du maximum de f sur H nous permettra aussi de déterminer le minimum de f sur H. Comme il n'existe que deux points critiques de f dans O d'après la question précédente, et que l'on a déjà calculé $f\Big(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3}\Big) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ et $f\Big(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3}\Big) = -\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$, on peut affirmer que f atteint son maximum sur H en $(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3}\Big)$ et son minimum sur H en $\Big(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3}\Big)$ et que $\underset{H}{\mathrm{Max}}(f) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ et $\underset{H}{\mathrm{Min}}(f) = -\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

1.55 **a.** La fonction $h : \mathbb{R}_+^* : x \mapsto x^x = e^{x\ln(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et $\forall x > 0,\ h'(x) = (\ln(x)+1)x^x$ donc h est croissante sur $\Big]0; \dfrac{1}{e}\Big[$ et décroissante sur $\Big]\dfrac{1}{e}; +\infty\Big[$ avec $h\Big(\dfrac{1}{e}\Big) = e^{-1/e}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 1 = 0^0$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0^-} e^t = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty$.

b. Comme $f(x,y) = e^{x\ln(x^2+y^2)}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par opérations. On a $\forall y \in \mathbb{R},\ f(0,y) = 1$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Si $t \neq 0$, $\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \dfrac{e^{t\ln(t^2)}-1}{t} = \dfrac{e^{t\ln(t^2)}-1}{t\ln(t^2)} \times \ln(t^2)$ tend vers $-\infty$ quand t tend vers 0 car $\lim\limits_{t\to 0} t\ln(t^2) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = \exp'(0) = e^0 = 1$ donc $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{t\ln(t^2)}-1}{t\ln(t^2)} = 1$ par composée. Ainsi, la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'existe pas en $(0,0)$, la fonction f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Par continuité de exp en 0, si $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall z \in [-\alpha; \alpha],\ |e^z - 1| \leqslant \varepsilon$. Comme $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$, on a $|x\ln(x^2+y^2)| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}|\ln(x^2+y^2)|$. Or $\lim\limits_{t\to 0} \sqrt{t}\ \ln(t) = 0$ par croissances comparées, donc il existe $\beta > 0$ tel que $\forall t \in]0;\beta],\ |\sqrt{t}\ \ln(t)| \leqslant \alpha$.
Par conséquent, dès que $||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \beta$, on a $|\sqrt{x^2+y^2}\ \ln(x^2+y^2)| \leqslant \alpha$ et on traite deux cas :
- si $x \geqslant 0$, $|f(x,y) - f(0,0)| = f(x,y) - 1 = e^{x\ln(x^2+y^2)} - 1 \leqslant e^{\sqrt{x^2+y^2}\ \ln(x^2+y^2)} - 1 \leqslant \varepsilon$.
- si $x < 0$, $|f(x,y)-f(0,0)| = 1-f(x,y) = \dfrac{e^{(-x)\ln(x^2+y^2)}-1}{e^{(-x)\ln(x^2+y^2)}} \leqslant e^{(-x)\ln(x^2+y^2)} - 1 \leqslant e^{\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)} - 1 \leqslant \varepsilon$.

On a donc $||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \beta \Longrightarrow |f(x,y) - f(0,0)| \leqslant \varepsilon$ d'où la continuité de f en $(0,0)$ donc sur $\mathbb{R}^2$.

c. On calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \Big(\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2}\Big)f(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \Big(\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\Big)f(x,y)$.
Comme $f(x,y) > 0$, en supposant $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y) = (0,0)$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow xy = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0)$.

- Si $x = 0$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \ln(y^2) = 0 \Longleftrightarrow y = \pm 1$.
- Si $y = 0$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \ln(x^2) + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm e^{-1}$.

Il existe donc 4 points critiques : $(0,1)$, $(0,-1)$, $(e^{-1},0)$ et $(-e^{-1},0)$.

d. <u>Extrema locaux</u> : comme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un ouvert sur lequel f est de classe C^1, si f y admet un extremum local, c'est en un point critique d'après le cours. Comme on a $f(x,y) = f(x,-y)$, la surface S d'équation $z = f(x,y)$ est invariante par la réflexion de plan $y = 0$. Il suffit donc d'étudier f au voisinage de $(0,1)$, $(e^{-1},0)$ et $(-e^{-1},0)$.

• Comme $f(0,1+t) = f(0,1) = 1$, rien à dire dans cette direction. Mais $f(t,1) = e^{t\ln(1+t^2)}$ donc $f(t,1) < 1$ si $t < 0$ et $f(t,1) > 1$ si $t > 0$. Donc f n'admet pas en $(0,1)$ d'extremum local. En $(0,-1)$ non plus donc.

• En ce qui concerne l'étude de f au voisinage des points $(e^{-1},0)$ et $(-e^{-1},0)$, on va montrer que ce sont des extrema locaux en considérant une restriction de f à un fermé borné. Il semble logique de considérer la boule fermée unité $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Comme f est continue sur le fermé borné B (en dimension finie), f y est bornée et y atteint ses bornes. Sur la frontière de B, c'est-à-dire sur le disque unité $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$, la fonction f est constante et vaut 1. Comme les valeurs en ces deux points sont $f(e^{-1},0) = (e^{-2})^{e^{-1}} = e^{-2/e} < 1$ et $f(-e^{-1},0) = (e^{-2})^{-e^{-1}} = e^{2/e} > 1$, on a donc $\underset{B}{\mathrm{Max}}(f) \geqslant e^{2/e}$ et $\underset{B}{\mathrm{Min}}(f) \leqslant e^{-2/e}$. Ainsi, la restriction de f à B n'atteint pas son minimum et son maximum sur sa frontière D mais dans son intérieur $\overset{\circ}{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$, c'est-à-dire sur un ouvert. On sait alors d'après le cours que ce minimum et ce maximum sont atteints en des points critiques de f, qui ne peuvent être d'après l'étude précédente que les points $(e^{-1},0)$ et $(-e^{-1},0)$. On en déduit donc que f atteint son minimum absolu sur B en $(e^{-1},0)$ et que $\underset{B}{\mathrm{Min}}(f) = f(e^{-1},0) = e^{-2/e}$ et que f atteint son maximum absolu sur B en $(-e^{-1},0)$ avec $\underset{B}{\mathrm{Max}}(f) = f(-e^{-1},0) = e^{2/e}$. Ces points sont donc des extrema locaux de f en tant que fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, f admet en $(e^{-1},0)$ un minimum local (sur B) et f admet en $(-e^{-1},0)$ un maximum local.

d. Si $x \in]0;1[$, $f(x,0) = e^{x\ln(x^2)} < 1 = f(0,0)$ donc f n'admet pas en $(0,0)$ un minimum local.

