TD 24 : CALCUL DIFFÉRENTIEL

PSI 1 2025-2026 **mercredi 25 mars 2026**

Géométrie :

24.1 S est d'équation $f(x,y,z) = z^3 - xy = 0$ donc les points réguliers de S sont tels que $\overrightarrow{\text{grad}}\, f \neq \overrightarrow{0}$. Comme $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) = (-y, -x, 3z^2)$, seul le point $(0,0,0)$ n'est pas régulier sur S. Si $M = (x_0, y_0, z_0) \neq (0,0,0)$ et $M_0 \in S$, le plan tangent P_0 à S en M_0 a pour équation $P_0 \;:\; -y_0(x - x_0) - x_0(y - y_0) + 3z_0^2(z - z_0) = 0$ ou encore $P_0 \;:\; y_0 x + x_0 y - 3z_0^2 z + z_0^3 = 0$. La droite D est paramétrée par $x = 2$, $y = 3(t+1), z = t$ pour $t \in \mathbb{R}$.

<u>Analyse</u> : si M_0 convient, $D \subset P_0$ donc, en remplaçant, $\forall t \in \mathbb{R},\ 2y_0 + x_0(3t+3) - 3z_0^2 t + z_0^3 = 0$ ou encore $\forall t \in \mathbb{R},\ 3(x_0 - z_0^2)t + (2y_0 + 3x_0 + z_0^3) = 0$ ce qui équivaut à $x_0 = z_0^2$ et $2y_0 + 3x_0 + z_0^3 = 0$. Alors, on a $x_0 = z_0^2$, $y_0 = -\dfrac{3z_0^2 + z_0^3}{2}$ donc $x_0 y_0 = z_0^3$ implique $2z_0^3 + 3z_0^4 + z_0^5 = z_0^3(2 + 3z_0 + z_0^2)$ ce qui donne $z_0 = 0$ (exclu car alors $x_0 = y_0 = 0$ et $M_0 \neq (0,0,0)$) ou $z_0 = -1$ ou $z_0 = -2$.

Si $z_0 = -1$, on a $x_0 = 1$ et $y_0 = -1$ et si $z_0 = -2$, on trouve $x_0 = 4$ et $y_0 = -2$.

<u>Synthèse</u> : réciproquement, le plan P_1 tangent à S en $M_1 = (1,-1,-1)$ est d'équation $P_1 \;:\; -x + y - 3z - 1 = 0$ et il contient bien D comme le plan $P_2 \;:\; -2x + 4y - 12z - 8 = 0$ tangent à S en $M_2 = (4,-2,-2)$.

En conclusion, il existe exactement deux plans tangents à S et contenant la droite D, ce sont les plans $P_1 \;:\; -x + y - 3z - 1 = 0$ et $P_2 \;:\; x - 2y + 6z + 4 = 0$ tangents à S en $M_1 = (1,-1,-1)$ et $M_2 = (4,-2,-2)$.

24.2 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 1$. f est de classe C^∞ par opérations et on calcule $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y,z) = (2x, 2y, 4z)$. Ainsi, le seul point critique de f est $(0,0,0)$ qui n'appartient pas à S. La surface S est donc régulière par définition puisque tous ses points sont réguliers : c'est un ellipsoïde de révolution dont les huit sommets sont les points $(1,0,0)$, $(-1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$, $\left(0,0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0,0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

En un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S, comme $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)$ est orthogonal au plan P_0 tangent à S en M_0, une équation de P_0 est $P_0 \;:\; x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0 \iff x_0 x + y_0 y + 2z_0 z = x_0^2 + y_0^2 + 2z_0^2 = 1$ (à nouveau obtenue par dédoublement comme pour toute quadrique).

<u>Analyse</u> : le vecteur $\overrightarrow{v} = (1,3,-2)$ est un vecteur directeur de D. On cherche donc les points M_0 tels que $\overrightarrow{v}$ est normal à P_0, ce qui équivaut au fait que les vecteurs non nuls $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)$ sont colinéaires. Si M_0 convient, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*,\ x_0 = \lambda$, $y_0 = 3\lambda$ et $2z_0 = -2\lambda$. Puisque $M_0 \in S$, $(1 + 9 + 2)\lambda^2 = 1 \iff \lambda = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ donc $M_0 = M_1 = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, \dfrac{3}{2\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ ou $M_0 = M_2 = \left(-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, -\dfrac{3}{2\sqrt{3}}, \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.

<u>Synthèse</u> : réciproquement, d'après les calculs précédents, les deux plans tangents P_1 et P_2 à S en M_1 et M_2 respectivement ont pour équation $P_1 \;:\; \dfrac{x}{2\sqrt{3}} + \dfrac{3y}{2\sqrt{3}} - \dfrac{z}{\sqrt{3}} = 1$ et $P_2 \;:\; -\dfrac{x}{2\sqrt{3}} - \dfrac{3y}{2\sqrt{3}} + \dfrac{z}{\sqrt{3}} = 1$ et ils ont bien des vecteurs normaux colinéaires à $\overrightarrow{v}$ donc P_1 et P_2 sont bien orthogonaux à D.

En conclusion, il existe exactement deux plans qui sont à la fois tangents à S et orthogonaux à D, ce sont les plans P_1 et P_2 tangents à S respectivement aux points M_1 et M_2.

