

ÉNONCÉS EXERCICES CORRIGÉS 16 FONCTIONS VECTORIELLES ET COURBES

16.1 Révision de sup. sur la dérivation

16.1 *Centrale PSI 2012* On appelle S l'ensemble des couples $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $x < y$ et $x^y = y^x$.

Par exemple $(2, 4) \in S$ car $2^4 = 4^2 = 16$ et $2 < 4$.

On définit aussi les trois fonctions $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x > 0, \varphi(x) = \frac{\ln(x)}{x} \text{ et } \forall t > 0, f(t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \text{ et } g(t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1}.$$

- a. Étudier rapidement φ et tracer son graphe. En déduire que $(x, y) \in S \implies 1 < x < e < y$.
- b. Déterminer un intervalle I tel que g réalise une bijection entre \mathbb{R}_+^* et I .
On admettra, le travail est similaire, que f réalise une bijection strictement croissante entre \mathbb{R}_+^* et $]1; e[$.
- c. Prouver alors que $t \mapsto (f(t), g(t))$ constitue un paramétrage de S (pour $t \in \mathbb{R}_+^*$).
- d. Étudier les deux extrémités de cette courbe $x = f(t)$, $y = g(t)$: quand $t \rightarrow 0+$ et quand $t \rightarrow +\infty$.

16.2 *Centrale PSI 2012* Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et a, b et c trois réels distincts deux à deux.

- a. Justifier : $\exists! P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$ et $P(c) = f(c)$ et donner son expression.
- b. En déduire qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2}f''(d)$.

16.3 Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x > 0, f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

- a. Étudier rapidement f et tracer son graphe.
- b. En déduire qu'il existe un unique couple d'entiers $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $a < b$ et $a^b = b^a$.

16.2 Courbes du plan en coordonnées cartésiennes

16.4 *Centrale PSI 2012* Dans le plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{v}, \vec{w})$, on se donne la courbe

$$\mathcal{C} \text{ paramétrée par } x = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} - 1 - t, \quad y = \frac{1}{t} - 1 - t.$$

- a. Tracer cette courbe \mathcal{C} : droite asymptote et position de la courbe par rapport à celle-ci, courbe asymptote.
- b. Déterminer les coordonnées de l'unique point double A .

16.5 a. Étudier et représenter la courbe définie par $\Gamma : x = 4t^3, y = 3t^4$.

- b. Former une équation de la tangente au point de paramètre $t \in \mathbb{R}$.
- c. Déterminer un paramétrage du lieu \mathcal{L} des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à Γ (c'est-à-dire l'orthoptique de Γ) et tracer cette courbe.

16.6 Trouver une CNS sur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la courbe $x = 2t + \frac{a}{t^2}, y = t^2 + \frac{2b}{t}$ admette un point de rebroussement. Étudier alors le lieu de ces points lorsque les paramètres varient.

16.7 *Astroïde* Tracer l'arc paramétré par : $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$.

En un point régulier M_{t_0} la tangente coupe (Ox) en A et (Oy) en B . Calculer AB .

16.8 Tracer l'arc $x = \frac{2t}{t^2 - 1}, y = \frac{t^2}{t^2 - 1}$ en déterminer les branches infinies et les points multiples.

16.9 Tracer l'arc : $x = (t + 2)e^{1/t}$, $y = (t - 2)e^{1/t}$.

16.10 Tracer la courbe Γ paramétrée par $x = 3t^2$, $y = 2t^3$. Trouver une droite à la fois tangente et normale à Γ .

16.11 Construire la courbe $x = \frac{t}{t^2 - 1}$, $y = \frac{t^2}{t - 1}$ avec ses branches infinies.

Déterminer les coordonnées du point double et vérifier que les tangentes en ce point sont orthogonales.

16.12 Tracer la courbe \mathcal{C} définie par $x = \frac{t^2}{2} + t$, $y = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}$ puis étudier la courbe \mathcal{O} (orthoptique) des points appartenant à deux tangentes orthogonales à \mathcal{C} .