Si $x \in]-1;0[$, $f(x,0) = e^{x\ln(x^2)} > 1 = f(0,0)$ donc f n'admet pas en $(0,0)$ un maximum local.

f n'admet donc pas d'extremum local au point $(0,0)$.

<u>Extrema absolus</u> : on a $f(x,0) = (x^2)^x$ qui tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$ donc f n'admet pas de minimum absolu car f est strictement positive sur $\mathbb{R}^2$. Ce qui précède montre que $\underset{\mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}}\, f = 0$ alors que 0 ne peut pas être une valeur prise par la fonction f. De même $f(x,0) = (x^2)^x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ donc f n'admet pas de maximum absolu sur $\mathbb{R}^2$ car f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^2$.

1.56 **a.** Pour tout $A \in \mathbb{R}$, par définition il existe $r \geqslant 1$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ||x|| \geqslant r \Longrightarrow \dfrac{f(x)}{||x||} \geqslant A$. Prenons $A = f(0) \in \mathbb{R}$, il existe donc $r \geqslant 1$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ||x|| \geqslant r \Longrightarrow \dfrac{f(x)}{||x||} \geqslant f(0)$. Comme f est continue (puisqu'elle y est C^1) sur la boule fermée bornée $K = B_f(0,r)$ (en dimension finie), la fonction f est bornée sur K et y atteint ses bornes donc on peux poser $m = \underset{K}{\mathrm{Min}}(f) = f(a)$ avec $a \in K$. Traitons deux cas :

- <u>Si $x \in K$</u>, par définition, on a $f(x) \geqslant m$.
- <u>Si $x \notin K$</u>, $||x|| > r$ donc $f(x) \geqslant \dfrac{f(x)}{||x||} \geqslant f(0) \geqslant m$.

Ainsi, f est minore sur $\mathbb{R}^n$ et on a $\underset{\mathbb{R}^n}{\mathrm{Min}}(f) = m$. Or f est de classe C^1 et $\mathbb{R}^n$ est un ouvert donc, comme f admet en a un minimum absolu donc local, a est un point critique pour f donc $\nabla f(a) = 0$.

b. Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, la fonction $f_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f_v(x) = f(x) - (x|v)$ est de classe C^1 car f l'est et que $g_v : x \mapsto (x|v)$ est polynomiale en les coordonnées de x donc de classe C^1 aussi, d'ailleurs elle est aussi linéaire donc continue car on est en dimension finie. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \nabla f_v(x) = \nabla f(x) - \nabla g_v(x)$ par linéarité des dérivées partielles. Or, si $v = (v_1, \cdots, v_n)$ et $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $g_v(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k v_k$ donc $\nabla g_v(x) = (v_1, \cdots, v_n) = v$. Ainsi, $\nabla f_v(x) = \nabla f(x) - v$.

De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ |(x|v)| \leqslant ||x||\,||v||$ donc, par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ |f_v(x)| = |f(x) - (x|v)| \geqslant \big||f(x)| - |(x|v)|\big| \geqslant |f(x)| - |(x|v)| \geqslant |f(x)| - ||x||\,||v||.$$

Ainsi, dès que $x \neq 0$, $||x|| > 0$ donc $\dfrac{|f_v(x)|}{||x||} \geqslant \dfrac{|f(x)|}{||x||} - ||v||$. Or $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} \dfrac{|f(x)|}{||x||} = +\infty$ par hypothèse donc, par minoration, on a aussi $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} \dfrac{|f_v(x)|}{||x||} = +\infty$.

D'après la question précédente appliquée à f_v, il existe un point $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f_v(x) = \nabla f(x) - v = 0$ donc $\nabla f(x) = v$. Puisque ceci est valable pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, la fonction ∇f est surjective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

1.6 Officiel de la Taupe

1.57 La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{A, B\}$ où $A = (0, 1)$ et $B = (1, 0)$ (là où ce qui est dans les racines s'annule). Bien sûr qu'en notant $M = (x, y)$, on a $f(M) = AM + BM$.

• Si $OM \geqslant 3$, il est clair géométriquement que $AM \geqslant 2$ et $BM \geqslant 2$. Comme $f(O) = 2$ et que f est continue sur le compact $B_f(O, 3)$, elle y est bornée et y atteint ses bornes donc f admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$ (qui est même atteint à l'intérieur du compact $B_f(O, 3)$).

• Comme $f(x, x) = 2\sqrt{x^2 + (1-x)^2}$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x, x) = +\infty$ donc f n'est pas majorée.

Si f admet en $M \neq A$ et $M \neq B$ un extremum local, M est un point critique pour f donc $\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{\partial f}{\partial y}(M) = 0$ donc on obtient le système $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + (1-y)^2}} - \dfrac{1-x}{\sqrt{y^2 + (1-x)^2}} = 0$ et $\dfrac{y}{\sqrt{y^2 + (1-x)^2}} - \dfrac{1-y}{\sqrt{x^2 + (1-y)^2}} = 0$.

En effectuant une combinaison linéaire de ces deux équations (de manière à faire disparaître une des deux racines) : $xy - (1-x)(1-y) = 0 \iff x + y = 1$. Les éventuels points critiques sont donc sur (AB).

On pouvait le justifier géométriquement, si M est un point du plan et P sa projection orthogonale sur (AB), alors $AM + BM \geqslant AP + BP$ par PYTHAGORE.

Comme $f(x, 1-x) = \sqrt{2}|x| + \sqrt{2}|1-x|$, on a $f(x, 1-x) = \sqrt{2}$ si $x \in [0; 1]$ et $f(x, 1-x) = \sqrt{2}(2x-1) > \sqrt{2}$ si $x > 1$ et $f(x, 1-x) = \sqrt{2}(1-2x) > \sqrt{2}$ si $x < 0$. Par conséquent, les minima locaux et absolus de la fonction f sont sur le segment $[AB]$.

