

# SOLUTIONS EXERCICES CORRIGÉS 16 FONCTIONS VECTORIELLES ET COURBES

## 16.1 Révision de sup. sur la dérivation

**16.1 a.** La fonction  $\varphi$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  par théorèmes généraux et  $\varphi'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$  donc  $\varphi$  est croissante sur  $]0; e]$  et décroissante sur  $[e; +\infty[$ . Par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0^+$  et il est clair que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\infty$  avec  $\varphi(1) = 0$ . Ainsi, le graphe de  $\varphi$  admet deux asymptotes, l'une verticale d'équation  $x = 0$  (quand  $t$  tend vers  $0^+$ ) et l'autre horizontale d'équation  $y = 0$  (quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ). Enfin, la fonction  $\varphi$  admet un maximum  $x = e$  et on a  $\text{Max}_{\mathbb{R}_+^*} \varphi = \varphi(e) = \frac{1}{e}$ .

Puisque  $(x, y) \in S \iff (x < y \text{ et } x^y = y^x) \iff (x < y \text{ et } y \ln(x) = x \ln(y)) \iff (x < y \text{ et } \varphi(x) = \varphi(y))$ , l'étude de  $\varphi$  menée précédemment montre que  $(x, y) \in S \implies 1 < x < e < y$ .

**b.**  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  par théorèmes généraux. Comme  $g(t) = \exp\left((t+1) \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right)$ , il est clair que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = +\infty$  et on trouve  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = e$  car  $\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$  donc  $(t+1) \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{t+1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$ . De plus,  $\forall t > 0$ ,  $g'(t) = \left(\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}\right)g(t) < 0$  car on a l'inégalité classique  $\forall x > 0$ ,  $\ln(1+x) < x$ . D'après le théorème de la bijection,  $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow ]e; +\infty[$  est une bijection strictement décroissante.

**c.** D'après les intervalles  $g(\mathbb{R}_+^*) = ]e; +\infty[$  et  $f(\mathbb{R}_+^*) = ]1; e[$  trouvé en **b.** ou admis par l'énoncé, on a l'inégalité  $\forall t > 0$ ,  $f(t) < g(t)$ . De plus, on obtient l'égalité  $\varphi(f(t)) = \varphi(g(t))$  avec le calcul suivant :

$$\varphi(g(t)) = \frac{\ln(g(t))}{g(t)} = \frac{(t+1) \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)}{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1}} = \frac{(t+1) \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)}{\frac{t+1}{t} \times \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t} = \frac{t \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)}{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t} = \frac{\ln(f(t))}{f(t)} = \varphi(f(t)).$$

Par définition,  $(f(t), g(t)) \in S$ . Réciproquement, si  $(x, y) \in S$ , alors  $x \in ]1; e[$  donc, par bijectivité de  $f$ ,  $\exists ! t > 0$ ,  $x = f(t)$ . Ensuite,  $\varphi(x) = \varphi(y) = \varphi(g(t)) = \varphi(f(t))$  prouve que  $y = g(t)$  car  $\varphi$  injective sur  $]e; +\infty[$  et que  $y \in ]e; +\infty[$  d'après **a.** Par double implication, on a  $(x, y) \in S \iff (\exists t > 0, x = f(t), y = g(t))$ .

**d.** Comme  $\ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t \ln(t) = 0$ , il vient  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1$  et, comme  $g(t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)f(t)$ , on a aussi  $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = +\infty$  donc la droite d'équation  $x = 1$  est asymptote (verticale) à  $S$ . De plus, on a les approximations  $f\left(\frac{1}{u}\right) = \exp\left(\frac{\ln(1+u)}{u}\right) \underset{0}{=} \exp\left(1 - \frac{u}{2} + o(u)\right) \underset{0}{=} e \times \exp\left(-\frac{u}{2} + o(u)\right) \underset{0}{=} e - \frac{eu}{2} + o(u)$  et  $g\left(\frac{1}{u}\right) = (1+u)f\left(\frac{1}{u}\right) \underset{0}{=} (1+u)\left(-\frac{eu}{2} + o(u)\right) \underset{0}{=} e + \frac{eu}{2} + o(u)$  donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t) - e}{f(t) - e} = -1$ .

Conclusion : la demi-tangente à  $S$  en  $(e, e)$  est de pente  $-1$ .

**16.2 a.** Posons le polynôme de LAGRANGE  $P = \frac{f(a)(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)(X-c)(X-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$ . On vérifie bien que  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  et que  $P(a) = f(a)$ ,  $P(b) = f(b)$  et  $P(c) = f(c)$ . Soit  $Q \in \mathbb{R}_2[X]$  tel que  $Q(a) = f(a)$ ,  $Q(b) = f(b)$  et  $Q(c) = f(c)$ , alors  $(P-Q)(a) = (P-Q)(b) = (P-Q)(c) = 0$  donc le polynôme  $P-Q \in \mathbb{R}_2[X]$  a trois racines distinctes (par hypothèse) donc il est nul et on en déduit que  $P = Q$ . On a bien prouvé l'existence et l'unicité  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  tel que  $P(a) = f(a)$ ,  $P(b) = f(b)$  et  $P(c) = f(c)$ , il s'agit de  $p = \frac{f(a)(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)(X-c)(X-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$ .

**b.** On définit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) - P(x)$ . La fonction  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  par opérations et, d'après la question précédente, on a  $g(a) = g(b) = g(c) = 0$ . En supposant  $a < b < c$  (les six cas sont similaires), on peut appliquer le théorème de ROLLE à  $g$  sur  $[a; b]$  et sur  $[b; c]$  et il existe donc deux réels  $\alpha \in ]a; b[$  et  $\beta \in ]b; c[$  tels que  $g'(\alpha) = g'(\beta)$ . Comme  $\alpha < b < \beta$ , on peut à nouveau appliquer le théorème de ROLLE à la fonction  $g'$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  pour avoir  $d \in ]\alpha; \beta[$  tel que  $g''(d) = 0$ . Ainsi, avec l'expression vue en **a.**, cela donne bien  $g''(d) = 0 = f''(d) - 2\left(\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}\right)$ .

**16.3 a.**  $f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  par opérations et  $\forall x \in ]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$ . Ainsi,  $f$  est strictement croissante sur  $]0; e]$  et strictement décroissante sur  $]e; +\infty[$  donc  $M_{\mathbb{R}_+^*}(f) = f(e) = \frac{1}{e}$ . Le graphe de  $f$  admet une asymptote "verticale" d'équation  $x = 0$  en  $0^+$  et une asymptote "horizontale" d'équation  $y = 0$  en  $+\infty$ .  $f$  est négative sur  $]0; 1]$  et strictement positive sur  $]1; +\infty[$ . Ainsi,  $f$  réalise une bijection strictement croissante entre  $]1; e[$  et  $]0; \frac{1}{e}[$  et une bijection strictement décroissante entre  $]e; +\infty[$  et  $]0; \frac{1}{e}[$ .

**b. Analyse :** supposons que  $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$  vérifie  $a < b$  et  $a^b = b^a$ , alors  $b \ln(a) = a \ln(b)$  donc  $f(a) = f(b)$ . Ceci impose, d'après l'étude précédente, que  $a \in ]1; e[, b \in ]e; +\infty[$  avec  $f(a) = f(b) \in ]0; \frac{1}{e}[$ . Le seul entier dans  $]1; e[$  étant 2, on a donc  $a = 2$ . Comme  $f$  réalise une bijection entre  $]e; +\infty[$  et  $]0; \frac{1}{e}[$ , il existe un seul

réel  $x \in ]e; +\infty[$  tel que  $f(x) = f(2)$ . Comme  $f(4) = \frac{\ln(4)}{4} = \frac{\ln(2^2)}{4} = \frac{2 \ln(2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2} = f(2)$ , on a  $x = b = 4$ .

**Synthèse :** bien sûr  $(2, 4) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ,  $2 < 4$  et  $2^4 = 4^2 = 16$ .

Ainsi, le seul couple vérifiant  $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tel que  $a < b$  et  $a^b = b^a$  est  $(a, b) = (2, 4)$ .

## 16.2 Courbes du plan en coordonnées cartésiennes

**16.4 a.** Les fonctions  $x$  et  $y$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ . Pour  $t \neq 0$  et après calculs, on a  $x'(t) = \frac{1}{3}(1+t)(2-t+t^2)$  et  $y'(t) = -\frac{1}{t^2} - 1$ . Les limites aux bornes sont  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty$ , puis  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = -\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -\infty$ .

La fonction  $x$  est décroissante sur  $] -\infty; -1]$ , puis croissante sur  $[-1; 0[$ , à nouveau décroissante sur  $]0; +\infty[$ .

La fonction  $y$  est décroissante sur  $] -\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ .

On a aussi  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (y(t) - x(t)) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{t^2}\right) = 0^-$  donc la droite  $\Delta : y = x$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}$  est toujours en dessous de  $\Delta$ . De plus,  $y^2(t) - x(t) + 3y(t) + 3 = -t^2$  donc la parabole  $\mathcal{P} : y^2 + 3y + 3 - x = 0$  ou encore  $\mathcal{P} : \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 2 \times \frac{1}{2} \times \left(x - \frac{3}{4}\right)$  est asymptote à  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}$  est toujours "à l'extérieur" de  $\mathcal{P}$ .

**b.** Cherchons  $t_1 \neq t_2$  tels que  $x(t_1) = x(t_2)$  et  $y(t_1) = y(t_2)$ . En réduisant au même dénominateur et en multipliant par les dénominateurs, on en déduit le système suivant :

$$\begin{aligned} (1 + t_1 - t_1^3)t_2^2 &= (1 + t_2 - t_2^3)t_1^2 &\iff (t_2 - t_1)(t_1 + t_2 + t_1t_2 + t_1^2t_2^2) &= 0 \\ t_2(1 - t_1^2) &= t_1(1 - t_2^2) &\iff (t_2 - t_1)(1 + t_1t_2) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi,  $(t_2 \neq t_1, x(t_1) = x(t_2), y(t_1) = y(t_2)) \iff (t_1 \neq t_2, t_1t_2 = -1, t_1 + t_2 = 0)$ . Ainsi, il existe un unique couple  $(t_1, t_2)$  (en imposant  $t_1 < t_2$ ) qui vérifie ces conditions et il est constitué des racines de

$x^2 - 0 \cdot x - 1 = (x + 1)(x - 1)$  donc  $t_1 = -1$  et  $t_2 = 1$ . Il existe donc un unique point double de  $\mathcal{C}$  et il s'agit de  $M(-1) = M(1) = (0, -1)$ .

**16.5 a.** Les fonctions  $x$  et  $y$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . On a  $x'(t) = 12t^2$ ,  $y'(t) = 12t^3$  donc en notant  $f : t \mapsto (x(t), y(t))$  la fonction qui donne la trajectoire de la courbe  $\Gamma$ , on a  $\vec{f}'(t) = 12t^2(1, t)$ .

Le seul point stationnaire (là où la dérivée s'annule, donc la vitesse est nulle) est l'origine (pour  $t = 0$ ),  $\vec{f}''(0) = (0, 0)$  et  $\vec{f}'''(0) = (x'''(0), y'''(0)) = (24, 0)$  donc la demi-tangente en  $O$  est l'axe des abscisses ( $(0x)$ ).