24.3 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = z^2 - xy$. f est de classe C^∞ par opérations et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y,z) = (-y,-x,2z)$ donc le seul point singulier de S est le sommet $(0,0,0)$ de ce cône de révolution. En un point $M_0 = (x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$ de S, comme $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(M_0)$ est orthogonal au plan P_0 tangent à S en M_0, une équation de P_0 est $P_0 : -y_0(x-x_0)-x_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0) = 0 \Longleftrightarrow 2z_0z-y_0x-x_0y = 2z_0^2-2x_0y_0 = 0$ (à nouveau obtenue par dédoublement comme pour toute quadrique en remplaçant $2xy$ par x_0y+y_0x).

Analyse : si $M_0 \neq (0,0,0)$ est un point de S et que le plan tangent P_0 contient la droite D, alors en paramétrant la droite D par $x = y = z = t$ avec $t \in \mathbb{R}$, on doit avoir $\forall t \in \mathbb{R},\ (2z_0 - y_0 - x_0)t = 0$ donc $x_0+y_0 = 2z_0$. Mais comme $M_0 \in S$, on aussi $4x_0y_0 = 4z_0^2 = (2z_0)^2 = (x_0+y_0)^2$ donc $x_0^2+2x_0y_0+y_0^2 = 4x_0y_0$ qui se transforme en $(x_0-y_0)^2 = 0 \Longleftrightarrow x_0 = y_0$. Ainsi, $x_0 = y_0 = z_0$ donc $M_0 \in D$.

Synthèse : réciproquement, si $M_0 \in D$ et $M_0 \neq (0,0,0)$, alors le plan tangent P_0 à S en M_0 a pour équation $P_0 : 2x_0z - x_0x - x_0y = 0$ d'après ce qui précède ou $P_0 : 2z = x+y$ et la droite D est bien incluse dans P. En conclusion, les points M de S en lesquels le plan tangent à S en M contient D sont justement les points de D sauf l'origine $O = (0,0,0)$.

Calcul différentiel :

24.4 **a.** φ est bien définie et de classe C^1 par opérations sur D_2. De plus, pour $(x,y) \in D_1$ et $(u,v) \in D_2$, $\varphi(u,v) = (x,y) \Longleftrightarrow \big(u^2+v^2 = 2x,\ u = vy\big) \Longleftrightarrow \big(v^2y^2+v^2 = 2x,\ u = vy\big) \Longleftrightarrow u = y\sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}},\ v = \sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}$ car $v > 0$ donc φ est bijective et φ^{-1} est clairement de classe C^1 toujours par opérations.

b. Si $f : D_1 \to \mathbb{R}$ est une solution C^1, posons $g = f \circ \varphi \Longleftrightarrow \forall (u,v) \in D_2,\ g(u,v) = f(x,y) = f\Big(\dfrac{u^2+v^2}{2}, \dfrac{u}{v}\Big)$ ou encore $\forall (x,y) \in D_1,\ f(x,y) = g(u,v) = g\Big(y\sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}, \sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}\Big)$. Alors g est C^1 par composition. Comme $\forall (x,y) \in D_1,\ 2xy\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+(1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xf(x,y)$, comme φ est une bijection de D_2 sur D_1, cela donne : $\forall (u,v) \in D_2,\ \dfrac{u(u^2+v^2)}{v}\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \dfrac{u^2+v^2}{v^2}\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)) = (u^2+v^2)f(\varphi(u,v))$ ce qui s'écrit encore :

$\forall (u,v) \in D_2,\ \dfrac{(u^2+v^2)}{v}\Big[u\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))\Big] = (u^2+v^2)f(\varphi(u,v))$.

Mais : $\forall (u,v) \in D_2,\ \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v)) = u\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))$ donc $\forall (u,v) \in D_2,\ \dfrac{\partial g}{\partial u} = vf(\varphi(u,v)) = vg(u,v)$ (équation différentielle linéaire en la variable u) .

Comme g est de classe C^1, il existe $\psi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall (u,v) \in D_2,\ g(u,v) = \psi(v)e^{uv}$. Ainsi, $\forall (x,y) \in D_1,\ f(x,y) = \psi\Big(\sqrt{\dfrac{2x}{1+y^2}}\Big)\exp\Big(\dfrac{2xy}{1+y^2}\Big) = \theta\Big(\dfrac{2x}{1+y^2}\Big)\exp\Big(\dfrac{2xy}{1+y^2}\Big)$ en ayant posé la fonction $\theta = \psi \circ \sqrt{\ }$ qui, par composition, est elle aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

Réciproquement, si f est de cette forme, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \Big[\dfrac{2}{1+y^2}\theta'\Big(\dfrac{2x}{1+y^2}\Big) + \dfrac{2y}{1+y^2}\theta\Big(\dfrac{2x}{1+y^2}\Big)\Big]\exp\Big(\dfrac{2xy}{1+y^2}\Big)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \Big[\dfrac{-4xy}{(1+y^2)^2}\theta'\Big(\dfrac{2x}{1+y^2}\Big) + \dfrac{2x(1-y^2)}{(1+y^2)^2}\theta\Big(\dfrac{2x}{1+y^2}\Big)\Big]\exp\Big(\dfrac{2xy}{1+y^2}\Big)$ pour $(x,y) \in D_1$. Ainsi, f de classe C^1 sur D_1 par opérations et si on reporte dans l'équation aux dérivées partielles (E), on a bien (après simplifications) $\forall (x,y) \in D_1,\ 2xy\dfrac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xf$.