On pouvait aussi le faire avec la différentielle, en effet pour un vecteur v :
$f(M+v) = ||\overrightarrow{AM} + v|| + ||\overrightarrow{BM} + v|| = \sqrt{||AM||^2 + 2(\overrightarrow{AM}|v) + ||v||^2} + \sqrt{||BM||^2 + 2(\overrightarrow{BM}|v) + ||v||^2}$.

Quand $||v||$ tend vers 0 : $f(M+v) = f(M) + \left(\dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM} + \dfrac{\overrightarrow{BM}}{BM}\Big|v\right) + o(||v||)$ par DL. Ainsi $\overrightarrow{\text{grad}}f(M) = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM} + \dfrac{\overrightarrow{BM}}{BM}$ donc les points critiques sont ceux pour lesquels ce vecteur est nul ce qui correspond bien à $M \in]AB[$.

1.58 f va d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$, elle est de classe C^1 sur U par composée, rapport de fonctions de classe C^1 ($x^2 + y^2 > 0$ et $x \neq 0$ dans U). La matrice jacobienne de f en $a = (x_0, y_0) \in U$ est $\begin{pmatrix} \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} & \dfrac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \\ -\dfrac{y_0}{x_0^2} & \dfrac{1}{x_0} \end{pmatrix}$ dont le déterminant vaut $\dfrac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{x_0} > 0$. Le théorème d'inversion globale nous permet d'affirmer que f est un C^1-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Bien sûr ici, on n'avait pas besoin de ce théorème car si $(r, t) \in U$ et $(x, y) \in U$, on a par calculs (car $x > 0$) : $(r, t) = f(x, y) \iff \left(r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } t = \dfrac{y}{x}\right) \iff x = \dfrac{r}{\sqrt{1+t^2}}$ et $y = \dfrac{tr}{\sqrt{1+t^2}}\Big)$. Donc f est bien bijective de U dans U et $f^{-1} : (r, t) \mapsto \left(\dfrac{r}{\sqrt{1+t^2}}, \dfrac{tr}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ est aussi de classe C^1 par théorèmes généraux.

Par conséquent : f est bien un C^1-difféomorphisme de U dans U (même un C^∞-difféomorphisme).

1.59 La matrice hessienne de h est $\left(\dfrac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x, y, z)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$ où $x_1 = x$, $x_2 = y$ et $x_3 = z$. Dans notre cas, $H = \begin{pmatrix} 0 & z+1 & y \\ z+1 & 0 & x+1 \\ y & x+1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule et on trouve $\chi_H = -X^3 + \big(y^2 + (x+1)^2 + (z+1)^2\big)X + 2(x+1)(z+1)y$.

Comme H est symétrique réelle, elle est diagonalisable et ses valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 vérifie par les relations coefficients/racines : $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$, $\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=-y^2-(x+1)^2-(z+1)^2$ et $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=2(x+1)(z+1)y$. Si H est positive, ses valeurs propres sont positives or $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$ implique que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ donc $y^2+(x+1)^2+(z+1)^2=0 \Longrightarrow y=x+1=z+1=0$.
Par conséquent : H est positive si et seulement si $H=0$ et ceci se passe au point $(-1,0,-1)$.
Revenons maintenant au cas général :
Supposons que f admette en X_0 un minimum local : $\exists r>0,\ \forall v\in\mathbb{R}^3,\ ||v||\leqslant r \Longrightarrow f(X_0+v)\geqslant f(X_0)$. Soit (v_1,v_2,v_3) une base de vecteurs propres de H associés aux valeurs propres $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$. On note (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors la fonction $h_k : t\mapsto f(X_0+tv_k)$ admet un minimum local en 0 (pour $k\in[\![1;3]\!]$) en restreignant l'inégalité ci-dessus. Si on note $\varphi_k : t\mapsto X_0+te_k$, comme $h_k=f\circ\varphi_k$ et d'après le théorème 15.2 : h_k est dérivable (et même de classe C^∞ cr f et φ_k le sont) et, en notant $v_k=\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3$, on a $h_k'(t)=\alpha\dfrac{\partial f}{\partial x}(X_0+tv_k)+\beta\dfrac{\partial f}{\partial y}(X_0+tv_k)+\gamma\dfrac{\partial f}{\partial z}(X_0+tv_k)$. On continue à dériver et on trouve de même :
$$\begin{aligned}h_k''(t)=\;&\alpha^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0+tv_k)+\beta^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0+tv_k)+\gamma^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(X_0+tv_k)\\&+2\alpha\beta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(X_0+tv_k)+2\alpha\gamma\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(X_0+tv_k)+2\beta\gamma\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(X_0+tv_k).\end{aligned}$$
D'après Taylor-Young : $h_k(t)\underset{0}{=}h_k(0)+th_k'(0)+\dfrac{t^2}{2}h_k''(0)+o(t^2)$ mais X_0 est un point critique pour f donc $h_k'(0)=d_{X_0}f(v_k)=\big(\overrightarrow{\text{grad}}f(X_0)|v_k\big)=0$ et on reconnaît $h_k''(0)={}^tV_kHV_k$ si ${}^tV_k=(\alpha\ \beta\ \gamma)$ grâce à la définition de la matrice hessienne : cela donne ${}^tV_kHV_k=\lambda_k||V_k||^2$. Si cette quantité était strictement négative, on aurait un développement limité qui garantirait que h_k est localement strictement inférieure à $h_k(0)$ ce qui contredirait le minimum local.
Les valeurs propres de la matrice hessienne sont donc positives en un minimum local. Bien sûr on aurait pu se servir du développement limité vu en cours à la remarque 14.18 mais c'est hors programme.
Revenons à notre fonction h, son seul point candidat pour être un minimum local est donc $X_0=(-1,0,-1)$ et les valeurs propres de la matrice hessienne sont nulles. Mais le gradient de h en ce point X_0 est $(0,-1,0)$ donc X_0 ne peut pas être un minimum local car ce n'est déjà pas un point critique (on est sur un ouvert).
Au final, h n'a pas de minimum local.

1.60 L'ouvert $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$ est la réunion de deux composantes connexes toutes les deux ouvertes, ce sont $U_1=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ et $U_2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-^*$. La fonction $\varphi_1 : \mathbb{R}_+^*\times\left]0;\pi\right[\to U_1$ définie par $\varphi_1(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$ est de classe C^1 et bijective (changement de variable polaire). De même, la fonction $\varphi_2 : \mathbb{R}_+^*\times\left]-\pi;0\right[\to U_2$ définie par $\varphi_2(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$ est de classe C^1 et bijective.