Si  $t \neq 0$ , la tangente  $T_t$  à la courbe en  $M(t) = (x(t), y(t))$  a pour équation  $(x - x(t))y'(t) - (y - y(t))x'(t) = 0$  car un point  $M = (x, y)$  du plan appartient à cette tangente si et seulement si  $(\overrightarrow{M(t)M}, \vec{f}'(t))$  est liée, si et seulement si  $\det(\overrightarrow{M(t)M}, \vec{f}'(t)) = \begin{vmatrix} x - x(t) & x'(t) \\ y - y(t) & y'(t) \end{vmatrix} = 0$ . Ainsi, la tangente  $T_t$  en  $M(t) \in \Gamma$  a pour équation  $12t^3(x - 4t^3) - 12t^2(y - 3t^4) = 0$  ce qui donne, en divisant par  $12t^2 > 0$ ,  $T_t : tx - y = t^4$ .

**b.** Un point  $M(x, y)$  appartient à l'orthoptique  $\mathcal{L}$  si et seulement s'il existe  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $M \in T_{t_1} \cap T_{t_2}$  et  $T_{t_1} \perp T_{t_2}$ . Un vecteur directeur de  $T_t$  est  $v_t = (1, t)$  donc  $T_{t_1} \perp T_{t_2} \iff (v_{t_1} | v_{t_2}) = 0 \iff 1 + t_1 t_2 = 0$ .

Ainsi  $M \in \mathcal{L} \iff \exists t \neq 0, M \in T_t \perp T_{-1/t}$ . On résout donc le système  $tx - y - t^4 = -\frac{x}{t} - y - \frac{1}{t^4} = 0$  et cela donne  $x = t^3 - t + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} = x_1(t)$  et  $y = -t^2 + 1 - \frac{1}{t^2} = y_1(t)$ .

Réciproquement, si un point  $M$  a ces coordonnées  $(x_1(t), y_1(t))$  pour  $t \neq 0$ , alors il appartient à  $T_t \cap T_{-1/t}$  (en remontant les calculs) et on a donc  $M \in \mathcal{L}$ . Par conséquent,  $\mathcal{L}$  est (par double inclusion) la courbe d'équation  $\mathcal{L} : x = x_1(t) = t^3 - t + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}, y = y_1(t) = -t^2 + 1 - \frac{1}{t^2}$ .

Les fonctions  $x_1$  et  $y_1$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $x_1$  est impaire et  $y_1$  est paire donc on obtient toute la courbe en restreignant  $t$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  et en faisant ensuite une symétrie orthogonale par rapport à  $(Oy)$ .

De plus  $x_1\left(\frac{1}{t}\right) = -x_1(t)$  et  $y_1\left(\frac{1}{t}\right) = y_1(t)$ , ce qui permet de ne faire l'étude que pour  $t \in ]0; 1]$  et la partie de la courbe relative à  $t \in [1; +\infty[$  s'obtiendra (à nouveau) par la réflexion de droite  $(Oy)$ .

On calcule :  $\forall t \in ]0; 1], x_1'(t) = \frac{(1+t^2)(3t^4 - 4t^2 + 3)}{t^4} > 0$  et  $y_1'(t) = \frac{2(1-t^4)}{t^3} > 0$ . Or  $\lim_{t \rightarrow 0^+} x_1(t) = -\infty$ ,  $x_1(1) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} y_1(t) = -\infty$ ,  $y_1(1) = -1$ . De plus  $x_1'(1) = 4$  et  $y_1'(1) = 0$  donc on arrive horizontalement en  $(-1, 0)$  (logique avec la symétrie par rapport à  $(Oy)$ ).

Comme  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y_1(t)}{x_1(t)} = -\infty$  puisque  $\frac{y_1(t)}{x_1(t)} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{-1/t^2}{-1/t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{1}{t}$ , on a une branche parabolique de direction  $(Oy)$  quand  $t \rightarrow 0^+$ ; ce qui donne par symétrie par rapport à  $(Oy)$  une branche parabolique de direction  $(Ox)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

**16.6**  $x$  et  $y$  sont définies sur  $\mathbb{R}^*$  et  $x'(t) = 2 - \frac{2a}{t^3}$  et  $y'(t) = 2t - \frac{2b}{t^2}$ . Comme un point de rebroussement vérifie

$p$  pair,  $p > 1$  donc le point est stationnaire. Ainsi :  $a \neq 0, b \neq 0, t = \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b}$  donc  $a = b \neq 0$ .

Réciproquement, si  $a = b \neq 0$  et  $t = t_0 = \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b}$ , on a bien  $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$  en reportant.

Alors  $x''(t_0) = \frac{6a}{t_0^4}, x'''(t_0) = -\frac{24a}{t_0^5}, y''(t_0) = 2 + \frac{4a}{t_0^3}$  et  $y'''(t_0) = -\frac{12a}{t_0^4}$ .  $\text{Det}(\vec{f}''(t_0), \vec{f}'''(t_0))$  vaut :

$$x''(t_0)y'''(t_0) - x'''(t_0)y''(t_0) = \left(\frac{6a}{t_0^4}\right)\left(-\frac{12a}{t_0^4}\right) - \left(-\frac{24a}{t_0^5}\right)\left(2 + \frac{4a}{t_0^3}\right) = \frac{72a^2}{t_0^8} \neq 0$$

donc on a  $p = 2$  et  $q = 3$  et le point  $M_0 = \left(2t_0 + \frac{a}{t_0^2}, t_0^2 + \frac{2b}{t_0}\right)$  est un point de rebroussement de première espèce.

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc  $a = b \neq 0$ .

Le point  $M_0$  a aussi pour coordonnées, comme  $t_0 = \sqrt[3]{a} : M_0 = \left(3\sqrt[3]{a}, 3(\sqrt[3]{a})^2\right)$ .

Les points de rebroussement décrivent donc la parabole d'équation  $3y = x^2$  privée de l'origine.

**16.7** Comme  $\forall t \in \mathbb{R}, s'^2(t) = \|\vec{f}'(t)\|^2 = 9 \sin^2 t \cos^2 t$  car  $\vec{f}'(t) = 3 \sin t \cos t (-\cos t, \sin t)$ , les points stationnaires sont associés aux instants  $t \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$ . Si  $t_0 \neq 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]$ , la tangente à l'astroïde en  $M_{t_0}$  est d'équation cartésienne  $\text{Det}(M_{t_0}M, \vec{f}'(t_0)) = 0 \iff y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0$  ou encore  $3 \sin(t_0) \cos(t_0) \left( \sin(t_0)(x - \cos^3(t_0)) + \cos(t_0)(y - \sin^3(t_0)) \right) = 0$ . Le point  $A(a, 0)$  vérifie donc la relation  $\sin(t_0)(x - \cos^3(t_0)) - \cos(t_0) \sin^3(t_0) = 0$  donc  $a = \cos^3(t_0) + \cos(t_0) \sin^2(t_0) = \cos(t_0)$  et le point  $B(0, b)$  est tel que  $-\sin(t_0) \cos^3(t_0) + \cos(t_0)(b - \sin^3(t_0)) = 0$  donc  $b = \sin^3(t_0) + \sin(t_0) \cos^2(t_0) = \sin(t_0)$ . Par conséquent,  $AB^2 = \cos^2(t_0) + \sin^2(t_0) = 1$  est constant.

**16.8** On trace la courbe grâce à la décomposition  $x = \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}$  et  $y = 1 + \frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)}$ , au tableau de variations et à la symétrie de la courbe par rapport à  $(Oy)$  car  $x$  est impaire et  $y$  est paire.  $\lim_{t \rightarrow 1} (y - \frac{x}{2}) = \frac{1}{2}$  donc la droite  $y = \frac{x+1}{2}$  est asymptote à la courbe ; ainsi que  $y = \frac{1-x}{2}$  par symétrie. Après avoir tracé la courbe, on la reconnaît et après calculs, on trouve  $\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}$  (c'est une hyperbole).

**16.9**  $x, y$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = 0$  donc on a un point limite  $(0, 0)$  quand  $t \rightarrow 0^-$  qu'on atteint selon la droite  $y = -x$  car  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = -1$ . De plus  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1$ . De plus,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (y(t) - x(t)) = -4$  donc la droite  $y = x - 4$  est asymptote à la courbe. Quand  $t$  tend vers  $0^+$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = -\infty$ . On a  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = -1$  mais  $\lim_{t \rightarrow 0^+} (y(t) + x(t)) = +\infty$  donc il y a juste une branche infinie de direction  $y = -x$  mais pas d'asymptote. Pas de point double, il suffit de tracer la courbe avec le tableau de variations.

**16.10** Il y a un point de rebroussement de première espèce en  $(0, 0)$  pour  $t = 0$  ( $p = 2$  et  $q = 3$ ) et la courbe n'est pas trop dure à tracer. La tangente à  $\Gamma$  en un point  $M(t)$  est d'équation  $6t(y - 2t^3) - 6t^2(x - 3t^2) = 0$  ou encore  $y = tx - t^3$  et la normale a pour équation :  $6t^2(y - 2t^3) + 6t(x - 3t^2) = 0 \iff ty + x = 2t^4 + 3t^2$ . Une droite est à la fois tangente et normale à la courbe si elle admet pour équation  $y = tx - t^3$  et  $t'y + x = 2t'^4 + 3t'^2$  pour deux paramètres  $t$  et  $t'$  non nuls. Comme deux équations d'une même droite sont proportionnelles, on a donc à résoudre le système :  $\frac{t'}{1} = -\frac{1}{t} = \frac{2t'^4 + 3t'^2}{-t^3}$  donc  $t^6 - 3t^2 - 2 = 0 = (t^2 - 2)(t^2 + 1)^2 \iff t = \pm\sqrt{2}$ . Deux droites sont à la fois tangente et normale à la courbe :  $y = \sqrt{2}(x - 2)$  et  $y = -\sqrt{2}(x - 2)$ .

**16.11** On trace la courbe grâce à la décomposition  $x = \frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)}$  et  $y = t + 1 + \frac{1}{t-1}$ , au tableau de variations : on a une asymptote "verticale"  $x = 0$  quand  $t \rightarrow \pm\infty$  et une asymptote "horizontale"  $y = -\frac{1}{2}$  quand  $t \rightarrow -1$  et une asymptote oblique  $y = 2x + \frac{3}{2}$ . En cherchant les points multiples, on écrit  $x(t_1) = x(t_2)$  et  $y(t_1) = y(t_2)$  avec  $t_1 \neq t_2$  et en réduisant tout au même dénominateur et en factorisant par  $t_2 - t_1 \neq 0$  on obtient, en posant  $p = t_1 t_2$  et  $s = t_1 + t_2$  :  $p + 1 = -p + s = 0$  donc  $t_1$  et  $t_2$  sont les solutions de  $z^2 + z - 1 = 0$  donc  $t_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  et  $t_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ . On trouve  $x(t_1) = \frac{t_1}{1 - t_1 - 1} = -1$  et  $y(t_1) = \frac{1 - t_1}{t_1 - 1} = -1$  car  $t_1^2 = 1 - t_1$ . On calcule  $\vec{f}'(t_1) \cdot \vec{f}'(t_2) = x'(t_1)x'(t_2) + y'(t_1)y'(t_2) = \left(\frac{-t_1^2 - 1}{(t_1^2 - 1)^2}\right) \left(\frac{-t_2^2 - 1}{(t_2^2 - 1)^2}\right) + \left(\frac{t_1^2 - 2t_1}{(t_1 - 1)^2}\right) \left(\frac{t_2^2 - 2t_2}{(t_2 - 1)^2}\right)$ . D'où  $\vec{f}'(t_1) \cdot \vec{f}'(t_2) = \left(\frac{t_1 - 2}{t_1^2}\right) \left(\frac{t_2 - 2}{t_2^2}\right) + \left(\frac{1 - 3t_1}{t_1^4}\right) \left(\frac{1 - 3t_2}{t_2^4}\right) = \frac{t_1^2 t_2^2 (t_1 - 2)(t_2 - 2) + (1 - 3t_1)(1 - 3t_2)}{t_1^4 t_2^4}$

donc  $\vec{r}'(t_1) \cdot \vec{r}'(t_2) = \frac{p^3 - 2sp^2 + 4p^2 + 1 - 3s + 9p}{t_1^4 t_2^4} = \frac{-1 + 2 + 4 + 1 + 3 - 9}{t_1^4 t_2^4} = 0$  et l'orthogonalité voulue.