En conclusion, par analyse-synthèse, les solutions de (E) sur D_1 sont les fonctions $f : D_1 \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une fonction $\theta : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall (x,y) \in D_1,\ f(x,y) = \theta\Big(\dfrac{2x}{1+y^2}\Big)\exp\Big(\dfrac{2xy}{1+y^2}\Big)$.

24.5 **a.** Pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x,x) = x^2$. Si $x \neq y$: $g(x,y) = \dfrac{y^3 - x^3}{3(y-x)} = \dfrac{y^2+xy+x^2}{3}$.

On a donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = \dfrac{x^2+xy+y^2}{3}$ donc g est de classe C^1 car polynomiale (même C^∞).

b. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'intégration, $\varphi : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_x^y f(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -f(x)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = f(y)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ sont donc continues sur $\mathbb{R}^2$ comme la fonction f l'est sur $\mathbb{R}$. Comme $(x,y) \to y-x$ est de classe C^1 car polynomiale et ne s'annule pas sur D par définition, g est de classe C^1 sur D par opérations.

De plus, $\forall (x,y) \in D,\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{(y-x)^2}\displaystyle\int_x^y f(t)dt - \dfrac{f(x)}{y-x} = \dfrac{1}{(y-x)^2}\Big(\displaystyle\int_x^y f(t)dt - (y-x)f(x)\Big)$.

De même, on a $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{1}{(y-x)^2}\displaystyle\int_x^y f(t)dt + \dfrac{1}{y-x}f(y) = \dfrac{1}{(y-x)^2}\Big((y-x)f(y) - \displaystyle\int_x^y f(t)dt\Big)$.

c. Soit $a \in \mathbb{R}$, pour $t \neq 0$, $g(a,a+t) - g(a) = \dfrac{1}{t}\Big(\displaystyle\int_a^{a+t} f(u)du\Big) - f(a)$. La fonction $F : t \mapsto \displaystyle\int_a^{a+t} f(u)du$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ car $F'(t) = f(a+t)$ (f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$) et on a $\forall t \neq 0,\ g(a+t,a) - g(a) = \dfrac{F(t) - tf(a)}{t}$.

D'après Taylor-Young, puisque F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, le développement limité d'ordre 2 de F en 0 est donné par $F(t) \underset{0}{=} F(0) + F'(0)t + \dfrac{F''(0)}{2}t^2 + o(t^2)$. Or $F(0) = 0$, $F'(0) = f(a)$ et $F''(0) = f'(a)$, donc $F(t) - tf(a) \underset{0}{=} \dfrac{f'(a)}{2}t^2 + o(t^2)$ donc $\dfrac{g(a,a+t) - g(a,a)}{t} = \dfrac{f'(a)}{2} + o(1)$. On en déduit que $\dfrac{\partial g}{\partial y}(a,a) = \dfrac{f'(a)}{2}$.

Comme $g(a+t,a) = g(a,a+t)$, on a aussi : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a) = \dfrac{f'(a)}{2}$.

d. <u>Méthode 1</u> : si $x \neq y$, on a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{(y-x)^2}\displaystyle\int_x^y (f(t) - f(x))dt$. Soit $a \in \mathbb{R}$, par continuité de f' sur $\mathbb{R}$, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ |t-a| \leqslant \alpha \implies |f'(t) - f'(a)| \leqslant 2\varepsilon$. Essayons de majorer $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right|$ au voisinage de (a,a) pour établir la continuité de $\frac{\partial g}{\partial x}$ en (a,a). Soit donc $(x,y) \in [a-\alpha; a+\alpha]^2$ de sorte que $||(x,y) - (a,a)||_\infty \leqslant \alpha$, alors considérons deux cas :

- si $x = y$, alors $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| = \dfrac{|f'(x) - f'(a)|}{2} \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$ car $|x-a| \leqslant \alpha$.

- si $x \neq y$, alors il vient $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| = \left|\dfrac{1}{(y-x)^2}\displaystyle\int_x^y (f(t) - f(x))dt - \dfrac{f'(a)}{2}\right|$ qu'on peut majorer en $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| = \dfrac{1}{(y-x)^2}\left|\displaystyle\int_x^y (f(t) - f(x) - (t-x)f'(a))dt\right| \leqslant \dfrac{1}{(y-x)^2}\left|\displaystyle\int_x^y |f(t) - f(x) - (t-x)f'(a)|dt\right|$

puis, avec le théorème des accroissements finis, $\forall t \in \widetilde{[x;y]},\ c \in \widetilde{[x;t]} \subset [a-\alpha; a+\alpha],\ f(t) - f(x) = (t-x)f'(c)$ donc $|f(t) - f(x) - (t-x)f'(a)| \leqslant |t-x| \times |f'(c) - f'(a)| \leqslant 2\varepsilon|t-x|$, on obtient par conséquent la majoration suivante $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(a,a)\right| \leqslant \dfrac{1}{(y-x)^2}\left|\displaystyle\int_x^y 2\varepsilon|t-x|dt\right| = \varepsilon$.