<u>Analyse</u> Soit $f : U_1\to\mathbb{R}$ de classe C^1 solution de (E) sur U_1, posons $F_1=f\circ\varphi_1$ qui est aussi de classe C^1 par composition mais sur $\mathbb{R}_+^*\times\left]0;\pi\right[$. Par la formule du cours, comme $F_1(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$, on a $\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times]0;\pi[,\ \dfrac{\partial F_1}{\partial\rho}(\rho,\theta)=\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)+\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$ (inutile mais on a aussi $\dfrac{\partial F_1}{\partial\theta}(\rho,\theta)=-\rho\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)+\rho\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$). En notant $x=\rho\cos\theta$ et $y=\rho\sin\theta$, on en déduit que $\rho\dfrac{\partial F_1}{\partial\rho}(\rho,\theta)=x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Puisque f est solution de (E) sur U_1, on a donc $\forall(\rho,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times\left]0;\pi\right[,\ (F)\ :\ \rho\dfrac{\partial F_1}{\partial\rho}(\rho,\theta)-F_1(\rho,\theta)=-\rho^2$. Pour chaque valeur de θ, on a donc une équation différentielle linéaire qu'on sait résoudre classiquement : $\exists C_1(\theta)\in\mathbb{R},\ \forall r\in\mathbb{R}_+^*,\ F_1(r,\theta)=C_1(\theta)r-\dfrac{r^2}{2}$ (la solution particulière $r\mapsto-\dfrac{r^2}{2}$ se voit ou on la trouve par variation de la constante). La fonction C_1 doit être de classe C^1 sur $]0;\pi[$ car f est de classe C^1 sur U_1 (en effet $\dfrac{\partial F_1}{\partial\theta}=C_1'(\theta)$ en cas d'existence). Or, pour $(x,y)\in U_1$, on a $\text{cotan}(\theta)=\dfrac{x}{y}$ donc $\theta=\text{Arccotan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ (facile à définir comme Arctan, Arccotan : $\mathbb{R}\to]0;\pi[$) et, en définissant $h_1 : \mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ par $h_1(t)=C_1(\text{Arccotan}(t))$, $\forall(x,y)\in U_1,\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\,h_1\left(\dfrac{x}{y}\right)-\dfrac{x^2+y^2}{2}$.

On trouve de même que si $f : U_2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 solution de (E) sur U_2, en posant $F_2 = f \circ \varphi_2$, alors il existe une fonction $C_2 :]-\pi;0[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ F_2(r,\theta) = C_2(\theta)r - \dfrac{r^2}{2}$. Pour $(x,y) \in U_2$, on a $\text{cotan}(\theta) = \dfrac{x}{y}$ donc $\theta + \pi = \text{Arccotan}\left(\dfrac{x}{y}\right)$ donc il existe $h_2 : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ (en posant $h_2 : t \mapsto C_2(\text{Arccotan}(t) - \pi))$ de classe C^1 telle que $\forall (x,y) \in U_2,\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}h_2\left(\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{x^2+y^2}{2}$.

Synthèse : réciproquement, soit $f : U_1 \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in U_1,\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}h_1\left(\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{x^2+y^2}{2}$ avec $h_1 : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Alors, f est une fonction de classe C^1 sur U_1 par opérations et on trouve $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}h_1\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}h_1'\left(\dfrac{x}{y}\right) - x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}h_1\left(\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y^2}h_1'\left(\dfrac{x}{y}\right) - y$. Ainsi, en reportant, on a $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - f(x,y) = \left[\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \sqrt{x^2+y^2}\right]h_1\left(\dfrac{x}{y}\right) + \left[\dfrac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y} - \dfrac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y}\right]h_1'\left(\dfrac{x}{y}\right) - x^2 - y^2 = -x^2 - y^2$. Même chose sur U_2.

Conclusion : les solutions de (E) sur U_1 sont les $f : (x,y) \mapsto h_1\left(\dfrac{x}{y}\right)\sqrt{x^2+y^2} - \dfrac{x^2+y^2}{2}$ où h_1 est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et les solutions de l'équation (E) sur U_2 les $f : (x,y) \mapsto h_2\left(\dfrac{x}{y}\right)\sqrt{x^2+y^2} - \dfrac{x^2+y^2}{2}$ où h_2 est C^1 sur $\mathbb{R}_-^*$.

1.61 f est polynomiale donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ qui est un ouvert donc si f admet en $M = (x,y,z)$ un extremum local, on a forcément $\nabla f(M) = \overrightarrow{0} \iff (2x - 2yz, 2y - 2xz, 2z - 2xy) = (0,0,0)$. On en déduit que $y(1-z^2) = 0$ par exemple donc $y = 0$ ou $z = 1$ ou $z = -1$. Par symétrie, on a $\{x,y,z\} \subset \{-1,0,1\}$ et en reportant dans le système : $(x,y,z) \in \big\{(0,0,0),(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)\big\}$.

• $f(t,t,0) = 2t^2 \to +\infty$ quand t tend vers $+\infty$ donc f n'a pas de maximum absolu.

• $f(t,t,t) = 3t^2 - 2t^3 \to -\infty$ quand t tend vers $+\infty$ donc f n'a pas de minimum absolu.

En prévision des calculs futurs, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2$ et, avec Schwarz car f est de classe C^2 puisqu'elle est polynomiale, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = -2z$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = -2y$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = -2x$ donc la matrice hessienne vaut $H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -2z & -2y \\ -2z & 2 & -2x \\ -2y & -2x & 2 \end{pmatrix}$.

• Au voisinage de $(0,0,0)$, $H_f(0,0,0) = 2I_3$ est symétrique définie positive car sa seule valeur propre est $2 > 0$ donc f admet en $(0,0,0)$ un minimum local d'après le cours.

• Au voisinage de $(1,1,1)$, $H_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique est $(X+2)(X-4)^2$ donc $H_f(1,1,1)$ ayant des valeurs propres strictement négatives et strictement positives, f admet en $(1,1,1)$ un point selle, ce qu'on pouvait aussi constater car $f(1,1,1) = 1$ et $f(1+t,1,1-t) = 1+4t^2 > f(1,1,1)$ pour tout $t \neq 0$ et $f(1+t,1+t,1+t) = 1 - 3t^2 - 2t^3 < f(1,1,1)$ pour t non nul et assez petit.