**16.12** En posant  $f(t) = \left(\frac{t^2}{2} + t, \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)$ , on a  $f$  de classe  $C^\infty$  et  $f'(t) = (t+1, t(t+1))$  donc pour  $t = -1$  on a un point de rebroussement de première espèce car  $f''(-1) = (1, -1)$  et  $f'''(-1) = (0, 2)$ . Il y a deux branches paraboliques de direction  $(Oy)$  quand  $t$  tend vers  $\pm\infty$ . La tangente en un point de paramètre  $t$  est  $T_t : tx - y = \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}$ . Soit  $M(x, y)$  un point de  $\mathcal{O}$  donc appartenant à  $T_{t_1}$  et  $T_{t_2}$  avec  $t_1 \neq t_2$  ; l'orthogonalité donne  $t_1 t_2 = -1$  et on résout le système  $t_1 x - y = \frac{t_1^3}{6} + \frac{t_1^2}{2}$ ,  $t_2 x - y = \frac{t_2^3}{6} + \frac{t_2^2}{2}$  ce qui donne  $x = \frac{s^2 + 3s + 1}{6}$ ,  $y = \frac{-s - 3}{6}$  avec  $s = t_1 + t_2$ . Ainsi :  $t_1 + t_2 = -6y - 3$  et  $x = 6y^2 + 3y + \frac{1}{6} \iff X^2 = 6Y^2$  si  $X = x + \frac{5}{24}$  et  $Y = y + \frac{1}{4}$  donc  $\mathcal{O}$  est inclus dans la parabole d'axe  $(Sx)$  avec  $S = \left(-\frac{5}{24}, -\frac{1}{4}\right)$  : elle est de paramètre  $p = \frac{1}{12}$ . Réciproquement, si  $M(x, y)$  appartient à cette parabole, il existe  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $t_1 t_2 = -1$  et  $t_1 + t_2 = -(6y + 3)$  car le polynôme  $X^2 + (6y + 3)X - 1$  possède deux racines réelles (son discriminant vaut  $\Delta = 9(2y + 1)^2 + 4 > 0$ ) et on remonte les calculs.

### 16.3 Courbes de l'espace

**16.13** On calcule les dérivées de  $x$ ,  $y$  et  $z$  pour avoir :  $M(t)$  régulier si et seulement si  $t \neq \pi [2\pi]$ . Dans ce cas, on trouve  $\vec{T} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{3t}{2}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{3t}{2}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  car  $\vec{r}'(t) = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \vec{T}$ . Comme le paramétrage est  $4\pi$ -périodique, la longueur de la courbe est  $L = \int_0^{4\pi} s'(t) dt = \int_0^{4\pi} 2\sqrt{2} \left|\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right| dt = 16\sqrt{2}$ .

**16.14**  $M_1, M_2, M_3, M_4$  coplanaires si et seulement s'il existe  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  avec  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  tels que le plan  $P$  d'équation  $ax + by + cz - d = 0$  passe par ces points, ce qui équivaut à :  $t_1, t_2, t_3, t_4$  sont les racines (distinctes) du polynôme  $aX^4 + bX^3 + cX^2 - d(1 + X^2)$ . Si un tel polynôme existe, par les relations coefficients-racines, comme il n'y a pas de terme en  $X$ , on obtient la relation  $t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_4 + t_1 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_4 = 0$ . Réciproquement, si cette condition est réalisée, le polynôme  $(X - t_1)(X - t_2)(X - t_3)(X - t_4)$  fait l'affaire. En conclusion,  $M_1, M_2, M_3, M_4$  sont coplanaires si et seulement si  $t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_4 + t_1 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_4 = 0$  ou encore si et seulement si  $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4} = 0$  si aucun des  $t_i$  n'est nul.

### 16.4 Longueur de courbes

**16.15** a. Comme  $x_n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = y_n(t)$  et  $y_n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = x_n(t)$ , la courbe  $\Gamma_n$  est symétrique par rapport à la droite d'équation  $y = x$  et on peut ne l'étudier que pour  $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ .

$\Gamma_1$  est un quart de cercle de  $(1, 0)$  à  $(0, 1)$  donc  $L_1 = \frac{\pi}{2}$ .  $\Gamma_2$  est le segment de  $(1, 0)$  à  $(0, 1)$  donc  $L_2 = \sqrt{2}$ .

b. Pour  $n \geq 3$ , d'après le cours :  $L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'_n(t)^2 + y'_n(t)^2} dt$  et comme  $x'_n(t) = -n \sin(t) \cos^{n-1}(t)$  et  $y'_n(t) = n \cos(t) \sin^{n-1}(t)$  on obtient  $L_n = n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cos(t) \sqrt{\cos^{2n-4}(t) + \sin^{2n-4}(t)} dt$ .

$\Gamma_3$  est un quart d'astroïde et  $L_3 = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) dt = \frac{3}{2} \left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$ .

c. On obtient, en élevant au carré :  $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$ . Ainsi, comme  $x'_n \leq 0$  et  $y'_n \geq 0$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $L_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-x'_n(t) + y'_n(t)) dt = x_n(0) - x_n\left(\frac{\pi}{2}\right) + y_n\left(\frac{\pi}{2}\right) - y_n(0) = 2$ . De plus, comme le chemin le plus court est la ligne droite :  $L_n \geq I_n A + I_n B$  si  $A = (1, 0)$  et  $B = (0, 1)$  car le plus court chemin est la ligne droite et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = (0, 0)$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n B + I_n A) = 2$  et par le théorème d'encadrement :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 2$ .

**16.16** a. Les domaines de définition de  $x$  et de  $y$  valent  $\mathbb{R}$  donc la courbe est définie pour  $t \in \mathbb{R}$ .

- $x$  et  $y$  sont  $2\pi$ -périodiques : on n'étudie la courbe que pour  $t \in [-\pi; \pi]$  et on repassera une infinité de fois en chaque point sans pour autant les appeler des points multiples.

- $x$  et  $y$  sont impaires : on n'étudie la courbe que pour  $t \in [0; \pi]$  et on effectuera ensuite une symétrie centrale de centre  $O$  pour avoir toute la courbe .

- $\forall t \in [0; \pi]$ ,  $x(\pi - t) = x(t)$  et  $y(\pi - t) = -y(t)$  : on n'étudie la courbe que pour  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et on effectuera une symétrie orthogonale par rapport à  $(Ox)$  pour avoir toute la courbe.

Comme  $x'(t) = 8 \cos(t)$  et  $y'(t) = 2\sqrt{2} \cos(2t)$ , le tableau de variations pour  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  est très simple,  $x$  est croissante de 0 à 8 sur cet intervalle,  $y$  croît de 0 à  $\sqrt{2}$  sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  et décroît de  $\sqrt{2}$  à 0 sur  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ . Cette courbe est une sorte de nœud-papillon très aplati qui possède  $(Ox)$  et  $(Oy)$  comme axes de symétrie et dont un quart (pour  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ) va de  $(0, 0)$  à  $(8, 0)$ .

b. Sa longueur  $L$  vaut, d'après les deux symétries,  $L = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$ . Or  $x'(t)^2 + y'(t)^2$  vaut aussi  $64 \cos^2(t) + 8 \cos^2(2t) = 64 \cos^2(t) + 8(2 \cos^2(t) - 1)^2 = 32 \cos^4(t) + 32 \cos^2(t) + 8 = 8(2 \cos^2(t) + 1)^2$ .

Ainsi  $L = 8\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} (2 \cos^2(t) + 1) dt = 8\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} (\cos(2t) + 2) dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2} + 2t\right]_0^{\pi/2} = 8\pi\sqrt{2} \sim 35,54$ .

**16.17** a. L'ensemble de définition est  $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]2k\pi; 2k\pi + \pi[$ . Les fonctions  $x$  et  $y$  sont  $\pi$ -périodiques donc on

étudie la courbe pour  $t \in ]0; \pi[$ . De plus  $x(\pi - t) = x(t)$  et  $y(\pi - t) = -y(t)$  donc on n'étudie que sur  $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  et on effectuera ensuite une symétrie orthogonale par rapport à l'axe  $(Ox)$  pour avoir toute la courbe.

$\forall t \in I$ ,  $x'(t) = -\sin(2t) + \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = -2 \sin(t) \cos(t) + \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \cos(t) \times \frac{1 - 2 \sin^2(t)}{\sin(t)} = \frac{\cos(t) \cos(2t)}{\sin(t)}$  et

$y'(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$ . Le tableau de variations en découle :  $x$  croît de  $-\infty$  à  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2)$  sur  $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$  et décroît de  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2)$  à 0 sur  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$  ;  $y$  croît de 0 à  $\frac{1}{2}$  sur  $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$  et décroît de  $\frac{1}{2}$  à 0 sur  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$ .

Le point  $S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2), \frac{1}{2}\right)$  est donc un point stationnaire. Comme on a  $x''(t) = -2 \cos(2t) - \frac{1}{\sin^2(t)}$ ,  $x'''(t) = 4 \sin(2t) + \frac{2 \cos(t)}{\sin^3(t)}$ ,  $y''(t) = -2 \sin(2t)$ ,  $y'''(t) = -4 \cos(2t)$ , il vient  $\vec{f}''\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-2, -2)$  et  $\vec{f}'''(\frac{\pi}{4}) = (8, 0)$  donc  $p = 2$  et  $q = 3$  : c'est un point de rebroussement de première espèce.

b. Par symétrie, les points de rebroussement sont obtenus pour  $t_1 = \frac{\pi}{4}$  et  $t_2 = \frac{3\pi}{4}$ . Ainsi, la longueur

cherchée est  $L = 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$ . Or  $x'(t)^2 + y'(t)^2 = \frac{\cos^2(t) \cos^2(2t)}{\sin^2(t)} + \cos^2(2t) = \frac{\cos^2(2t)}{\sin^2(t)}$  donc

$L = -2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos(2t)}{\sin(t)} dt = 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{2 \cos^2(t) - 1}{1 - \cos^2(t)} (-\sin(t)) dt$  et, avec le changement de variable  $u = \cos(t)$

correctement justifié :  $L = 2 \int_{1/\sqrt{2}}^0 \frac{2u^2 - 1}{1 - u^2} du = 2 \int_0^{1/\sqrt{2}} \left( 2 - \frac{1}{2(1-u)} - \frac{1}{2(1+u)} \right) du$ . On peut maintenant intégrer à vue :  $L = \left[ 4u + \ln(1-u) - \ln(1+u) \right]_0^{1/\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + \ln(2) - 2 \ln(2 + \sqrt{2}) \sim 1,06$ .

On aurait pu aussi écrire  $L = -2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1 - 2 \sin^2(t)}{\sin(t)} dt = 4 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin(t) dt - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin(t)}$  ce qui donne le même résultat  $L = \left[ -4 \cos(t) - 2 \ln \left( \tan(t/2) \right) \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = 2\sqrt{2} + 2 \ln(\sqrt{2} - 1)$  car  $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$ .