16.3 Courbes de l'espace

16.13 Déterminer le vecteur tangent \vec{T} en tout point régulier de la courbe Γ définie par le paramétrage cartésien :
 $x = (1 + \cos t) \cos t$, $y = (1 + \cos t) \sin t$, $z = 4 \sin\left(\frac{t}{2}\right)$. Calculer la longueur de Γ .

16.14 On considère la courbe Γ définie par : $x = \frac{t^4}{1 + t^2}$, $y = \frac{t^3}{1 + t^2}$, $z = \frac{t^2}{1 + t^2}$. À quelle condition M_1, M_2, M_3, M_4 quatre points de Γ de paramètres respectifs t_1, t_2, t_3, t_4 sont-ils coplanaires ?

16.4 Longueur de courbes

16.15 *Centrale PSI 2013* Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la courbe paramétrée Γ_n dont le point courant $M_n(t)$ est de coordonnées $x_n(t) = \cos^n(t)$, $y_n(t) = \sin^n(t)$ pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On désigne par L_n la longueur de Γ_n .

a. Donner l'allure des courbes de la famille $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Donner sans preuve L_1 et L_2 .

b. Donner une expression sous forme intégrale de L_n . Calculer L_3 .

c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n$.

Indication : on pourra comparer $\sqrt{a^2 + b^2}$ et $|a| + |b|$ et faire intervenir le point $I_n = M_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

16.16 *Centrale PSI 2012* Soit la courbe paramétrée donnée en coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ par $x = 8 \sin t$, $y = \sqrt{2} \sin(2t)$. On note Γ la trajectoire de cette courbe.

a. Tracer rapidement Γ .

b. Calculer la longueur de Γ .

16.17 a. Tracer la courbe d'équation : $x = \cos^2(t) + \ln(\sin(t))$, $y = \sin(t) \cos(t)$.

b. Calculer la longueur de la courbe entre les deux points de rebroussement.

16.18 Soit la courbe paramétrée par : $x = 2t^3 + 3t^2$, $y = 3t^2 + 6t$.

Calculer la longueur de l'arc (AO) où A est le point de rebroussement.

16.19 Nature, construction et longueur de la courbe d'équation $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

16.5 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

16.20 *ENS Cachan PSI 2016* Hugo Saint-Vignes

- a. Démontrer la formule de TAYLOR reste intégral.
- b. Démontrer l'inégalité de TAYLOR : $\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty |x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.
- c. Soit f telle que f et f'' soient bornées sur \mathbb{R} .
Montrer que f' est bornée sur \mathbb{R} et majorer $\|f'\|_\infty$ en fonction de $\|f\|_\infty$ et $\|f''\|_\infty$.
- d. Soit $f : [0; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(0) = f''(0) = 0$ et $f'(b) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0; b]$, $g(x) = f(x)$ et $\forall k \in \{0, 1, 2\}$, $\|g^{(k)}\|_{\infty, \mathbb{R}} = \|f^{(k)}\|_{\infty, [0; b]}$.
- e. Soit $a \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et $b = a + \frac{\cos(a)}{2 \sin(a)}$. Soit $f : [0; b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \sin(x)$ si $x \in [0; a]$ et sinon $f(x) = \sin(a) + (x-a) \cos(a) - \frac{1}{2}(x-a)^2 \sin(a)$. Montrer que f est de classe C^2 sur $[0; b]$. Montrer que f vérifie les hypothèses de la question précédente.

16.21 *Centrale Maths1 PSI 2016* Sam Pérochon

Soit Γ la courbe définie par
$$\begin{cases} x &= (1 + \cos t) \sin t \\ y &= (1 + \cos t) \cos t \\ z &= 4 \sin(t/2) \end{cases}$$

- a. Trouver tous les points réguliers de Γ . Calculer la tangente à tous ces points réguliers.
- b. Calculer l'angle que fait la tangente en tous ces points avec l'axe (Oz) .
- c. Calculer le projeté orthogonal de Γ sur l'axe (Oz) . Et sur le plan (xOy) ?
- d. Calculer la longueur de la courbe.