Ceci prouve que $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est continue en (a,a) pour tout $a \in \mathbb{R}$ donc, avec **b.**, que $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De même, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ est aussi continue sur $\mathbb{R}^2$. Par définition, la fonction g est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

<u>Méthode 2</u> : si $x \neq y$, en posant $t = \varphi(u) = x + u(y-x)$, comme φ est de classe C^1, strictement monotone et bijective de $[0;1]$ dans $\widetilde{[x;y]}$, on a $g(x,y) = \displaystyle\int_0^1 f\big(x + u(y-x)\big)du$. Cette expression est aussi valable quand $x = y$. On a donc l'expression plus simple de g : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x,y) = \displaystyle\int_0^1 f\big(x+u(y-x)\big)du$.

On fixe $y \in \mathbb{R}$, alors en notant $\varphi_y(x,u) = f\big(x + u(y-x)\big)$ définie sur $[0;1] \times \mathbb{R}$, pour $a > 0$:

- $\forall x \in [-a;a]$, la fonction $u \mapsto \varphi_y(x,u)$ est continue et intégrable sur $[0;1]$.
- $\forall u \in [0;1]$, $x \mapsto \varphi_y(x,u)$ est dérivable sur $[-a;a]$ et sa dérivée est $x \mapsto (1-u)f'\big(x+u(y-x)\big)$.
- $\forall (u,x) \in [0;1] \times [-a;a]$, $\left|\dfrac{\partial \varphi_y}{\partial x}(x,u)\right| = \left|(1-u)f'\big(x+u(y-x)\big)\right| \leqslant \underset{[\mathrm{Min}(-a,y);\mathrm{Max}(a,y)]}{\mathrm{Max}} |f'|$.

Par le théorème de dérivation sous le signe somme, $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ existe sur $\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)f'\big(x+u(y-x)\big)du$.
De même, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ existe sur $\mathbb{R}^2$ et on a $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \displaystyle\int_0^1 uf'\big(x+u(y-x)\big)du$.
Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé et une suite $\big((a_n,b_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers (x_0,y_0), montrons alors que la suite $\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}(a_n,b_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)$ ce qui garantira la continuité de $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(a_n,b_n) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)f'\big(a_n+u(b_n-a_n)\big)du$.
La suite $\big((a_n,b_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée. Soit donc $M >$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant M$ et $|b_n| \leqslant M$.
La fonction f' est bornée sur $[-M;M]$ donc il existe $B > 0$ tel que $\forall t \in [-M;M]$, $|f'(t)| \leqslant B$.
Posons $g_n : u \mapsto (1-u)f'\big(a_n+u(b_n-a_n)\big)$, alors $\dfrac{\partial g}{\partial x}(a_n,b_n) = \displaystyle\int_0^1 g_n$.

- Toutes les g_n sont continues et intégrables sur $[0;1]$.
- Par continuité de la fonction f' sur $\mathbb{R}$, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $h : u \mapsto (1-u)f'\big(x_0+u(y_0-x_0)\big)$ qui est continue sur $[0;1]$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall u \in [0;1]$, $|g_n(u)| \leqslant B$ et $u \mapsto B$ est intégrable sur $[0;1]$.

Par le théorème de convergence dominée, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n = \int_0^1 (1-u)f'\big(x_0+u(y_0-x_0)\big)du$ ce qui s'écrit aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(a_n,b_n) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)$. Par caractérisation séquentielle de la continuité, la fonction $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est donc continue sur $\mathbb{R}^2$. De même $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ et la fonction est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

24.6 U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel g est définie et de classe C^2. Par hypothèse, $g = f \circ h$ où la fonction $h : U \to \mathbb{R}_+^*$ est définie par $h(x,y) = x^2+y^2$.
Par composition de fonctions C^2, $\forall (x,y) \in U$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2xf'(x^2+y^2)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2yf'(x^2+y^2)$. On dérive une fois de plus et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = 2f'(x^2+y^2)+4x^2f''(x^2+y^2)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = 2f'(x^2+y^2)+4y^2f''(x^2+y^2)$.
$\forall (x,y) \in U$, on a $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = (x^2+y^2)^p \Longleftrightarrow 4f'(x^2+y^2)+4(x^2+y^2)f''(x^2+y^2) = (x^2+y^2)^p$.
Comme h est surjective de U dans $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit la nouvelle équivalence :

$$\forall (x,y) \in U,\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = (x^2+y^2)^p \Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ 4f'(t)+4tf''(t) = t^p.$$

On résout $(E)\ :\ ty''+y' = \dfrac{t^p}{4}$ en distinguant selon la valeur de p :

- si $p \neq -1$, la fonction f' est de la forme : $t \mapsto \dfrac{\lambda}{t} + \dfrac{t^p}{4(p+1)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- si $p = -1$, la fonction f' est de la forme : $t \mapsto \dfrac{\lambda}{t} + \dfrac{\ln(t)}{4t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

On intègre à nouveau et on a la forme des fonctions f vérifiant les conditions imposées :

- si $p \neq -1$, la fonction f est de la forme : $f : t \mapsto \lambda\ln(t)+\mu+\dfrac{t^{p+1}}{4(p+1)^2}$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
- si $p = -1$, la fonction f est de la forme : $f : t \mapsto \lambda\ln(t)+\mu+\dfrac{\ln^2(t)}{8}$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