• Au voisinage de $(1,-1,-1)$, $H_f(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique est aussi $(X+2)(X-4)^2$ donc f admet en $(1,-1,-1)$ un point selle, ce qu'on pouvait aussi constater car $f(1,-1,-1) = 1$ et $f(1+t,-1,-1+t) = 1+4t^2 > f(1,1,1)$ pour tout $t \neq 0$ et $f(1-t,-1+t,-1+t) = 1 - 3t^2 + 2t^3 < f(1,1,1)$ pour t non nul et assez petit.

• Comme $f(x,y,z) = f(y,z,x) = f(z,x,y)$, c'est pareil pour les deux derniers points $(-1,1,-1), (-1,-1,1)$ en lesquels f admet aussi des points cols.

1.62 • Avec la convexité (HP), en posant $f : x \mapsto \ln(\sin(x))$ sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, on a $f'(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = \text{cotan}\,(x)$ donc $f''(x) = -\dfrac{1}{\sin^2(x)} < 0$ donc f est strictement concave et on a $f\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c\right) \geqslant \frac{1}{3}f(a) + \frac{1}{3}f(b) + \frac{1}{3}f(c)$ ce qui équivaut à $f\left(\frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{1}{3}\Big(\ln(\sin a) + \ln(\sin b) + \ln(\sin c)\Big) \iff \ln\left(\frac{1}{8}\right) \geqslant \ln(\sin(a)\sin(b)\sin(c))$. Et comme $\ln$ est une fonction croissante, on a bien $\sin(a)\sin(b)\sin(c) \leqslant \dfrac{1}{8}$.

• Sinon, soit $g : K \to \mathbb{R}$ définie par $g(a,b) = \sin(a)\sin(b)\sin\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) = \sin(a)\sin(b)\cos(a+b)$ définie sur $K = \{(a,b) \in \mathbb{R}_+^2 \mid a + b \leqslant \frac{\pi}{2}\}$. g est de classe C^1 sur K et elle admet donc un maximum sur K (car continue sur le compact K). Or K est un triangle et sur les trois côtés du triangle, g est nulle et g est positive sur K donc le maximum est atteint à l'intérieur de K en un point critique.

Or pour $(a,b) \in \overset{\circ}{K}$, $\dfrac{\partial g}{\partial a}(a,b) = \dfrac{\partial g}{\partial b}(a,b) = 0 \iff \cos(2a+b) = \cos(2b+a) = 0$ après formules de trigonométrie donc $\nabla g(a,b) = \overrightarrow{0} \iff 2a+b = 2b+a = \dfrac{\pi}{2} \iff a = b = \dfrac{\pi}{6}$. Comme il n'y a qu'un point critique, c'est forcément le maximum de g sur K qui vaut donc $\underset{K}{\text{Max}}\, g = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{8}$.

1.63 La fonction f est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ (par opérations car le dénominateur ne s'annule pas).

Cherchons les points critiques de f : $\nabla f(x,y) = (0,0) = \left(y - \dfrac{4}{x^2}, x - \dfrac{2}{y^2}\right)$ équivaut (en divisant) à :

$x^2y - 4 = xy^2 - 2 = 0 \iff \big(x^2y = 4 \text{ et } x = 2y\big) \iff \big(y^2 = 1 \text{ et } x = 2y\big)$.

Il y a donc un seul point critique de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ qui est $a = (2,1)$ et $f(2,1) = 6$.

Méthode 1 : Soit $K = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid xy \leqslant 6 \text{ et } x \geqslant \dfrac{3}{2} \text{ et } y \geqslant 3\right\}$ (faire un dessin). Alors si $(x,y) \in K$, on a $x = \dfrac{xy}{y} \leqslant \dfrac{6}{3} = 2$ et $y = \dfrac{xy}{x} \leqslant \dfrac{6}{3/2} = 4$ donc K est borné. De plus K est fermé car $K = F_1 \cap F_2 \cap F_3$ avec $F_1 = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid xy \leqslant 6\right\}$ et $F_2 = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid x \geqslant \frac{3}{2}\right\}$ et $F_2 = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid y \leqslant 3\right\}$ qui sont fermés car par exemple $F_1 = f_1^{-1}([0;6])$ qui est l'image réciproque d'un fermé par l'application continue $f_1 : (x,y) \mapsto xy$. Ainsi K est compact et f admet donc un minimum absolu sur K. Comme $a \in K$, le minimum est inférieur ou égal à 6. Mais f est strictement supérieure à 6 sur les bords de K (c'est fait pour car par exemple si $xy = 6$ on a $f(x,y) = 6 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y} > 6$) ainsi le minimum de f sur K est atteint à l'intérieur de K donc en un point critique or il n'en existe qu'un donc f atteint son minimum sur K en a : $\underset{K}{\text{Min}}(f) = f(a) = 6$. Mais si $(x,y) \notin K$, on a $f(x,y) > 6$ (c'est fait pour aussi), donc $\underset{(\mathbb{R}_+^*)^2}{\text{Min}}(f) = \underset{K}{\text{Min}}(f) = f(a) = 6$. Ainsi f admet un unique minimum local en a qui est aussi un minimum absolu.

Méthode 2 : on effectue un DL à l'ordre 2 de $D = f(2+h, 1+k) - f(2,1)$ pour connaître son signe :
$D = (2+h)(1+k) + \dfrac{4}{2+h} + \dfrac{2}{1+k} - 6 \underset{0}{=} h + 2k + hk + 2\left(1 - \dfrac{h}{2} + \dfrac{h^2}{4}\right) + 2\left(1 - k + k^2\right) + o(||(h,k)||^2)$ ce qui donne $f(2+h,1+k) - f(2,1) = \underset{0}{=} hk + \dfrac{h^2}{2} + 2k^2 + o(||(h,k)||^2) \underset{0}{=} {}^tHAH + o(||(h,k)||^2)$ avec ${}^tH = (h\ k)$ et la matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix}$ telle que $\text{Tr}\,(A) > 0$ et $\det(A) > 0$ donc A est définie positive.

Ceci prouve que f admet en a un minimum local !