**16.18** On calcule les dérivées  $x'(t) = 6t(t+1)$  et  $y'(t) = 6(t+1)$  donc le point de rebroussement de première espèce ( $p = 2$  et  $q = 3$ ) est obtenu pour  $t = -1$  en  $A(1, -3)$ . Ensuite, la longueur de l'arc (AO) est  $L = 6 \int_{-1}^0 \sqrt{t^2(t+1)^2 + (t+1)^2} dt = 6 \int_{-1}^0 (t+1) \sqrt{1+t^2} dt = 2 - \sqrt{2} + 3 \ln(1 + \sqrt{2})$  après le changement de variable  $t = \operatorname{sh} u$  (car  $\operatorname{Argsh}(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$ ).

**16.19**  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \implies 2\sqrt{xy} = 1 - x - y \implies (x-y)^2 = 2(x+y) - 1$ . La courbe est un arc de parabole d'axe la première bissectrice et tangent aux axes en  $(1,0)$  et en  $(0,1)$  (on peut pour s'en convaincre exprimer les points dans le repère  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  avec  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ ).

En posant  $x - y = \operatorname{sh} t$ , on obtient  $2(x+y) = \operatorname{ch}^2 t$  donc  $x = \frac{1}{2} \operatorname{ch}^2 t + \frac{1}{4} \operatorname{sh} t$ ,  $y = \frac{1}{2} \operatorname{ch}^2 t - \frac{1}{4} \operatorname{sh} t$  et  $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{\operatorname{ch}^2 t}{\sqrt{2}}$ . Ainsi :  $L = \int_{-\operatorname{Argsh} 1}^{\operatorname{Argsh} 1} \frac{\operatorname{ch}^2 t dt}{\sqrt{2}} = \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}} + 1$ .

## 16.5 Exercices aux oraux des étudiants de PSI1

**16.20** a. Si  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  est de classe  $C^{n+1}$  sur l'intervalle  $I$ , alors pour tout  $(a, b) \in I^2$ , on a la formule de TAYLOR

reste intégral donnée par  $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$ . C'est un grand classique, on effectue une récurrence en initialisant à  $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$  si  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ . Ensuite, si

$f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k = \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$  avec  $f$  de classe  $C^{n+2}$  sur  $I$  (donc sur  $\widetilde{[a; b]}$ ), on effectue une intégration par parties avec  $u(t) = f^{(n+1)}(t)$  et  $v(t) = -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)}$ ,  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $\widetilde{[a; b]}$

d'où  $f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k = \left[ -\frac{(b-t)^{n+1} f^{(n+1)}(t)}{(n+1)n!} \right]_a^b - \frac{-1}{(n+1)n!} \int_a^b (b-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt$ . Alors  $f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k - \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} = f(b) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k = \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt$ .

Par principe de récurrence, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , si  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  est de classe  $C^{n+1}$  sur  $I$ , pour tout  $(a, b) \in I^2$ , on a  $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$ .

b. Si  $x \in I$ , on a  $f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$ . Si  $f^{(n+1)}$  est bornée sur  $I$ , on a donc

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{n!} \left| \int_a^x |x-t|^n dt \right| = \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{n!} \left| \int_a^x (x-t)^n dt \right| = \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty |x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

car  $|x-t|^n$  garde un signe constant sur l'intervalle  $\widetilde{[a; x]}$  et que  $\int_a^x (x-t)^n dt = \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_a^x = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$ .

c. En appliquant l'inégalité précédente pour  $h > 0$  et  $x \in \mathbb{R} : |f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{\|f''\|_\infty h^2}{2}$  à l'ordre

$n = 1$  entre  $x+h$  et  $x$ . Par inégalité triangulaire, comme  $|hf'(x)| = |hf'(x) - f(x+h) + f(x) + f(x+h) - f(x)|$ , on a  $|hf'(x)| \leq |hf'(x) - f(x+h) + f(x)| + |f(x+h)| + |f(x)| \leq \frac{\|f''\|_\infty h^2}{2} + 2\|f\|_\infty$  donc  $|f'(x)| \leq \frac{\|f''\|_\infty h}{2} + 2\frac{\|f\|_\infty}{h}$ .

Par conséquent,  $f'$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall h > 0$ ,  $\|f'\|_\infty \leq \varphi(h) = \frac{\|f''\|_\infty h}{2} + 2\frac{\|f\|_\infty}{h}$  donc  $\|f'\|_\infty \leq \inf_{\mathbb{R}_+^*} \varphi$ .

- si  $\|f\|_\infty = 0$ , alors  $f = 0$  donc  $f' = 0$  et  $\|f'\|_\infty = 0$ .
- si  $\|f''\|_\infty = 0$ , alors  $f'' = 0$  donc  $f$  est affine et, pour que  $f$  soit bornée sur  $\mathbb{R}$ , il est nécessaire que  $f$  soit constante donc que  $f' = 0$  et on a encore  $\|f'\|_\infty = 0$ .
- si  $\|f\|_\infty > 0$ ,  $\|f''\|_\infty > 0$ , comme  $\varphi'(h) = \frac{\|f''\|_\infty}{2} - 2\frac{\|f\|_\infty}{h^2}$  donc  $\varphi$  est minimale en  $h_0 = 2\sqrt{\frac{\|f\|_\infty}{\|f''\|_\infty}}$  et on a  $\inf_{\mathbb{R}_+^*} \varphi = \varphi(h_0) = 2\sqrt{\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$ .

On en déduit, et ceci dans tous les cas, que  $\|f'\|_\infty \leq 2\sqrt{\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$ .

On peut faire mieux : si  $h > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ , avec  $\mathbf{b}$ . entre  $x+h$  et  $x$  d'une part, et entre  $x-h$  et  $x$  d'autre part, on a  $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{\|f''\|_\infty h^2}{2}$  et  $|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{\|f''\|_\infty h^2}{2}$ . Comme  $|2hf'(x)| = |hf'(x) - f(x+h) + f(x) + hf'(x) + f(x-h) - f(x) + f(x+h) - f(x-h)|$ , par inégalité triangulaire, il vient  $|hf'(x)| \leq |hf'(x) - f(x+h) + f(x)| + |hf'(x) + f(x-h) - f(x)| + |f(x+h)| + |f(x-h)| \leq \|f''\|_\infty h^2 + 2\|f\|_\infty$  donc  $|f'(x)| \leq \|f''\|_\infty h + 2\frac{\|f\|_\infty}{h}$ . Par conséquent,  $f'$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall h > 0$ ,  $\|f'\|_\infty \leq \psi(h) = \|f''\|_\infty h + 2\frac{\|f\|_\infty}{h}$  donc  $\|f'\|_\infty \leq \inf_{\mathbb{R}_+^*} \psi$ . Comme avant, en étudiant  $\psi$  dans les trois cas, on trouve que  $\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$ .

**d.** On va construire  $g$  en trois étapes :

- Soit d'abord la fonction  $f_1 : [0; 2b] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f_1(x) = f(x)$  si  $x \in [0; b]$  et  $f_1(x) = f(2b-x)$  si  $x \in [b; 2b]$ . On a la continuité de  $f_1$  en  $b$ , donc sur tout  $[0; 2b]$  car  $\lim_{x \rightarrow b^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b) = f_1(b)$ . Par théorème de prolongement  $C^1$  appliqué deux fois en  $b$  à  $f'_1$  et  $f''_1$ , la fonction  $f_1$  est de classe  $C^2$  sur  $[0; 2b]$  avec  $f_1(b) = f(b)$ ,  $f'_1(b) = 0$  et  $f''_1(b) = f''(b)$ . Comme les valeurs de  $f_1$ ,  $f'_1$ ,  $f''_1$  sur  $[b; 2b]$  sont au signe près celles de  $f$  sur  $[0; b]$  car  $\forall x \in [b; 2b]$   $f_1(x) = f(2b-x)$ ,  $f'_1(x) = -f'(2b-x)$  et  $f''_1(x) = f''(2b-x)$ , on a l'égalité des normes infinies :  $\forall k \in \{0, 1, 2\}$ ,  $\|f_1^{(k)}\|_{\infty, [0; 2b]} = \|f^{(k)}\|_{\infty, [0; b]}$ .

- Soit ensuite la fonction  $f_2 : [-2b; 2b] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f_2(x) = f_1(x)$  si  $x \in [0; 2b]$  et  $f_2(x) = -f_1(-x)$  si  $x \in [-2b; 0]$ .  $f_2$  est continue en  $0$ , donc sur tout  $[-2b; 2b]$  car  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = f_1(0) = 0 = f_2(0)$ . Par théorème de prolongement  $C^1$  appliqué deux fois en  $0$  à  $f'_2$  et  $f''_2$ , la fonction  $f_2$  est de classe  $C^2$  sur  $[-2b; 2b]$  avec  $f_2(0) = 0$ ,  $f'_2(0) = f'(0)$  et  $f''_2(0) = 0$ . Comme les valeurs de  $f_2$ ,  $f'_2$ ,  $f''_2$  sur  $[-2b; 0]$  sont au signe près celles de  $f_1$  sur  $[0; 2b]$  car  $\forall x \in [-2b; 0]$   $f_2(x) = -f_1(-x)$ ,  $f'_2(x) = f'_1(-x)$  et  $f''_2(x) = -f''_1(-x)$ , on a à nouveau des égalités de normes infinies :  $\forall k \in \{0, 1, 2\}$ ,  $\|f_2^{(k)}\|_{\infty, [-2b; 2b]} = \|f_1^{(k)}\|_{\infty, [0; 2b]} = \|f^{(k)}\|_{\infty, [0; b]}$ .

- Soit enfin  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction  $4b$ -périodique égale à  $f_2$  sur l'intervalle  $[-2b; 2b]$ . On a continuité de  $g$  en  $\pm 2b$ , donc sur tout  $\mathbb{R}$  car  $\lim_{x \rightarrow \pm(2b)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm(2b)^+} g(x) = f_2(\pm 2b) = f(2b) = 0$ . Par théorème de prolongement  $C^1$  appliqué deux fois en  $\pm 2b$  à  $g'$  et  $g''$ , la fonction  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  (par  $4b$ -périodicité) avec  $g(\pm 2b) = 0$ ,  $g'(\pm 2b) = -f'(0)$  et  $g''(\pm 2b) = 0$ . Comme les valeurs de  $g$ ,  $g'$ ,  $g''$  sur  $\mathbb{R}$  sont exactement celles de  $f_2$  sur  $[-2b; 2b]$  car  $\forall x \in \mathbb{R}$ , si  $y \in [-2b; 2b]$  est tel que  $x \equiv y [4b]$ ,  $g(x) = f_2(y)$ ,  $g'(x) = f'_2(y)$  et  $g''(x) = f''_2(y)$ , on a  $\forall k \in \{0, 1, 2\}$ ,  $\|g^{(k)}\|_{\infty, \mathbb{R}} = \|f_2^{(k)}\|_{\infty, [-2b; 2b]} = \|f_1^{(k)}\|_{\infty, [0; 2b]} = \|f^{(k)}\|_{\infty, [0; b]}$ .

e. On a  $0 < a < b$  car  $\cotan(a) > 0$ .  $f$  est continue en  $a$  car  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = \sin(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ . De plus,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) = \cos(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^-} f''(x) = -\sin(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f''(x)$  donc on conclut que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $[0; b]$  par le théorème de prolongement  $C^1$  appliqué à  $f, f'$  au voisinage de  $a$ . Il est clair que  $f(0) = \sin(0) = 0, f''(0) = -\sin(0) = 0$  et  $f'(b) = \cos(a) - 2(b-a)\sin(a) = 0$  car  $b = a + \frac{\cos(a)}{2\sin(a)}$ .

**16.21** a. Les points réguliers  $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$  de  $\Gamma$  sont ceux où  $(x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0)$ . Or, on a  $x'(t) = \cos(t) + \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(t) + \cos(2t); y'(t) = -\sin(t) - 2\sin(t)\cos(t); z'(t) = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ .

Ainsi,  $x'(t) = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right), y'(t) = -2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{3t}{2}\right)$  et  $z'(t) = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ . On peut donc factoriser  $(x'(t), y'(t), z'(t)) = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{3t}{2}\right), -\sin\left(\frac{3t}{2}\right), 1\right)$ . Or le vecteur  $\left(\cos\left(\frac{3t}{2}\right), -\sin\left(\frac{3t}{2}\right), 1\right)$  ne peut pas s'annuler donc les points réguliers de  $\Gamma$  sont ceux qui vérifient  $\cos\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$  équivalent à  $t \neq \pi [2\pi]$ .

On pouvait aussi dire que  $(x'(t), y'(t), z'(t)) = (0, 0, 0) \iff x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = 0$  or, par un calcul direct,  $x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = 2(\cos(t)\cos(2t) + \sin(t)\sin(2t)) + 2 + 4\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = 8\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$ .

Si  $t \neq \pi [2\pi]$ , la tangente à  $\Gamma$  en  $M(t)$  a pour vecteur directeur  $v(t) = \left(\cos\left(\frac{3t}{2}\right), -\sin\left(\frac{3t}{2}\right), 1\right)$  donc est paramétrée par  $x = x(t) + \lambda \cos\left(\frac{3t}{2}\right), y = y(t) - \lambda \sin\left(\frac{3t}{2}\right), z = z(t) + \lambda$  (avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

b. L'axe  $(Oz)$  et la tangente  $\Gamma$  en  $M(t)$  ont pour vecteurs directeurs respectifs  $e_3$  et  $v(t)$  donc l'angle  $\theta \in [-\pi; \pi]$  (non orienté) cherché vérifie  $\cos(\theta) = \frac{(e_3 | v(t))}{\|e_3\| \|v(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  donc  $\theta = \text{Arccos}(\cos(\theta)) = \frac{\pi}{4}$ .

c. L'image de  $\mathbb{R}$  par la fonction  $t \mapsto z(t) = 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)$  est l'intervalle  $[-4; 4]$ . L'image de  $\Gamma$  par la projection orthogonale sur  $(xOy)$  est une cardioïde puisque  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + \cos(t)$  et  $x = r(t)\sin(t), y = r(t)\cos(t)$ .

d. Comme  $t \mapsto M(t)$  est  $4\pi$ -périodique, que  $M(-t) = (x(-t), y(-t), z(-t)) = (-x(t), y(t), -z(t))$  est l'image de  $M(t)$  par le demi-tour d'axe  $(Oy)$ , que  $M(2\pi - t) = (x(2\pi - t), y(2\pi - t), z(2\pi - t)) = (-x(t), y(t), z(t))$  est l'image de  $M(t)$  par la réflexion de plan  $(yOz)$ , qu'un demi-tour et une réflexion sont 2 isométries de l'espace,  $L = \int_{-\pi}^{3\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = 4 \int_0^{\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$  est la longueur de la courbe  $\Gamma$ . Ainsi,  $L = 8\sqrt{2} \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8\sqrt{2} \left[2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi} = 16\sqrt{2} \sim 22,63$ .

**16.22** Le domaine de définition est  $\mathcal{D}_f = ]-2; 0[ \cup ]0; +\infty[$  (intersection des domaines de  $x$  et  $y$ ). Les fonctions  $x$  et

$y$  sont dérivables sur  $\mathcal{D}_f$  et on a  $x'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t+2} = \frac{(t+1)(t-2)}{t^2(t+2)}, y'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{(t-1)(t+1)}{t^2}$ . Ainsi,

$x$  est croissante sur  $] -2; 1]$  et sur  $[2; +\infty[$  et décroissante sur  $[-1; 0[$  et  $]0; 2]$  alors que  $y$  est croissante sur  $] -2; -1]$  et  $[2; +\infty[$  et décroissante sur  $[-1; 0[$  et sur  $]0; 1]$ . On a une tangente verticale pour  $t = 2$  au point  $\left(\frac{1}{2} + \ln(4), \frac{3}{2}\right)$  et une tangente horizontale pour  $t = 1$  au point  $(1 + \ln(3), 2)$ . Le point  $(-1, -2)$  obtenu pour

$t = -1$  est un point stationnaire et  $\vec{f}''(t) = \left(\frac{2}{t^3} - \frac{1}{(t+2)^2}, \frac{2}{t^3}\right), \vec{f}'''(t) = \left(-\frac{6}{t^4} + \frac{2}{(t+2)^3}, -\frac{6}{t^4}\right)$  donc  $\vec{f}'''(-1) = (-3, -2) \neq (0, 0)$  donc  $p = 2$  et  $\vec{f}'''(-1) = (-4, -6)$  non colinéaire au précédent donc  $q = 3$ . On a donc en  $(-1, -2)$  pour  $t = -1$  un point de rebroussement de première espèce.

De plus,  $\lim_{t \rightarrow -2^+} x(t) = +\infty$  alors que  $y(-2) = -\frac{5}{2}$  donc la droite  $y = -\frac{5}{2}$  est asymptote verticale à la courbe.

Comme  $\lim_{t \rightarrow 0^-} x(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = -\infty$ , que  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{y(t)}{x(t)} = 1$  et que  $\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) - x(t) = -\ln(2)$ , la droite

$y = x - \ln(2)$  est asymptote oblique à la courbe quand  $t \rightarrow 0^-$ . Même chose lorsque  $t \rightarrow 0^+$ . Enfin,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = +\infty$  mais  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = +\infty$  : branche parabolique de direction  $(Oy)$  si  $t \rightarrow +\infty$ .

**16.23** a. D'abord, puisque l'équation est linéaire, on vérifie que l'application  $v_t$  est bien linéaire. En effet, soit  $(Y_1, Y_2) \in (\mathbb{R}^n)^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors en notant  $X_1$  et  $X_2$  les solutions respectives des deux problèmes de CAUCHY  $(X'_1(t) = A(t)X_1(t) \text{ avec } X_1(0) = Y_1)$  et  $(X'_2(t) = A(t)X_2(t) \text{ avec } X_2(0) = Y_2)$ , alors  $X_1 + \lambda X_2$  est de classe  $C^1$  par combinaison linéaire et on a

$$(X_1 + \lambda X_2)'(t) = X'_1(t) + \lambda X'_2(t) = A(t)X_1(t) + \lambda A(t)X_2(t) = A(t)(X_1(t) + \lambda X_2(t))$$

avec  $(X_1 + \lambda X_2)(0) = X_1(0) + \lambda X_2(0) = Y_1 + \lambda Y_2$ .

Ainsi, par définition,  $v_t(Y_1 + \lambda Y_2) = (X_1 + \lambda X_2)(t) = X_1(t) + \lambda X_2(t) = v_t(Y_1) + \lambda v_t(Y_2)$  comme attendu.

Si  $t \geq 0$ , par définition  $X(t) = v_t(Y) = v_t(X(0))$  (en vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ ). Ainsi, comme  $R(t)$  est la matrice de  $v_t$  dans la base canonique et que la colonne  $X(0)$  représente les coordonnées du vecteur  $X(0)$  dans la base canonique, on a  $X(t) = R(t)X(0)$ . (en vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ).

b. Pour  $t = 0$ , on a  $v_0(Y) = X(0) = Y$  par construction donc  $v_0$  est l'identité de  $\mathbb{R}^n$  d'où  $R(0) = I_n$ .

En prenant  $X(0) = Y = E_j$  pour  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , la solution  $C_j$  associée à ce choix de position initiale donne l'équation  $C_j(t) = R(t)E_j$  qui est la  $j$ -ième colonne de  $R(t)$ . Comme  $C_j$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  d'après CAUCHY-LIPSCHITZ, la fonction matricielle  $R$  est elle aussi de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Pour  $Y \in \mathbb{R}^n$  quelconque, avec  $X(0) = Y$ , on dérive la relation  $\forall t \geq 0, X(t) = R(t)X(0)$ , d'où  $X'(t) = R'(t)Y = A(t)X(t) = A(t)R(t)Y$ . Comme cette relation est vraie quel que soit le vecteur  $Y \in \mathbb{R}^n$  choisi, en prenant successivement les vecteurs  $E_j$  de la base canonique, on obtient comme attendu  $\forall t \geq 0, R'(t) = A(t)R(t)$ .

c. Suivons l'énoncé en écrivant  $W(t) = \det(L_1(t), \dots, L_n(t))$  (notation). Les lignes (composées des cases)  $L_i$  sont de classe  $C^1$  d'après la question précédente. On dérive  $W(t) = \det(R(t))$  avec la formule du cours,

$$W'(t) = \sum_{i=1}^n \det(L_1(t), \dots, L_{i-1}(t), L'_i(t), L_{i+1}(t), \dots, L_n(t))$$

en adaptant l'expression quand  $i = 1$  ou  $i = n$ . Or  $R'(t) = A(t)R(t)$  ce qui donne  $L'_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}(t)L_j(t)$  donc, par multilinéarité et alternance du déterminant, on obtient

$$\begin{aligned} \det(L_1(t), \dots, L_{i-1}(t), L'_i(t), L_{i+1}(t), \dots, L_n(t)) &= \det(L_1(t), \dots, L_{i-1}(t), \sum_{j=1}^n a_{i,j}(t)L_j(t), \dots, L_n(t)) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{i,j}(t) \det(L_1(t), \dots, L_{i-1}(t), L_j(t), \dots, L_n(t)) \\ &= a_{i,i}(t) \det(L_1(t), \dots, L_{i-1}(t), L_i(t), \dots, L_n(t)) \end{aligned}$$

car seul le terme  $j = i$  apporte une contribution éventuellement non nulle.

Ainsi,  $W'(t) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}(t) \det(L_1(t), \dots, L_{i-1}(t), L_i(t), \dots, L_n(t)) = \left( \sum_{i=1}^n a_{i,i}(t) \right) W(t) = \text{Tr}(A(t))W(t)$ .

En notant  $H$  la primitive de  $t \mapsto \text{Tr}(A(t))$  sur  $\mathbb{R}_+$  qui s'annule en 0, l'équation différentielle ci-dessus se résout, comme  $W(0) = \det(I_n) = 1$ , en  $\forall t \geq 0, W(t) = e^{H(t)} \neq 0$  donc  $R(t)$  est bien inversible.

d. Soit  $Y \in \mathbb{R}^n$  et  $X$  la solution de (E) telle que  $X(0) = Y$ . Soit aussi  $X_1$  la solution de (E) telle que  $X_1(0) = X(1)$  et  $X_2 : t \mapsto X(t+1)$ . Les deux fonctions  $X_1$  et  $X_2$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ , vérifient

$X_1(0) = X(1) = X(0+1) = X_2(0)$ . Puisque la fonction  $A$  est 1-périodique,  $X_2$  est aussi solution de (E) car  $\forall t \geq 0$ ,  $X_2'(t) = X'(t+1) = A(t+1)X(t+1) = A(t)X_2(t)$ . Ainsi,  $X_1$  et  $X_2$  sont des solutions du même problème de CAUCHY, ce qui nous permet de conclure que  $X_1 = X_2$ .

Par conséquent,  $\forall t \geq 0$ ,  $X_1(t) = R(t)X_1(0) = R(t)X(1) = R(t)R(1)Y = R(t+1)Y = R(t+1)X_2(0) = X_2(t)$ . Comme  $R(t)R(1)Y = R(t+1)Y$  pour tout vecteur  $Y \in \mathbb{R}^n$ , on a bien  $R(t)R(1) = R(t+1)$ .