16.22 *CCP PSI 2017* Samuel Sanchez II

Étude de l'arc paramétré $x(t) = \frac{1}{t} + \ln(2+t)$, $y(t) = t + \frac{1}{t}$. On précisera les tangentes parallèles aux axes du repère, les branches infinies, les points particuliers de l'arc.

16.23 *ENS Cachan PSI 2019* Tanguy Sommet

Soit $A : [0; +\infty[\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction 1-périodique de classe C^1 .

On s'intéresse à l'équation (E) : $X'(t) = A(t)X(t)$ d'inconnue $X : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 .

On admet, c'est le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ version matricielle, que si $Y \in \mathbb{R}^n$ est fixé, il existe une unique solution $X : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ de (E) telle que $X(0) = Y$.

On note, pour $t \geq 0$ et $Y \in \mathbb{R}^n$, $v_t(Y) = X(t)$ avec la solution X de (E) de la ligne précédente.

On appelle $R(t)$ la matrice de v_t dans la base canonique de \mathbb{R}^n .

- a. Pour $t \geq 0$, exprimer $X(t)$ en fonction de $R(t)$ et $X(0)$.
- b. Montrer que $\forall t \geq 0$, $R'(t) = A(t)R(t)$ et que $R(0) = I_n$.

Soit $W : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $W(t) = \det(R(t))$.

- c. Montrer que $\forall t \geq 0$, $W'(t) = \text{Tr}(A(t))W(t)$. Indication : on pourra écrire $W(t) = \begin{vmatrix} \cdots & L_1(t) & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & L_n(t) & \cdots \end{vmatrix}$ en

notant $L_i(t)$ la i -ième colonne de la matrice $R(t)$. En déduire que $R(t)$ est inversible en tout instant $t \geq 0$.

- d. Montrer que $\forall t \geq 0$, $R(t+1) = R(t)R(1)$.

e. Montrer qu'il existe une solution X de (E) non identiquement nulle, de classe C^1 et 1-périodique si et seulement si $1 \in \text{Sp}(\mathbb{R}(1))$.

On suppose dans la suite que $\mathbb{R}(1) = \text{PDP}^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\lambda_k > 0$.

On pose $\Lambda(t) = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1^t}, \dots, \frac{1}{\lambda_n^t}\right)$, $Q(t) = \mathbb{R}(t)\text{P}\Lambda(t)\text{P}^{-1}$ et $\forall t \geq 0$, $Z(t) = (Q(t))^{-1}X(t)$.

On pose aussi $D_0 = \text{diag}(\ln(\lambda_1), \dots, \ln(\lambda_n))$ et $B(t) = \text{P}(\Lambda(t))^{-1}D_0\Lambda(t)\text{P}^{-1}$.

f. Montrer que Q est 1-périodique.

g. Montrer que X est solution de (E) $\iff Z'(t) = B(t)Z(t)$.

16.24 Centrale Maths1 PSI 2021 Quentin Granier et Arthur Riché et Adèle Robert

On pose $f_1(t) = \int_0^t \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du$ et $f_2(t) = \int_0^t \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du$.

a. Montrer que f_1 est bien définie et de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* .

b. Montrer que f_1 admet une limite finie en $+\infty$.

On admet que f_2 est aussi de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et admet une limite finie en $+\infty$.

c. Soit $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $t_1 < t_2$, quelle est la longueur de l'arc paramétré $t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$ entre les points de paramètres t_1 et t_2 ?

On pose $F(t) = \left(\int_t^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du\right)^2 + \left(\int_t^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du\right)^2$.

d. Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que $F'(t) = -2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{t^2 + tu}} du$.

e. Soit a et t deux réels strictement positifs, montrer que $\int_0^\pi \frac{\cos(u)}{\sqrt{a + tu}} du > 0$.

f. Montrer que F est strictement décroissante.