24.7 **a.** Pour $n = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\nabla u(x) = u'(x)$. Par exemple pour $u = \text{ch}$, on a bien u de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{|\text{ch}\,(x)|}{|x|} = +\infty$ par croissances comparées car $|\text{ch}\,(x)| = \text{ch}\,(|x|) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{|x|}}{2}$; dans ce cas, on a $u' = \text{sh}$ et on sait que u' est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Par contre pour $u = \text{sh}$, on a aussi u de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{|\text{sh}\,(x)|}{|x|} = +\infty$ car $|\text{sh}\,(x)| = \text{sh}\,(|x|) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^{|x|}}{2}$ mais $u' = \text{ch}$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[1; +\infty[$ mais pas de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^2$, la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = u(x) - (x|v)$ est de classe C^1 car u l'est et que $g : x \mapsto (x|v)$ est polynomiale en les coordonnées de x donc de classe C^1 aussi, d'ailleurs elle est aussi linéaire donc continue car on est en dimension finie. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x) = \nabla u(x) - \nabla g(x)$ par linéarité des dérivées partielles. Or, si $v = (v_1, v_2)$, $g(x_1, x_2) = x_1 v_1 + x_2 v_2$ donc $\nabla g(x_1, x_2) = (v_1, v_2) = v$. Ainsi, $\nabla f(x) = \nabla u(x) - v$. Il suffit donc de choisir $v \notin \nabla u(\mathbb{R}^2)$ (on le peut car ∇u est non surjective par hypothèse) pour que ∇f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $|(x|v)| \leqslant ||x||\,||v||$ donc, par inégalité triangulaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ |f(x)| = |u(x) - (x|v)| \geqslant \big||u(x)| - |(x|v)|\big| \geqslant |u(x)| - |(x|v)| \geqslant |u(x)| - ||x||\,||v||.$$

Ainsi, dès que $x \neq (0,0)$, $||x|| > 0$ donc $\dfrac{|f(x)|}{||x||} \geqslant \dfrac{|u(x)|}{||x||} - ||v||$. Or $\lim\limits_{||x||\to+\infty} \dfrac{|u(x)|}{||x||} = +\infty$ par hypothèse donc, par minoration, on a aussi $\lim\limits_{||x||\to+\infty} \dfrac{|f(x)|}{||x||} = +\infty$.

c. Soit $r > 0$ et $(a, b) \in (\mathbb{R}^2 \setminus B_r)^2$, alors $||a|| \geqslant r$ et $||b|| \geqslant r$. Écrivons a et b en coordonnées polaires, $a = (||a|| \cos(\alpha), ||a|| \sin(\alpha))$ et $b = (||b|| \cos(\beta), ||b|| \sin(\beta))$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Définissons alors l'application $\gamma : [0; 1] \to \mathbb{R}^2$ par $\forall t \in [0; 1]$, $\gamma(t) = ((1-t)||a|| + t||b||).(\cos((1-t)\alpha + t\beta), \sin((1-t)\alpha + t\beta))$. Alors γ définit un arc paramétré dans le plan, bien sûr de classe C^∞, tel que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ et tel que l'on ait $\forall t \in [0; 1]$, $||\gamma(t)|| = (1-t)||a|| + t||b|| \geqslant \text{Min}(||a||, ||b||) \geqslant r$. Ainsi $\gamma([0; 1]) \subset (\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$.

Soit $(p, q) \in f(\mathbb{R}^2 \setminus B_r)^2$, alors par définition il existe $(a, b) \in (\mathbb{R}^2 \setminus B_r)^2$ tels que $p = f(a)$ et $q = f(b)$. On suppose que $p < q$ et on choisit $r \in [p; q]$. Alors avec la fonction γ précédente, $h : [0; 1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = f \circ \gamma(t)$ est continue en tant que composée de fonctions continues (elle est même de classe C^1) et $h(0) = f(a) = p$, $h(1) = f(b) = q$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in [0; 1]$ tel que $h(t) = r$ ce qui signifie que $r = f(\gamma(t))$ et on a vu que $\gamma(t) \in (\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$ donc $r \in f(\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$.

En conclusion, $f(\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$ est un intervalle car c'est un convexe.

Comme $\lim\limits_{||x||\to+\infty} \dfrac{|f(x)|}{||x||} = +\infty$, $\exists r > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $||x|| \geqslant r \Longrightarrow |f(x)| \geqslant ||x|| > 0 \Longrightarrow f(x) \neq 0$. Ainsi, pour un tel réel r, on a $0 \notin f(\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$. Comme $\lim\limits_{||x||\to+\infty} |f(x)| = +\infty$ puisque $|f(x)| = \dfrac{|f(x)|}{||x||} \times ||x||$, l'intervalle $f(\mathbb{R}^2 \setminus B_r)$ ne peut pas être borné. Il ne reste plus que quatre possibilités : $f(\mathbb{R}^2 \setminus B_r) =]a; +\infty[$, $[a; +\infty[$, $]-\infty; b[$ ou $]-\infty; b]$. Supposons (les autres cas sont identiques) que $f(\mathbb{R}^2 \setminus B_r) =]a; +\infty[$ (avec $a \in \mathbb{R}_+$).