**e.** • Supposons que  $1 \in \text{Sp}(R(1))$ , alors il existe un vecteur  $Y \neq 0$  tel que  $R(1)Y = Y$ . Soit  $X$  la solution de (E) telle que  $X(0) = Y$ . D'après **a.** et **d.**, pour  $t \geq 0$ , on a  $X(t+1) = R(t+1)Y = R(t)R(1)Y = R(t)Y = X(t)$  donc  $X$  est effectivement 1-périodique, de classe  $C^1$  car solution de (E) et non identiquement nulle car  $X(0) = Y \neq 0$ .

• Soit  $X$  une solution de (E) non identiquement nulle, de classe  $C^1$  et 1-périodique, posons  $Y = X(0)$ . Si on avait  $Y = 0$ , alors  $\forall t \geq 0$ ,  $X(t) = R(t)Y = 0$  et  $X$  serait nulle : NON ! Ainsi  $Y \neq 0$ . Comme  $X$  est 1-périodique, on a  $X(1) = R(1)X(0) = X(0)$  d'après **a.** donc  $R(1)Y = Y$  et 1 est bien une valeur propre de  $R(1)$  car  $Y \neq 0$ .

Par double implication, on a bien l'équivalence de l'énoncé.

**f.** Soit  $t \geq 0$ , par définition  $Q(t+1) = R(t+1)P\Lambda(t+1)P^{-1}$ . Or, d'après la question **d.** et l'énoncé, on a  $R(t+1) = R(t)R(1) = R(t)PD_0P^{-1}$  et  $\Lambda(t+1) = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1^{t+1}}, \dots, \frac{1}{\lambda_n^{t+1}}\right) = D^{-1}\Lambda(t)$  par les propriétés de l'exponentielle. Comme  $DP^{-1}PD^{-1} = I_n$ , on a  $Q(t+1) = R(t)PD_0P^{-1}PD^{-1}\Lambda(t)P^{-1} = R(t)P\Lambda(t)P^{-1} = Q(t)$  donc  $Q$  est bien 1-périodique.

**g.** On constate d'abord que  $Z$  est bien définie car  $Q$  est bien inversible puisque  $\Lambda$  l'est clairement et  $R$  d'après la question **c.** De plus, ces fonctions matricielles étant de classe  $C^1$ , la fonction  $t \mapsto Q(t)^{-1}$  l'est aussi (par exemple avec l'expression de l'inverse avec comatrice et déterminant). Ainsi,  $Z$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

On effectue d'abord quelques calculs. Il vient  $\Lambda'(t) = -D_0\Lambda(t)$  car  $(\lambda_1^{-t})' = -\ln(\lambda_1)\lambda_1^{-t}$ . De plus, il vient

$$Q'(t) = R'(t)P\Lambda(t)P^{-1} + R(t)P\Lambda'(t)P^{-1} = A(t)R(t)P\Lambda(t)P^{-1} - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1} = A(t)Q(t) - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}.$$

• Supposons maintenant que  $X'(t) = A(t)X(t)$ , c'est-à-dire que  $X$  est solution de (E). Les calculs sont similaires mais allons-y ! Comme  $X(t) = Q(t)Z(t)$ , on a  $X'(t) = A(t)X(t) = Q'(t)Z(t) + Q(t)Z'(t)$  ce qui donne, avec les calculs précédents :

$$A(t)X(t) = [A(t)Q(t) - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}]Z(t) + Q(t)Z'(t).$$

Or  $A(t)Q(t)Z(t) = A(t)X(t)$ , donc après simplification, il reste

$$Q(t)Z'(t) = R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}Z(t).$$

Mais comme  $Q(t)^{-1} = P(\Lambda(t))^{-1}P^{-1}(R(t))^{-1}$ , on obtient finalement, puisque  $P^{-1}(R(t))^{-1}R(t)P = I_n$ ,

$$Z'(t) = P(\Lambda(t))^{-1}P^{-1}(R(t))^{-1}R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}Z(t) = P(\Lambda(t))^{-1}D_0\Lambda(t)P^{-1}Z(t) = B(t)Z(t).$$

• Réciproquement, supposons que  $Z'(t) = B(t)Z(t)$ , alors, comme  $X(t) = Q(t)Z(t)$ , on a

$$\begin{aligned} X'(t) &= Q'(t)Z(t) + Q(t)Z'(t) \\ &= [A(t)Q(t) - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}]Z(t) + Q(t)B(t)Z(t) \\ &= A(t)X(t) + [Q(t)B(t) - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1}]Z(t). \end{aligned}$$

Or  $Q(t)B(t) - R(t)PD_0\Lambda(t)P^{-1} = R(t)P[\Lambda(t)P^{-1}P(\Lambda(t))^{-1}D_0\Lambda(t)P^{-1} - D_0\Lambda(t)P^{-1}] = 0$  après simplification ce qui montre bien qu'on a  $X'(t) = A(t)X(t)$ ,  $X$  est solution de (E) comme attendu.

Par double implication, on a :  $X$  est solution de (E)  $\iff Z'(t) = B(t)Z(t)$ .

**16.24 a.** La fonction  $g_1 : u \mapsto \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $g_1(u) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{u}}$  donc l'intégrale  $\int_0^t g_1(u)du$  converge par comparaison aux intégrales de RIEMANN. Ainsi,  $f_1$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De plus, par CHASLES, on a  $\forall t > 0$ ,  $f_1(t) = \int_0^1 g_1(u)du + \int_1^t g_1(u)du$  et  $1 \in \mathbb{R}_+^*$  donc, par le théorème fondamental de l'intégration,  $f_1$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  car  $g_1$  y est continue et on a  $f_1'(t) = g_1(t) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}$ .

**b.** Par intégration par parties, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} g_1(u)du$  a la même nature, puisque les fonction  $a : u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}}$  et  $b = \sin$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que  $\lim_{u \rightarrow 0^+} a(u)b(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} a(u)b(u) = 0$  car  $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$  et que  $\sin$  est bornée, que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2u^{3/2}} du$ . Mais  $\frac{\sin(u)}{2u^{3/2}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{u}}$  et  $\frac{\sin(u)}{2u^{3/2}} \underset{+\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{u^{3/2}}\right)$  donc la fonction  $u \mapsto \frac{\sin(u)}{2u^{3/2}}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$  par comparaison aux intégrales de RIEMANN et on en déduit que les intégrales  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2u^{3/2}} du$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du$  convergent. Ainsi,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_1(t) = I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du$ .

On admet d'après l'énoncé que  $f_2$  est bien définie et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  avec  $f_2'(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ , que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du$  converge et que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_2(t) = I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du$ .

**c.** D'après le cours, comme  $f : t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$  est de classe  $C^1$  sur  $[t_1; t_2]$ , la longueur de l'arc paramétré  $t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$  entre les points de paramètres  $t_1$  et  $t_2$  vaut  $L = \int_{t_1}^{t_2} \|f'(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2} dt$  donc  $L = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_{t_1}^{t_2} = 2\sqrt{t_2} - 2\sqrt{t_1}$ .

Cette courbe s'appelle une spirale de CORNU, pour  $t = 0$ , on est au point  $M_0 = f(0) = (0, 0)$ , on tend quand  $t$  tend vers  $+\infty$  vers le point limite  $A = (I_1, I_2)$  et on note  $M_t = f(t)$ . Alors  $L$  est la distance entre  $M_{t_1}$  et  $M_{t_2}$  sur la courbe et cette distance tend vers  $+\infty$  quand, par exemple,  $t_1 = 0$  et  $t_2$  tend vers  $+\infty$ .

**d.** En écrivant  $\int_t^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du = I_1 - f_1(t)$  et  $\int_t^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du = I_2 - f_2(t)$ ,  $F$  est de classe  $C^1$  par opérations et  $F'(t) = -2f_1'(t)(I_1 - f_1(t)) - 2f_2'(t)(I_2 - f_2(t)) = -\frac{2\cos(t)}{\sqrt{t}} \int_t^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du - \frac{2\sin(t)}{\sqrt{t}} \int_t^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}} du$  qu'on regroupe en  $F'(t) = -\frac{2}{\sqrt{t}} \int_t^{+\infty} \frac{\cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)}{\sqrt{u}} du = -2 \int_t^{+\infty} \frac{\cos(u-t)}{\sqrt{u}} du$ . On pose  $u = x + t = \varphi(x)$  avec  $\varphi$  qui est une bijection  $C^1$  strictement croissante de  $\mathbb{R}_+$  dans  $[t; +\infty[$  et on a par changement de variable  $F'(t) = -2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{t^2 + tx}} dx$  comme attendu.

**e.** Si  $(a, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ ,  $u \mapsto \frac{\cos(u)}{\sqrt{a+tu}}$  est continue sur le segment  $[0; \pi]$  donc l'intégrale  $I = \int_0^\pi \frac{\cos(u)}{\sqrt{a+tu}} du$  existe. On écrit pose  $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(u)}{\sqrt{a+tu}} du + \int_{\pi/2}^\pi \frac{\cos(u)}{\sqrt{a+tu}} du$  et on pose  $u = \pi - v = \varphi(v)$  avec  $\varphi$  de classe  $C^1$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , ce qui donne par changement de variable  $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(u)}{\sqrt{a+tu}} du + \int_{\pi/2}^0 \frac{\cos(\pi-v)}{\sqrt{a+t\pi-tv}} (-dv)$  qu'on regroupe, puisque  $\cos(\pi-v) = -\cos(v)$  en  $I = \int_0^{\pi/2} \cos(u) \left( \frac{1}{\sqrt{a+tu}} - \frac{1}{\sqrt{a+t\pi-tu}} \right) du$ . Or  $\cos$  et  $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{a+tu}} - \frac{1}{\sqrt{a+t\pi-tu}}$  sont continues et strictement positives sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  où  $u < \pi - u$  donc  $I > 0$ .

f. Par CHASLES,  $F'(t) = -2 \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\cos(x)}{\sqrt{t^2 + tx}} dx$  et, en posant dans chaque intégrale le changement de variable  $x = s + k\pi$ , on obtient  $F'(t) = -2 \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\cos(u + k\pi)}{\sqrt{t^2 + t(s + k\pi)}} du = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\cos(s)}{\sqrt{t^2 + k\pi + ts}} ds$ .  
 Posons  $u_k = \int_0^\pi \frac{\cos(s)}{\sqrt{t^2 + k\pi + ts}} ds = \int_0^{\pi/2} \cos(u) \left( \frac{1}{\sqrt{t^2 + k\pi + tu}} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + (k+1)\pi + tu}} \right) du$ , alors  $u_k > 0$  d'après e. et  $(u_k)_{k \geq 0}$  est strictement décroissante car  $\frac{1}{\sqrt{t^2 + k\pi + tu}} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + (k+1)\pi + tu}}$  vaut, avec la quantité conjuguée,  $\frac{\pi}{\sqrt{t^2 + k\pi + tu} \sqrt{t^2 + (k+1)\pi + tu} (\sqrt{t^2 + k\pi + tu} + \sqrt{t^2 + (k+1)\pi + tu})}$  et cette quantité décroît strictement quand  $k$  augmente pour toute valeur de  $u \in [0; \frac{\pi}{2}]$ . Par le critère spécial des séries alternées,  $F'(t) = -2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k$  est du signe du premier terme de cette série, donc  $F'(t) < 0$  car  $-2u_0 < 0$ , ce qui prouve que  $F$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$ .