Méthode 3 hors programme : on calcule r, s, t ! $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = 1$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,1) = 1$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,1) = 4$ et on vérifie que $rt - s^2 = 4 - 1 = 3 > 0$ avec $r > 0$ donc f admet en $(2,1)$ un minimum local.

1.64 H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par théorèmes généraux avec les dérivées partielles sur cet ouvert : $\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \frac{4x^3y(x^2+y^2) - 2x^5y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^5y + 4x^3y^3}{(x^2+y^2)^2}$ et $\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = \frac{x^4(x^2+y^2) - 2x^4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^6 - x^4y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Séparément : $\frac{\partial H}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{H(t,0) - H(0,0)}{t} = 0$ et $\frac{\partial H}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{H(0,t) - H(0,0)}{t} = 0$. Il reste à vérifier que ces dérivées partielles sont continues en $(0,0)$.

$\left|\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial H}{\partial x}(0,0)\right| = \left|\frac{2x^5y + 4x^3y^3}{(x^2+y^2)^2}\right| \leqslant \frac{6||(x,y)||_2^6}{||(x,y)||_2^4}$ car $||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2}$, $|x|, |y| \leqslant ||(x,y)||_2$ et $|2x^5y + 4x^3y^3| \leqslant 2|x|^5|y| + 4|x|^3|y|^3 \leqslant 6||(x,y)||_2^6$. Par conséquent $\left|\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial H}{\partial x}(0,0)\right| \leqslant 6||(x,y)||_2^2$ donc pour un $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon}{6}} > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ ||(x,y) - (0,0)||_2 \leqslant \alpha \Longrightarrow \left|\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial H}{\partial x}(0,0)\right| \leqslant \varepsilon$.

C'est la définition de la continuité de $\frac{\partial H}{\partial x}$ en $(0,0)$.

De même $\left|\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial H}{\partial y}(0,0)\right| = \left|\frac{x^6 - x^4y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| \leqslant \frac{2||(x,y)||_2^6}{||(x,y)||_2^4} = 2||(x,y)||_2^2$ donc $\frac{\partial H}{\partial y}$ est aussi continue en $(0,0)$. Conclusion : H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

En continuant de la sorte, on montrerait que H est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ mais pas de classe C^3.

1.65 f est de classe C^1 (même C^∞) sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ donc si f admet un extremum local, celui-ci ne peut être qu'un point critique. Or $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Longleftrightarrow 2x + y - 5 = x + 2y - 1 = 0 \Longleftrightarrow (x = 3$ et $y = -1)$.

Étudions f au voisinage du point $(3,-1)$. f admet en $(3,-1)$ un minimum absolu valant -7 car, après calculs : $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2,\ f(3+h, -1+k) = -7 + h^2 + hk + k^2 = f(3,-1) + \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4} \geqslant f(3,-1)$.

1.66 La partie $K = [-1;1]^2$ est un fermé borné (autrement dit un compact) de $\mathbb{R}^2$ (de dimension finie) et f est continue sur K par opérations. On sait alors d'après le cours que f est bornée sur K et atteint ses bornes.

On constate que $\forall (x,y) \in K,\ x^4y^3 \leqslant 1$ et $1 + y^4 \leqslant 1$ donc, par croissance de $\ln$, $f(x,y) \leqslant 1 + \ln(2) = f(1,1)$ ce qui prouve que f admet en $(1,1)$ son maximum absolu sur K : $\underset{K}{\mathrm{Max}}\, f = f(1,1) = 1 + \ln(2) \sim 1{,}69$.

Trouvons les points critiques de f, sachant qu'on a facilement $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^3$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^4y^2 + \frac{4y^3}{1+y^4}$, il vient $\forall (x,y) \in]-1;1[^2 = \overset{\circ}{K},\ (\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0) \Longleftrightarrow (4x^3y^3 = 3x^4y^2 + \frac{4y^3}{1+y^4} = \frac{3x^4y^2 + 3x^4y^6 + 4y^3}{1+y^4} = 0)$.

Si $(x,y) \in]-1;1[^2$ est un point critique de f, alors $(\frac{\partial f}{\partial x} = 0) \Longleftrightarrow (x = 0$ ou $y = 0)$ et on a aussi les implications $(x = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0) \Longrightarrow (y = 0)$ et aussi $(y = 0) \Longrightarrow (\frac{\partial f}{\partial y} = 0)$. Ainsi, les points critiques de f dans $\overset{\circ}{K}$ sont tous les points $(x,0)$ avec $x \in]-1;1[$, il sont situés sur une droite qui sépare le carré K en deux. Mais si $x \in]-1;1[$ avec $x \neq 0$ est fixé, on a $f(x,t) = x^4t^3 + \ln(1+t^4) \underset{0}{\sim} x^4t^3$ donc $f(x,t)$ change de signe (quand t varie) au voisinage de 0 et f n'admet pas en $(x,0)$ un extremum local.

Si $x = 0$, $f(t,0) = 0$ et $f(0,t) \underset{0}{\sim} t^4$ qui reste positif. Mais f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$ car $f(\sqrt{|t|}, t^3) = t^{11} + \ln(1 + t^{12}) \underset{0}{\sim} t^{11}$ qui change de signe au voisinage de 0 alors que $\lim\limits_{t\to 0}(\sqrt{|t|}, t^3) = (0,0)$.

Comme f n'admet en aucun de ses points critiques un extremum local, elle ne peut atteindre son minimum absolu sur K qu'en un point de la frontière de K. Faisons les études sur les quatre côtés du carré K :

• $h_1(t) = f(1,t) = t^3 + \ln(1+t^4) = f(-1,t)$ ($f(x,y) = f(-x,y)$ donc la surface $z = f(x,y)$ est invariante par la réflexion de plan $x = 0$), alors $h_1'(t) = 3t^2 + \dfrac{4t^3}{1+t^4} = \dfrac{t^2(3+3t^4+4t)}{1+t^4}$ qui reste positif (étude de fonction) ainsi h_1 est strictement croissante sur $[-1;1]$ et son minimum vaut $h(-1) = f(1,-1) = f(-1,-1) = -1+\ln(2)$.

• $h_2(t) = f(t,1) = t^4 + \ln 2$ qui est paire et atteint son minimum en 0 où elle vaut $h_2(0) = \ln(2)$.

• $h_3(t) = f(t,-1) = -t^4 + \ln 2$ qui est paire et atteint son minimum en ± 1 où elle vaut $h_3(\pm 1) = -1 + \ln(2)$.