Comme f est continue donc bornée sur le fermé borné $\overline{B_r}$, et qu'elle est minorée par a sur $\mathbb{R}^2 \setminus B_r$, f est minorée sur $\mathbb{R}^2$. Puisque $\lim\limits_{||x||\to+\infty} |f(x)| = +\infty$, $\exists r' > r$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $||x|| \geqslant r' \Longrightarrow |f(x)| = f(x) \geqslant f(0,0)$.

Comme f est continue sur le fermé borné $\overline{B_{r'}}$, elle y admet un minimum $m = \underset{\overline{B_{r'}}}{\text{Min}}(f) \leqslant f(0,0)$. Si $x \in \mathbb{R}^2$, on a $||x|| \leqslant r' \Longrightarrow f(x) \geqslant m = \underset{\overline{B_{r'}}}{\text{Min}}(f)$ et $||x|| > r' \Longrightarrow f(x) \geqslant f(0,0) \geqslant m$. Par conséquent, $m = \underset{\mathbb{R}^2}{\text{Min}}(f) = f(x_0)$

avec $x_0 \in \overline{B_{r'}}$. Mais comme ce minimum de f est atteint dans l'ouvert $\mathbb{R}^2$, il l'est en un point critique de f. On obtient donc une contradiction puisqu'on a construit f pour que son gradient ne s'annule pas.

On conclut donc, dès que $n \geqslant 2$, que $u \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{|u(x)|}{\|x\|} = +\infty$ vérifie ∇u surjectif.

24.8 **a.** f est polynomiale sur D donc elle y est de classe C^1. Par conséquent, F est aussi de classe C^1 sur $D \times \mathbb{R}$. De plus, on a clairement $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -4x(x^2+y^2)+3x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4y(x^2+y^2)+3y$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = -1$ donc $\overrightarrow{\text{grad}}\,F(x,y,z) = (-4x(x^2+y^2)+3x, -4y(x^2+y^2)+3y, -1)$.

b. S est la surface d'équation $F(x,y,z) = 0$ par définition et tous les points de cette surface sont réguliers car $\overrightarrow{\text{grad}}\,F(x,y,z) \neq \overrightarrow{0}$ pour $(x,y,z) \in D \times \mathbb{R}$ d'après la question **a.**. Le plan tangent en un point (x,y,z) de cette surface admet d'après le cours comme vecteur normal $\overrightarrow{\text{grad}}\,F(x,y,z)$. On cherche donc (x,y,z) tel que $\overrightarrow{\text{grad}}\,F(x,y,z)$ et $\overrightarrow{v} = (0,1,-1)$ sont colinéaires, ce qui se traduit par $\begin{cases} -4x(x^2+y^2)+3x & = 0 \\ 4y(x^2+y^2)-3y & = -1 \end{cases}$. Or la condition $-4x(x^2+y^2)+3x = -4x\left(x^2+y^2-\frac{3}{4}\right) = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x^2+y^2 = \frac{3}{4}$. Deux cas :

- Si $x = 0$, $4y(x^2+y^2)-3y = -1 \iff 4y^3-3y = -1 \iff (y+1)\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff \left(y = -1 \text{ ou } y = \frac{1}{2}\right)$.
- Si $x^2+y^2 = \frac{3}{4}$, $4y(x^2+y^2)-3y = 0 \neq -1$ donc ceci ne correspond pas à un point critique.

Ainsi, les points $M = (x,y,z)$ de S en lesquels le plan tangent à S en M est normal à $\overrightarrow{v}$ sont $(0,-1,f(0,-1))$ et $\left(0,\frac{1}{2},f\left(0,\frac{1}{2}\right)\right)$. Or $f(0,-1) = \frac{3}{2}$ et $f\left(0,\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{16}$. Les points de S cherchés sont $\left(0,1,\frac{3}{2}\right)$ et $\left(0,\frac{1}{2},\frac{21}{16}\right)$.

c. Comme f est définie sur D et que $(t,t) \in D \iff t^2+t^2 \leqslant 1 \iff |t| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, les applications f et $t \mapsto t$ étant de classe C^1 sur leurs ensembles de définition respectifs (D et $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$), g l'est aussi par composée sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et $\forall t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $g'(t) = 1 \times \frac{\partial f}{\partial x}(t,t) + 1 \times \frac{\partial f}{\partial y}(t,t) = (-8t^3+3t)+(-8t^3+3t) = 2t(3-8t^2)$ par la règle de la chaîne. Comme $g : t \mapsto -4t^4+3t^2+1$ est paire, il suffit de l'étudier sur $I = \left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. La dérivée précédente montre que g est croissante sur $\left[0;\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Ainsi, g est maximale en $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et minimale en 0 ou en $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (les extrémités de I). Or $g(0) = 1$ et $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}$ donc $\operatorname{Min}_I(g) = 1$. Comme on a $g\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) = -4 \times \frac{9}{64} + 3 \times \frac{3}{8} + 1 = \frac{25}{16}$, il vient $\operatorname{Max}_I(g) = \frac{25}{16}$. Par parité de g, si $J = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\operatorname{Min}_J(g) = 1$ et $\operatorname{Max}_J(g) = \frac{25}{16}$. Enfin, si $(x,y) \in D$, on a $f(x,y) = f\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}\right) = g\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}}\right)$ (l'image de (x,y) par f ne dépend que du "rayon" $r = \sqrt{x^2+y^2}$) d'où $\operatorname{Min}_D(f) = 1$ et $\operatorname{Max}_D(f) = \frac{25}{16}$.