**16.25** a.  $x$  et  $y$  sont définies sur  $\mathbb{R}$  donc le domaine de définition de cet arc est  $\mathbb{R}$ . Réduisons le domaine d'étude :

- Les fonctions  $x$  et  $y$  sont  $2\pi$ -périodiques donc on n'étudie cet arc que pour  $t \in [-\pi; \pi]$  et on repassera une infinité de fois en chaque point (sans pour autant dire que ce sont des points multiples).
- $x$  est paire et  $y$  est impaire donc on peut n'étudier cet arc que pour  $t \in [0; \pi]$  et on obtiendra toute la courbe en effectuant une symétrie orthogonale de la courbe obtenue par rapport à la droite  $(Ox)$ .
- $\forall t \in [0; \pi]$ ,  $x(\pi - t) = -x(t)$  et  $y(\pi - t) = -y(t)$  donc on peut n'étudier cet arc que pour  $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$  et on obtiendra toute la courbe en effectuant une symétrie centrale par rapport à  $O$ .

b. Comme  $x$  et  $y$  sont dérivables et qu'on a  $x'(t) = -3 \sin(3t)$  et  $y'(t) = 2 \cos(2t)$ , la fonction  $x$  est décroissante sur  $[0; \frac{\pi}{3}]$ , croissante sur  $[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$  et la fonction  $y$  est croissante sur  $[0; \frac{\pi}{4}]$  et décroissante sur  $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ . Les fonctions  $x'$  et  $y'$  ne s'annulent pas en même temps donc il n'y a pas de point stationnaire, par contre, la courbe admet des tangentes horizontales en le point  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$  pour  $t = \frac{\pi}{4}$  quand  $y'$  s'annule, et des tangentes verticales  $(1, 0)$  et  $(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$  pour  $t = 0$  et  $t = \frac{\pi}{3}$  quand  $x'$  s'annule. Bien sûr, par symétrie, on obtient d'autres points à tangente horizontale ou verticale.

c. On trace le tableau de variations de  $x$  et  $y$  et on relie les points pour avoir la courbe avec les symétries vues précédemment.  $\Gamma$  est une courbe de LISSAJOUS.

La voir sur Wolfram en tapant  $(\cos(3t), \sin(2t))$  dans "parametric plot".

**16.26** a. La fonction  $f : \mathbb{R} \mapsto (x(t), y(t))$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  car les fonctions  $x$  et  $y$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $x'(t) = -3 \sin(t) \cos^2(t)$  et  $y'(t) = 3 \cos(t) \sin^2(t)$ . La longueur de l'arc entre  $M(0) = (1, 0) = f(0)$  et  $M = f(t)$  est, d'après le cours, comme  $\sin$  et  $\cos$  sont positives sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ ,  $L = \int_0^t \|\vec{f}'(u)\| du$  qui donne,

$$L = \int_0^t \sqrt{9 \sin^2(u) \cos^4(u) + 9 \cos^2(u) \sin^4(u)} du = \frac{3}{2} \int_0^t (2 \sin(u) \cos(u)) dt = \frac{3}{2} [\sin^2(u)]_0^t = \frac{3 \sin^2(t)}{2}.$$

b. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = \frac{\pi}{2}$  les angles tels que  $\forall k \in [0; n]$ ,  $M_k = f(\alpha_k)$ .

Comme à la question précédente, la longueur de l'arc entre  $M_k$  et  $M_{k+1}$  vaut  $L_k = \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \|\vec{f}'(u)\| du$  donc

$L_k = \frac{3}{2} [\sin^2(u)]_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} = \frac{3(\sin^2(\alpha_{k+1}) - \sin^2(\alpha_k))}{2}$ . Puisque la longueur totale vaut  $L = \frac{3}{2}$  (en prenant  $t = \frac{\pi}{2}$  dans **a.**), l'énoncé impose que  $\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ ,  $L_k = \frac{3}{2n} = \frac{3(\sin^2(\alpha_{k+1}) - \sin^2(\alpha_k))}{2}$ , c'est-à-dire qu'on a la relation  $\sin^2(\alpha_{k+1}) - \sin^2(\alpha_k) = \frac{1}{n}$ . Ceci revient à écrire que  $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $\sin^2(\alpha_k) = \frac{k}{n}$  puis, comme  $\sin$  est injective et positive sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , que  $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ ,  $\alpha_k = \text{Arcsin}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)$ .

Le réel  $u_n$  représente la moyenne arithmétique des distances des points  $M_k$  à l'origine, et puisque l'on a  $OM_k = \sqrt{\cos^6(\alpha_k) + \sin^6(\alpha_k)} = \sqrt{\left(1 - \frac{k}{n}\right)^3 + \left(\frac{k}{n}\right)^3}$ , vaut  $u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sqrt{\left(1 - \frac{k}{n}\right)^3 + \left(\frac{k}{n}\right)^3}$ .

**c.** Par définition,  $u_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$  avec la fonction  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sqrt{(1-x)^3 + x^3}$  qui est continue sur le segment  $[0; 1]$ . On sait d'après le cours sur les sommes de RIEMANN qu'alors on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sqrt{(1-x)^3 + x^3} dx = \int_0^1 \sqrt{3x^2 - 3x + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \sqrt{1 + (\sqrt{3}(2x-1))^2} dx$

après mise sous forme canonique. On pose  $t = \sqrt{3}(2x-1)$  ou  $x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{3}}\right) = \varphi(t)$  avec  $\varphi$  de classe  $C^1$  sur le segment  $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$  pour avoir  $\ell = \frac{1}{4\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1+t^2} dt$ . Par parité de l'intégrande, on en déduit

que  $\ell = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+t^2} dt$ . On pose maintenant  $t = \text{sh}(u) = \psi(u)$  avec  $\psi$  de classe  $C^1$  sur  $[0; \alpha]$  avec  $\text{sh}(\alpha) = \sqrt{3}$  pour avoir  $\ell = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \text{sh}^2(u)} \text{ch}(u) du = \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^{\alpha} \text{ch}^2(u) du = \frac{1}{4\sqrt{3}} \int_0^{\alpha} (1 + \text{ch}(2u)) du$ .

Ainsi,  $\ell = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left[ u + \frac{\text{sh}(2u)}{2} \right]_0^{\alpha} = \frac{\alpha}{4\sqrt{3}} + \frac{\text{sh}(\alpha)\text{ch}(\alpha)}{4\sqrt{3}} = \frac{\alpha}{4\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}{4\sqrt{3}} = \frac{\alpha}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$ . Pour trouver  $\alpha$ ,

on résout, en posant  $x = e^\alpha$ , l'équation  $\text{sh}(\alpha) = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = \sqrt{3}$  qui donne  $x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$  ou encore, comme  $x > 0$ ,  $x = 2 + \sqrt{3}$ . Alors, on a  $\alpha = \ln(2 + \sqrt{3})$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\ln(2 + \sqrt{3})}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sim 0,69$ .

## 16.6 Officiel de la Taupe

**16.27** Le domaine de définition de l'arc est celui de la fonction  $x$ , là où sinus est strictement positive. Il est clair que  $x$  et  $y$  sont  $2\pi$ -périodiques donc on n'étudie la courbe que sur  $]0; \pi[$  et on repassera une infinité de fois aux mêmes points. Comme  $\forall t \in ]0; \pi[$ ,  $x(\pi - t) = x(t)$  et  $y(\pi - t) = -y(t)$ , on a une symétrie d'axe  $(Ox)$  de la courbe et on peut n'étudier la courbe que sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$ . La courbe possède une asymptote d'équation  $y = 0$  quand  $t$  tend vers  $0^+$  avec  $\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = -\infty$ .

Les fonctions  $x$  et  $y$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $]0; \pi[$  avec  $x'(t) = -2 \sin(t) \cos(t) + \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \frac{\cos(t) \cos(2t)}{\sin(t)}$

et  $y'(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t)$ . Les deux points de rebroussement de cette courbe sont obtenus pour  $\cos(2t) = 0$  donc pour  $t = \frac{\pi}{4}$  (et donc  $t = \frac{3\pi}{4}$  par symétrie). La longueur cherchée est donc

donnée par la relation  $L = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$  par symétrie. Pour

$t \in \left] \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{\frac{\cos^2(2t)}{\sin^2(t)}} = -\frac{\cos(2t)}{\sin(t)} = 2 \sin(t) - \frac{1}{\sin(t)}$  car  $\sin(t) > 0$  et  $\cos(2t) < 0$ . On

a donc  $L = 2 \left[ -2 \cos(t) - \ln \left( \tan \left( \frac{t}{2} \right) \right) \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = 2\sqrt{2} + 2 \ln(\sqrt{2} - 1) \sim 1,06$ .

**16.28** a. Initialisation : comme  $n + 1 \geq 1$ ,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I$  donc  $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$ .

Hérédité : soit  $p \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$  tel que  $\forall x \in I$ ,  $f(x) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{p!} \int_a^x f^{(p+1)}(t) (x-t)^p dt$ . Soit  $x \in I$ , on

pose  $u(t) = -\frac{(x-t)^{p+1}}{p+1}$  et  $v(t) = f^{(p+1)}(t)$  de sorte que  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $\widetilde{[a; x]}$  car  $p+1 \leq n$  et que

$u'(t) = (x-t)^p$ , d'où  $f(x) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{p!} \left[ -\frac{(x-t)^{p+1}}{p+1} f^{(p+1)}(t) \right]_a^x + \frac{1}{p!} \int_a^x f^{(p+2)}(t) \frac{(x-t)^{p+1}}{p+1} dt$

par intégration par parties. Ceci s'écrit aussi  $f(x) = \sum_{k=0}^{p+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{(p+1)!} \int_a^x f^{(p+2)}(t) (x-t)^{p+1} dt$ .

Par principe de récurrence, on a donc  $\forall x \in I$ ,  $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$ .

b. Comme  $f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$ , par inégalité triangulaire, on obtient

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty}}{n!} \int_a^x |x-t|^n dt = \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty}}{n!} \left| \int_a^x (x-t)^n dt \right| = \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty} |x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

car  $|x-t|^n$  garde un signe constant sur l'intervalle  $\widetilde{[a; x]}$  (traiter les cas  $n$  pair ou impair et  $x \geq a$  et  $x \leq a$ ).

c. Pour  $h > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on obtient  $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{\|f''\|_{\infty, I} h^2}{2}$  en appliquant l'inégalité précédente

à l'ordre  $n = 1$  entre  $x+h$  et  $x$ . Comme  $|hf'(x)| = |hf'(x) - f(x+h) + f(x) + f(x+h) - f(x)|$ , par inégalité triangulaire, on a  $|hf'(x)| \leq |hf'(x) - f(x+h) + f(x)| + |f(x+h)| + |f(x)| \leq \frac{\|f''\|_{\infty, I} h^2}{2} + 2\|f\|_{\infty, I}$  donc

$|f'(x)| \leq \frac{\|f''\|_{\infty, I} h}{2} + 2 \frac{\|f\|_{\infty, I}}{h}$ . Par conséquent  $f'$  est bornée sur  $I$ .

d. Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ , on vient de voir que  $\|f'\|_{\infty, I} \leq \varphi(h) = \frac{\|f''\|_{\infty, I} h}{2} + 2 \frac{\|f\|_{\infty, I}}{h}$  donc  $\|f'\|_{\infty, I} \leq \inf_{\mathbb{R}_+} \varphi$ .

- si  $\|f\|_{\infty} = 0$ , alors  $f = 0$  donc  $f' = 0$  et  $\|f'\|_{\infty} = 0$ .
- si  $\|f''\|_{\infty} = 0$ , alors  $f'' = 0$  donc  $f$  est affine et pour que  $f$  soit bornée sur  $\mathbb{R}$ , il est nécessaire que  $f$  soit constante donc que  $f' = 0$  et on a encore  $\|f'\|_{\infty} = 0$ .
- si  $\|f\|_{\infty} = M_0 > 0$  et  $\|f''\|_{\infty} = M_2 > 0$ , comme  $\varphi'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{2M_0}{h^2}$ , on en déduit que  $\varphi$  est minimale en  $h_0 = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$  (faire le tableau de variations) et on a donc  $\inf_{\mathbb{R}_+} \varphi = \varphi(h_0) = 2\sqrt{M_0 M_2}$ .  
Ainsi,  $\|f'\|_{\infty} \leq 2\sqrt{M_0 M_2} = 2\sqrt{\|f\|_{\infty} \|f''\|_{\infty}}$ .