16.25 Mines PSI 2021 Paul Jaïs I

On considère l'arc paramétré Γ par $x(t) = \cos(3t)$, $y(t) = \sin(2t)$.

a. Étudier les symétries, périodicité de cette courbe.

b. Quels sont ses points stationnaires, ses tangentes horizontales, verticales ?

c. Tracer la courbe Γ .

16.26 Centrale Maths1 PSI 2022 Jimmy Guertin

Soit l'arc paramétré Γ par $x(t) = \cos^3(t)$ et $y(t) = \sin^3(t)$ pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

a. Soit $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $M = M(t) = (x(t), y(t)) \in \Gamma$, calculer la longueur de l'arc entre $M(0) = (1, 0)$ et M .

Soit $n + 1$ points de l'arc Γ notés M_0, \dots, M_n tels que $M_0 = M(0)$, $M_n = M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et les longueurs de l'arc entre M_k et M_{k+1} ne dépendent pas de $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

b. Exprimer $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{OM_k}{n+1}$ où O est l'origine du repère.

c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

16.6 Officiel de la Taupe

16.27 *OdIT 2013/2014 ENTPE/EIVP PSI planche 292 II*

Donner la longueur de l'arc paramétré $x(t) = -\sin^2(t) + \ln(\sin(t))$, $y(t) = \cos(t)\sin(t)$ entre ses deux points de rebroussement.

16.28 *OdIT 2016/2017 X/Cachan PSI planche 37*

Soit un entier $n \geq 2$ et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^{n+1} telle que $f^{(n+1)}$ est bornée sur I et $a \in I$.

a. Montrer la formule de TAYLOR reste intégral, $\forall x \in I$, $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$.

b. Et l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE, $\forall x \in I$, $\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty, I} |x-a|^{n+1}$.

c. On prend ici $n = 2$, montrer que si f est bornée ainsi que f'' sur I , alors f' est aussi bornée sur I .

d. On prend dans cette question $I = \mathbb{R}$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall h \in \mathbb{R}_+^*$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{h} \|f\|_{\infty} + \frac{h}{2} \|f''\|_{\infty}$.

En déduire que l'on a la majoration $\|f'\|_{\infty} \leq \sqrt{2\|f\|_{\infty}\|f''\|_{\infty}}$.

16.29 *OdIT 2016/2017 ENSAM PSI planche 239II*

Représenter la courbe Γ_n d'équation $\frac{x^2}{n^2} + y^2 = 1$ pour $n = 1$ et $n = 2$. Calculer la surface S_n délimitée par la courbe dans le cas général. On note L_n la longueur de la courbe ; étudier les rayons de convergence de $\sum_{n \geq 1} S_n x^n$ et $\sum_{n \geq 1} L_n x^n$ (on rappelle que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$).

16.30 *OdIT 2016/2017 EIVP PSI planche 244I*

On donne $g(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$; montrer que $\forall \lambda \neq 0$, $f_{\lambda} : x \mapsto g(x, \lambda x)$ admet un minimum local en 0. g admet-elle un minimum local en $(0, 0)$?

16.31 *Compléments OdIT 2017/2018 EIVP PSI planche 555II*

On donne $f(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$. Comparer $f(t + 2\pi)$, $f(-t)$ et $f(\pi - t)$ avec $f(t)$; qu'en déduit-on ?

Justifier que l'intervalle d'étude peut être réduit à $[0; \frac{\pi}{2}]$. Calculer la longueur de la courbe.

Soit $t \in]0; \frac{\pi}{2}[$, déterminer une équation de la tangente T_t en $f(t)$ à la courbe. On note A (resp. B) l'intersection de T_t avec l'axe (Ox) (resp. (Oy)). Déterminer la longueur AB.

16.32 *Compléments OdIT 2017/2018 ENSEA PSI planche 579I*

Représenter la courbe C des points $M(t) = (\cos t, 2 \sin t)$ sur $[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}]$.

C est-elle une partie ouverte ? Fermée ? Convexe ? Bornée ?