24.9 **a.** f est polynomiale donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2(1-x-y) - x^3y^2 = x^2y^2(3-4x-3y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y(1-x-y) - x^3y^2 = x^3y(2-2x-3y)$. Les points critiques de f sont ceux qui vérifient $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(x,y) = 0 \iff (x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } 4x+3y-3 = 2x+3y-2 = 0)$ ce qui donne, en résolvant ce petit système : (x,y) est un point critique de $f \iff \left(x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } (x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3})\right)$.

b. Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que f y est de classe C^1, si f admet en (a,b) un extremum local, alors (a,b) est un point critique pour f donc ce ne peut être qu'en les points $(x_0,0)$, $(0,y_0)$ ou en $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$.

Méthode 1 : brutale et superflue dans ce cas

• En $(0,0)$: $f(x,-x)=x^5$ qui change de signe au voisinage de $x=0$ donc f n'admet en $(0,0)$ ni un maximum ni un minimum local, c'est un point selle !

• En $(1,0)$: $f(1,y)=-y^3$ qui change de signe au voisinage de $y=0$ donc f n'admet en $(1,0)$ ni un maximum ni un minimum local, c'est un point selle !

• En $(x_0,0)$ avec $x_0>1$: soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $||(x,y)-(x_0,0)||_\infty\leqslant\dfrac{x_0-1}{2}$, par inégalité triangulaire : $1-x-y=1-x_0+x_0-x-y\leqslant 1-x_0+|x_0-x|+|y|\leqslant 1-x_0+2\times\dfrac{x_0-1}{2}=0$ donc $1-x-y\leqslant 0$. De plus, $x\geqslant x_0-\dfrac{x_0-1}{2}>0$. Ainsi, $f(x,y)=x^3y^2(1-x-y)\leqslant 0$ donc f admet en $(x_0,0)$ un maximum local.

• En $(x_0,0)$ avec $x_0<0$: soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $||(x,y)-(x_0,0)||_\infty\leqslant-\dfrac{x_0}{2}$. Alors $x\leqslant x_0-\dfrac{x_0}{2}=\dfrac{x_0}{2}<0$ et $1-x-y\geqslant 1-\dfrac{x_0}{2}+\dfrac{x_0}{2}=1$ car $-y\geqslant-|y|$. Ainsi, $f(x,y)=x^3y^2(1-x-y)\leqslant 0$ donc f admet en $(x_0,0)$ un maximum local.

• En $(x_0,0)$ avec $0<x_0<1$: soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $||(x,y)-(x_0,0)||_\infty\leqslant\dfrac{1}{2}\mathrm{Min}(x_0,1-x_0)=r$. Comme avant, $x>0$ car $x\geqslant x_0-r\leqslant x_0-\dfrac{x_0}{2}>0$ et $1-x-y=1-x_0+x_0-x+y\geqslant 1-x_0-2r\geqslant 0$ car $x_0-x\geqslant-|x_0-x|\geqslant -r$ et $y\geqslant-|y|\geqslant-r$. Ainsi, $f(x,y)=x^3y^2(1-x-y)\geqslant 0$ donc f admet en $(x_0,0)$ un minimum local.

• En $(0,y_0)$ avec $y_0\neq 0$ et $y_0\neq 1$: $f(x,y_0)=x^3y_0^2(1-y_0-x)\underset{0}{\sim}x^3y_0^2(1-y_0)$ qui change de signe au voisinage de $x=0$ donc f n'admet en $(0,y_0)$ ni un maximum ni un minimum local, c'est un point selle !

• En $(0,1)$: $f(x,1)=-x^4\leqslant 0$ alors que $f(x,1-2x)=x^4(1-2x)^2\geqslant 0$ donc f change de signe au voisinage du point $(0,1)$. Ainsi, f n'admet en $(0,1)$ ni un maximum ni un minimum local, c'est un point selle !

• En $(1/2,1/3)$: on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2xy^2(3-4x-3y)-4x^2y^2$ donc $r=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac12,\dfrac13\right)=-\dfrac19$, mais aussi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=x^3(2-2x-3y)-3x^3y$ donc $t=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac12,\dfrac13\right)=-\dfrac18$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=2yx^2(3-4x-3y)-3x^2y^2$ donc $s=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\dfrac12,\dfrac13\right)=-\dfrac{1}{12}$. Ainsi, $rt-s^2=\dfrac{1}{144}>0$ avec $r<0$ donc, d'après le cours, f admet en $\left(\dfrac12,\dfrac13\right)$ un maximum local tel que $f\left(\dfrac12,\dfrac13\right)=\dfrac{1}{432}$ (après calcul).

Méthode 2 : élégante mais encore faut-il y penser !