On en déduit, et ceci dans tous les cas, que  $\|f'\|_{\infty} \leq 2\sqrt{\|f\|_{\infty} \|f''\|_{\infty}}$ . Il nous manque un facteur  $\sqrt{2}$ .

Recommençons ! Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ , on a toujours l'inégalité  $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{\|f''\|_{\infty} h^2}{2}$

et aussi  $|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{\|f''\|_{\infty} h^2}{2}$  à l'ordre  $n = 1$  entre  $x-h$  et  $x$ . Ainsi, on peut composer

$|2hf'(x)| = |(hf'(x) - f(x+h) + f(x)) + (hf'(x) + f(x-h) - f(x)) + f(x+h) - f(x-h)|$  puis, par inégalité triangulaire encore :  $|hf'(x)| = \frac{1}{2}|2hf'(x)| \leq \frac{\|f''\|_{\infty} h^2}{2} + \|f\|_{\infty}$  donc  $|f'(x)| \leq \psi(h) = \frac{\|f''\|_{\infty} h}{2} + \frac{\|f\|_{\infty}}{h}$ .

- si  $\|f\|_{\infty} = 0$ , alors  $f = 0$  donc  $f' = 0$  et  $\|f'\|_{\infty} = 0$ .
- si  $\|f''\|_{\infty} = 0$ , alors  $f'' = 0$  donc  $f$  est affine et pour que  $f$  soit bornée sur  $\mathbb{R}$ , il est nécessaire que  $f$  soit constante donc que  $f' = 0$  et on a encore  $\|f'\|_{\infty} = 0$ .
- si  $\|f\|_{\infty} = M_0 > 0$  et  $\|f''\|_{\infty} = M_2 > 0$ , comme  $\psi'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{M_0}{h^2}$ , on en déduit que  $\psi$  est minimale

en  $h_1 = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$  (faire le tableau de variations) et on a donc  $\text{Inf}_{\mathbb{R}_+^*}(\psi) = \psi(h_1) = \sqrt{2M_0M_2}$ . Ainsi,  $\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2M_0M_2} = \sqrt{2\|f\|_\infty\|f''\|_\infty}$ .

Dans tous les cas, on a bien cette fois-ci la majoration  $\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2\|f\|_\infty\|f''\|_\infty}$ .

**16.29** Comme  $(x, y) \in \Gamma_n \iff \left(\frac{x}{n}\right)^2 + y^2 = 1 \iff \frac{x}{n} + iy \in \mathbb{U} \iff (\exists t \in \mathbb{R}, \frac{x}{n} + iy = e^{it})$ , cette courbe  $\Gamma_n$  se paramètre par  $x = x(t) = n \cos(t)$ ,  $y = y(t) = \sin(t)$ . Il s'agit d'une ellipse :

- $x$  et  $y$  sont définies et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $x$  et  $y$  sont  $2\pi$ -périodiques donc on étudie pour  $t \in [-\pi; \pi]$  et on repassera une infinité de fois en chaque point de la courbe.
- $x$  est paire et  $y$  est impaire donc on réduit l'étude à  $t \in [0; \pi]$  et on retrouvera la totalité de la courbe en effectuant une réflexion d'axe  $(Ox)$ .
- $\forall t \in [0; \pi]$ ,  $x(\pi - t) = -x(t)$ ,  $y(\pi - t) = y(t)$  donc on réduit l'étude à  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et on retrouvera toute la courbe en effectuant la réflexion d'axe  $(Oy)$ .
- Par composée de ces deux réflexions qui donne la symétrie centrale de centre  $O$ , on constate que la courbe se compose de quatre morceaux symétriques.

$\Gamma_n$  est une ellipse (cercle si  $n = 1$ ) ; ses sommets sont  $A_n = (n, 0)$ ,  $C_n = (-n, 0)$ ,  $B_n = (0, 1)$  et  $D_n = (0, -1)$ .

Par symétries axiales, la surface  $S_n$  à l'intérieur de  $\Gamma_n$  vaut  $S_n = 4 \int_0^n \sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}} dx = 4n \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du$  en posant  $x = nu = \varphi(u)$ . On effectue une intégration par parties en posant  $a(u) = \sqrt{1 - u^2}$  et  $b(u) = u$ ,  $a$  et  $b$  sont bien de classe  $C^1$  sur  $[0; 1[$  et  $I = \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du = [u\sqrt{1 - u^2}]_0^1 + \int_0^1 \frac{u^2 - 1 + 1}{\sqrt{1 - u^2}} du = -I + [\text{Arcsin}(u)]_0^1$

donc  $2I = \frac{\pi}{2}$  puis  $I = \frac{\pi}{4}$ . C'est évident puisque l'aire d'un disque de rayon  $R = 1$  vaut  $S = \pi R^2 = \pi$ . Ainsi

$S_n = n\pi$ . On aurait pu poser le changement de variable  $x = n \sin(t) = \varphi(t)$  avec  $\varphi$  de classe  $C^1$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

et  $S_n = 4n \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos(t) dt = 4n \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = 4n \left[ \frac{2t + \sin(2t)}{4} \right]_0^{\pi/2} = n\pi$ .

Comme le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 0} x^n$  vaut 1 (série géométrique), celui de sa série dérivée  $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$  vaut aussi 1 comme celui de  $\sum_{n \geq 0} nx^n$  vaut encore 1 : la rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 1} S_n x^n$  vaut donc 1.

La longueur  $L_n$  de la courbe  $\Gamma_n$ , toujours par symétrie, vaut  $L_n = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$  d'après le paramétrage précédent. Le plus court chemin étant la ligne droite, la longueur de la courbe est supérieure à la longueur du losange  $A_n B_n C_n D_n$  qui vaut  $4A_n B_n$ , ainsi  $L_n \geq 4\sqrt{n^2 + 1}$ . D'après l'inégalité rappelée dans

l'énoncé (facile à établir en élevant au carré), on a aussi  $L_n \leq 4 \int_0^{\pi/2} (|x'(t)| + |y'(t)|) dt$ . Ainsi, on majore

$L_n \leq 4 \int_0^{\pi/2} (n \sin(t) + \cos(t)) dt = 4[-n \cos(t) + \sin(t)]_0^{\pi/2} = 4n + 4$ . Comme  $4\sqrt{n^2 + 1} \underset{+\infty}{\sim} 4n + 4 \underset{+\infty}{\sim} 4n$ , on a  $L_n \underset{+\infty}{\sim} 4n$ , ce qui montre (comme avant) que le rayon de la série entière  $\sum_{n \geq 1} L_n x^n$  vaut aussi 1.

**16.30** Si  $\lambda \neq 0$ ,  $f_\lambda$  est polynomiale et  $f_\lambda(x) = (x^2 - \lambda x)(3x^2 - \lambda x) = x^2(x - \lambda)(3x - \lambda) = \lambda^2 x^2 + o(x^2)$  donc  $f'_\lambda(0) = 0$

et  $f''_\lambda(0) = \lambda^2 > 0$  d'après TAYLOR-YOUNG et  $f_\lambda$  admet en 0 un minimum local.

Même si  $\lambda = 0$ ,  $f_0 : x \mapsto g(x, 0) = 3x^4$  admet un minimum local (nul) en  $x = 0$ .

Ainsi, dans toutes les directions à partir du point  $(0, 0)$ , la fonction  $g$  admet un minimum local en  $(0, 0)$ .

Pourtant,  $g$  n'admet pas en  $(0, 0)$  de minimum local car  $g(0, 0) = 0$  et  $g(x, 2x^2) = -x^4 < 0$  si  $x \neq 0$ . Or la courbe  $y = x^2$  (une parabole) passe pas le point  $(0, 0)$ . Pas très facile à voir comme contre-exemple !!!

**16.31** La fonction  $f = (x, y)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $2\pi$ -périodique donc on peut n'étudier que pour  $t \in [-\pi; \pi]$  pour avoir la trajectoire entière. Le point  $f(-t) = (x(t), -y(t))$  se déduit du point  $f(t)$  par une symétrie orthogonale par rapport à l'axe  $(Oy)$  donc on peut n'étudier que sur  $[0; \pi]$ . Le point  $f(\pi - t) = (-x(t), y(t))$  se déduit du point  $f(t)$  par une symétrie orthogonale par rapport à l'axe  $(Ox)$  donc on peut n'étudier que sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  pour avoir toute la courbe.

Par symétrie, la longueur  $L$  de cette courbe est quatre fois celle de la courbe pour  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . Ainsi, comme

$x'(t) = -3 \sin(t) \cos^2(t)$  et  $y'(t) = 3 \cos(t) \sin^2(t)$ , on a  $L = 4 \int_0^{\pi/2} \|\vec{f}'(t)\| dt$  donc :

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9 \sin^2(t) \cos^4(t) + 9 \cos^2(t) \sin^4(t)} dt = 6 \int_0^{\pi/2} (2 \sin(t) \cos(t)) dt = 6[\sin^2(t)]_0^{\pi/2} = 6.$$

Comme  $f'(t) = (-3 \sin(t) \cos^2(t), 3 \cos(t) \sin^2(t))$  et que  $M \in T_t \iff (\overrightarrow{f(t)M}, \vec{f}'(t))$  est une famille liée, on a donc  $M = (x, y) \in T_t \iff \begin{vmatrix} x - x(t) & x'(t) \\ y - y(t) & y'(t) \end{vmatrix} = 0$  donc une équation cartésienne de la droite de  $T_t$  est  $3 \cos(t) \sin^2(t)(x - \cos^3(t)) + 3 \sin(t) \cos^2(t)(y - \sin^3(t)) = 0$  ce qui se réduit par calculs trigonométriques en  $(T_t) : x \sin(t) + y \cos(t) = \sin(t) \cos(t)$ .

Ainsi,  $A = (0, \sin(t))$  et  $B = (\cos(t), 0)$  ce qui fait que  $AB = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} = 1$  est constant.

**16.32** La courbe  $C$  est un morceau d'ellipse (d'équation  $4x^2 + y^2 = 4$ ) entre les points extrémaux  $A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$  (pour  $t = \frac{\pi}{4}$ ) et  $B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$  (pour  $t = \frac{7\pi}{4}$ ).

- La partie  $C$  n'est pas ouverte car  $C$  contient  $M = (-1, 0)$  (pour  $t = \pi$ ) mais pas  $B(M, r)$  si  $r > 0$  puisque le seul point de l'axe  $(Ox)$  qui est dans  $C$  est le point  $M$  (faire un dessin).

- La partie  $C$  est fermée car l'ellipse complète  $E$  est l'image réciproque par  $f : (x, y) \mapsto 4x^2 + y^2$  continue du singleton  $\{4\}$  qui est fermé dans  $\mathbb{R}$ , que  $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$  est aussi fermé puisqu'image réciproque par  $g : (x, y) \mapsto x$  de l'intervalle fermé  $\left]-\infty; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$  et que  $C = E \cap F$ .

- La partie  $C$  n'est pas convexe car  $A$  et  $B$  sont dans  $C$  et pourtant le milieu du segment  $[A; B]$ , à savoir le point  $I = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ , n'est pas dans  $C$ .

- La partie  $C$  est bornée car  $\sin$  et  $\cos$  sont des fonctions bornées.