Par conséquent, le minimum absolu de f sur K est atteint en $(\pm 1, -1)$ et il vaut $-1 + \ln(2) \sim -0.306$.

1.67 f est, par opérations, de classe C^1 sur l'ouvert $D = (\mathbb{R}_+^*)^2$. Si f admet en $(a,b) \in D$ un extremum local, c'est un point critique de f. Or $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \ln y - \dfrac{y}{x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{y} - \ln x$. Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff \ln y - \dfrac{y}{x} = \ln x - \dfrac{x}{y} = 0$. Dans ce cas $x = \dfrac{y}{\ln y}$ donc $\ln y - \ln(\ln y) = \dfrac{1}{\ln y}$. Ainsi $g(\alpha) = 0$ avec $\alpha = \ln y > 0$ et $g : t \mapsto t - \dfrac{1}{t} - \ln t$. Comme $g'(t) = 1 + \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2} > 0$, g est strictement croissante et $g(1) = 0$ donc g ne s'annule qu'en $1 = \ln y$. Le seul point critique est donc $(x,y) = (e,e)$.

Or $f(e+h, e+k) = (e+h)\Big(1 + \ln\Big(1 + \dfrac{k}{e}\Big) - (e+k)\Big(1 + \ln\Big(1 + \dfrac{h}{e}\Big)$ ce qui donne avec les développements limités à l'ordre 2 : $f(e+h, e+k) = (e+h)\Big(1 + \dfrac{k}{e} - \dfrac{k^2}{2e^2} - (e+k)\Big(1 + \dfrac{h}{e} - \dfrac{h^2}{2e^2}\Big) + o(h^2+k^2)$ (car $h^2 \leqslant h^2 + k^2$ et $k^2 \leqslant h^2 + k^2$). Par conséquent, après simplification :

$$f(e+h, e+k) \underset{0}{=} e + h + k + \frac{hk}{e} - \frac{k^2}{2e} - e - k - h - \frac{hk}{e} + \frac{h^2}{2e} + o(h^2+k^2) \underset{0}{=} \frac{h^2}{2e} - \frac{k^2}{2e} + o(h^2+k^2).$$

Alors, f n'admet pas en (e,e) de minimum local. $f(e+h, e) = e + h - e\ln(e+h) = e\Big(\dfrac{h}{e} - \ln\Big(1 + \dfrac{h}{e}\Big)\Big) \geqslant 0$ et $f(e, e+k) = e\ln(e+k) - e - k = e\Big(\ln\Big(1 + \dfrac{k}{e}\Big) - \dfrac{k}{e}\Big) \leqslant 0$: c'est un point selle !

1.68 T est le triangle plein ABC avec $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ et $C = (0,1)$. f est continue par opérations sur le compact T, f est bornée et atteint ses bornes sur T. f est positive et nulle sur $\mathrm{Fr}(T)$ donc $\underset{T}{\mathrm{Min}}(f) = 0$.

Par conséquent, le maximum de f sur T est atteint à l'intérieur de T. Comme f est de classe C^1 (toujours par opérations) sur $\overset{\circ}{T}$: f admet son maximum en un point critique de f.

Or $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\sqrt{1-x-y} - \dfrac{xy}{2\sqrt{1-x-y}} = \dfrac{y(2-3x-2y)}{2\sqrt{1-x-y}}$. De même : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x(2-3y-2x)}{2\sqrt{1-x-y}}$. On résout donc le système $2 - 3x - 2y = 2 - 3y - 2x = 0 \iff x = y = \dfrac{2}{5}$. Il existe un seul point critique dans l'intérieur de T, c'est donc forcément en ce point que f admet son maximum : $\underset{T}{\mathrm{Max}}(f) = f\Big(\dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{5}\Big) = \dfrac{4}{25\sqrt{5}}$.

1.69 **a.** À $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, on dérive (règle de la chaîne) $f(tx, ty) = t^k f(x,y)$ par rapport à t :

$$\forall t > 0,\ \frac{\partial(tx)}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + \frac{\partial(ty)}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = kt^{k-1}f(x,y) \iff x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) = kt^{k-1}f(x,y)$$

et on prend $t = 1$ pour obtenir $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = kf(x,y)$.

Il vient $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx,ty) + xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(tx,ty) + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(tx,ty) + yx\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(tx,ty) = k(k-1)t^{k-2}f(x,y)$ en re-dérivant par rapport à t et $t = 1$ donne : $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = k(k-1)f(x,y)$ (avec SCHWARZ).

Si $h(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta)$, comme f est C^2, on obtient $h'(\theta) = -\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(\cos\theta, \sin\theta) + \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(\cos\theta, \sin\theta)$ et on recommence pour avoir $h''(\theta) = -\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(\cos\theta, \sin\theta) - \sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(\cos\theta, \sin\theta) - \sin\theta\Big(-\sin\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cos\theta, \sin\theta) +$

$\cos\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\cos\theta,\sin\theta)\Big)+\cos\theta\Big(-\sin\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\cos\theta,\sin\theta)+\cos\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cos\theta,\sin\theta)\Big)$ qui se simplifie avec les relations précédentes et puisque $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cos\theta,\sin\theta)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cos\theta,\sin\theta)=0$ en $h''(\theta)=-kf(\cos\theta,\sin\theta)+\cos^2\theta^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cos\theta,\sin\theta)+2\sin\theta\cos\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\cos\theta,\sin\theta)+\sin^2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cos\theta,\sin\theta)=-kh(\theta)+k(k-1)h(\theta)$.
On a donc : $\exists(A,B)\in\mathbb{R}^2,\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ h(\theta)=A\cos(k\theta)+B\sin(k\theta)=A\mathrm{Re}((e^{i\theta})^k)+B\,\mathrm{Im}((e^{i\theta})^k)$. Comme $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, en développant, on trouvera $h(\theta)$ comme combinaison linéaire de terme du type $\cos^p\theta\sin^q\theta$ avec $p+q=k$. Enfin, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, en écrivant $(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}(\cos\theta,\sin\theta)$, $f(x,y)=(\sqrt{x^2+y^2})^k h(\theta)$ s'écrit comme la même combinaison linéaire de x^py^q : f est donc polynomiale en x et y mais homogène de degré total k.

Si $k\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ et $k\geqslant 1$, on recommence et on trouve $f(x,y)=(\sqrt{x^2+y^2})^k\Big(A\cos(k\theta)+B\sin(k\theta)\Big)$ avec $\theta=2\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ sur l'ouvert $U=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\mid x\leqslant 0\}$ par exemple.

1.70 U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel g est définie et de classe C^2. Par hypothèse : $g=f\circ h$ où la fonction $h:U\to\mathbb{R}_+^*$ est définie par $h(x,y)=x^2+y^2$.
Par composition de fonctions C^2 : $\forall(x,y)\in U,\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=2xf'(x^2+y^2)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=2yf'(x^2+y^2)$. On dérive une fois de plus : $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=2f'(x^2+y^2)+4x^2f''(x^2+y^2)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=2f'(x^2+y^2)+4y^2f''(x^2+y^2)$.
$\forall(x,y)\in U,\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=(x^2+y^2)^p\iff\forall(x,y)\in U,4f'(x^2+y^2)+4(x^2+y^2)f''(x^2+y^2)=(x^2+y^2)^p$.
Comme h est surjective de U dans $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit la nouvelle équivalence :
$$\forall(x,y)\in U,\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=(x^2+y^2)^p\iff\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ 4f'(t)+4tf''(t)=t^p.$$
On résout classiquement (E) : $ty''+y'=\dfrac{t^p}{4}$ en distinguant selon la valeur de p :

- si $p\neq -1$, la fonction f' est de la forme : $t\mapsto\dfrac{\lambda}{t}+\dfrac{t^p}{4(p+1)}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.
- si $p=-1$, la fonction f' est de la forme : $t\mapsto\dfrac{\lambda}{t}+\dfrac{\ln(t)}{4t}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

On intègre à nouveau et on a la forme des fonctions f vérifiant les conditions imposées :

- si $p\neq -1$, la fonction f est de la forme : $f:t\mapsto\lambda\ln(t)+\mu+\dfrac{t^{p+1}}{4(p+1)^2}$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
- si $p=-1$, la fonction f est de la forme : $f:t\mapsto\lambda\ln(t)+\mu+\dfrac{\ln^2(t)}{8}$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

1.71 Par opérations (fonctions polynomiales, racine, inverse), la fonction H est continue partout où son dénominateur ne s'annule pas donc sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
Soit $(x,y)\neq(0,0)$, alors on sait que $x^4+y^2\leqslant 2x^2|y|$ car $(x^2-|y|)^2\geqslant 0$. Ainsi $\dfrac{x^2|y|}{x^4+y^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$. On a donc $|H(x,y)|\leqslant\dfrac{x^2(x^2|y|)}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\dfrac{x^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ car $x^2\leqslant(\sqrt{x^2+y^2})^2$. On en déduit que, pour $\varepsilon>0$ fixé, en posant $\alpha=(2\varepsilon)^2>0$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $||(x,y)||_2(=\sqrt{x^2+y^2})\leqslant\alpha\Longrightarrow|H(x,y)-H(0,0)|\leqslant\varepsilon$ (marche même si $(x,y)=(0,0)$). C'est la continuité de H en $(0,0)$. La fonction H est bien continue sur $\mathbb{R}^2$.

1.72 Pour $t\in\mathbb{R}_+$, on a $u_n(t)\underset{+\infty}{=}O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n(t)$ converge absolument donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ converge simplement vers une fonction S sur $\mathbb{R}_+$. Si $t<0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(t)=+\infty$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n(t)$ diverge.
Comme $||u_n||_{\infty,\mathbb{R}_+}=\dfrac{1}{n^2}$ et que $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge d'après Riemann, la fonction S est continue sur $\mathbb{R}_+$ car

toutes les u_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, par composée, f est continue sur $\mathbb{R}^2$ car $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est continue en tant que fonction polynomiale.

Comme $u_n'(t) = -\dfrac{e^{-nt}}{n}$, si $a > 0$, on a $||u_n'||_{\infty,[a;+\infty[} = \dfrac{e^{-na}}{n}$ donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur $[a;+\infty[$: S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composée, f est de classe C^1 sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Pour $(x,y) \in U$, il vient $\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y) = 2S'(x^2+y^2).\vec{v}$ avec $\vec{v} = (x,y)$ donc $\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y)$ est bien colinéaire à (x,y). Les lignes de niveaux du graphe de f sont concentriques de centre $(0,0)$.
Comme γ est 1-périodique, $\gamma(\mathbb{R}) = \gamma([0;1])$. On s'intéresse donc aux extrema de $f \circ \gamma$ sur $[0;1]$. Or, en notant $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et $d : t \mapsto x^2(t) + y^2(t)$, $f\circ\gamma = S \circ d$. Ainsi $f(\gamma(\mathbb{R})) = S \circ d([0;1])$ or S et d sont de classe C^1 donc continues, $S \circ d$ l'est donc aussi et est donc bornée et atteint ses bornes sur le segment $[0;1]$.
Par conséquent : la restriction de f à $K = \gamma(\mathbb{R})$ atteint son minimum (et aussi son maximum).

1.73 **a.** La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ par opérations car $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $4+y^2 > 0$. De plus, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + \dfrac{2y}{4+y^2}$. Ainsi, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de f, on a $xy = 0 = x^2 + \dfrac{2y}{4+y^2}$ donc soit $x = 0 \Longrightarrow y = 0$, soit $y = 0 \Longrightarrow x = 0$. Le seul point critique de f sur $\mathbb{R}^2$ est le point $(0,0)$.

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $e(x) = x^5 + \ln(4+x^6) - \ln(4)$. Alors $e(x) = x^5 + \ln\left(1 + \dfrac{x^6}{4}\right) \underset{0}{=} x^5 + \dfrac{x^6}{4} + o(x^6) \underset{0}{\sim} x^5$.

c. Si f admettait des extrema locaux sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, on sait d'après le cours que ce serait en un point critique donc ce serait en $(0,0)$ puisqu'il n'y a qu'un seul point critique. Or $e(x) \underset{0}{\sim} x^5$ donc e est strictement négative au voisinage de 0^- et strictement positive au voisinage de 0^+ ce qui interdit l'existence d'un extremum local en $(0,0)$. Par l'absurde, il n'y a donc aucun extremum local pour la fonction f sur $\mathbb{R}^2$.