Comme l'expression de f fait intervenir des produits, et que la grande majorité des points critiques sont des points où f est nulle (à part $\left(\dfrac12,\dfrac13\right)$), on peut s'intéresser au signe de f. D'abord, f est nulle sur les trois droites $d_1 : x=0$, $d_2 : y=0$ et $d_3 : x+y=1$ et que le signe de $f(x,y)$ est celui du produit $xy^2(1-x-y)$ donc f est positive sur les trois domaines $D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \text{ et } 1-x-y\geqslant 0\}$, $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqslant 0,\ y\leqslant 0 \text{ et } 1-x-y\geqslant 0\}$, $D_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leqslant 0 \text{ et } 1-x-y\leqslant 0\}$ et elle est négative sur les quatre autres domaines $D_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \text{ et } 1-x-y\leqslant 0\}$, $D_5=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqslant 0,\ y\leqslant 0 \text{ et } 1-x-y\leqslant 0\}$, $D_6=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leqslant 0,\ y\geqslant 0 \text{ et } 1-x-y\geqslant 0\}$ et $D_7=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leqslant 0,\ y\leqslant 0 \text{ et } 1-x-y\geqslant 0\}$.

• En $(0,0)$: il est à l'intersection de D_1,D_2,D_6 et D_7 où f change de signe donc il s'agit d'un point selle.

• En $(1,0)$: il est à l'intersection de D_1,D_2,D_4 et D_5 où f change de signe donc il s'agit d'un point selle.

• <u>En $(0,1)$</u> : il est à l'intersection de D_1, D_3, D_4 et D_6 où f change de signe donc il s'agit d'un point selle.

• <u>En $(0,y_0)$ avec $y_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 1$</u> : ce point est entre les domaines D_3 et D_4 si $y_0 > 1$, D_1 et D_6 si $0 < y_0 < 1$ ou D_2 et D_7 si $y_0 < 0$, à chaque fois f change de signe au voisinage de $(0, y_0)$ donc c'est encore un point selle.

• <u>En $(x_0,0)$ avec $x_0 > 1$ ou $x_0 < 0$</u> : ce point est entre les domaines D_4 et D_5 si $x_0 > 1$ ou entre les domaines D_6 et D_7 si $x_0 < 0$ donc f reste négative au voisinage de $(x_0, 0)$ donc f admet en ce point un maximum local.

• <u>En $(x_0,0)$ avec $0 < x_0 < 1$</u> : ce point est entre les domaines D_1 et D_2 donc f reste positive au voisinage de $(x_0, 0)$ donc f admet en ce point un minimum local.

• <u>En $(1/2, 1/3)$</u> : f est continue sur le fermé borné (compact) D_1 (c'est le triangle entre les trois droites d_1, d_2, d_3) donc y est bornée et y atteint ses bornes. Or $f\Big(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\Big) = \dfrac{1}{432}$ et f est nulle sur les bords de ce triangle. Ainsi, f admet son maximum sur D_1 en un point intérieur à D_1 et c'est donc forcément en $\Big(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\Big)$. Ainsi, f admet en $\Big(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\Big)$ un maximum local.

Comme $f(x,1) = -x^4$ et $f(x,-x) = x^5$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x, 1-2x) = +\infty$ donc f n'est ni majorée, ni minorée donc elle n'admet pas d'extremum absolu.

24.10 **a.** En posant les matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $N = M^T A M = (n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, la matrice N est bien symétrique car $(M^T A M)^T = M^T A^T M = N$ puisque $A^T = A$ par hypothèse. Comme N est symétrique, elle peut être décrite par ses coefficients au dessus de la diagonale donc on peut poser $\Phi(M) = (n_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$. En ce sens, Φ peut être considérée de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Par définition du produit matriciel, les coordonnées $n_{i,j}$ dépendent polynomialement (de degré 2) des coordonnées $m_{i,j}$. Ainsi, comme toutes les composantes $n_{i,j}$ sont de classe C^1, d'après le cours, Φ est elle-même de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{n^2}$.

b. La différentielle d'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ en un point $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, si elle existe, est l'unique application linéaire $d_a f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ telle que $f(a+h) \underset{0}{=} f(a) + d_a f(h) + o(||h||)$.

c. • Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\Phi(I_n + H) - \Phi(I_n) = (I_n + H)^T A (I_n + H) - I_n^T A I_n = A + H^T A + AH + H^T A H - A$ par linéarité de la transposée et en développant le produit. Ainsi, $\Phi(I_n + H) - \Phi(I_n) = H^T A + AH + H^T A H$. L'application $u : M \mapsto M^T A + AM$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $S_n(\mathbb{R})$, elle peut donc être vue comme une application linéaire de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ comme ci-dessus.

• Prenons le produit scalaire canonique $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \mapsto \mathrm{Tr}\,(A^T B) \in \mathbb{R}$ et la norme euclidienne associée $||A||_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^T A)}$, en notant respectivement $L_i(M)$ et $C_j(M)$ la ligne i et la colonne j de la matrice M, $||AB||_2^2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\Big)^2 = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} (L_i(A)|C_j(B))^2$. Avec CAUCHY-SCHWARZ, on a l'inégalité $(L_i(A)|C_j(B))^2 \leqslant ||L_i(A)||^2 ||C_j(B)||^2 = \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\Big) \times \Big(\sum\limits_{\ell=1}^{n} b_{\ell,j}^2\Big)$. Par conséquent, on a la majoration $||AB||_2^2 \leqslant \sum\limits_{1\leqslant i,j,k,\ell\leqslant n} a_{i,k}^2 b_{\ell,j}^2 = \Big(\sum\limits_{1\leqslant i,k\leqslant n} a_{i,k}^2\Big) \times \Big(\sum\limits_{1\leqslant j,\ell\leqslant n} b_{\ell,j}^2\Big) = ||A||_2^2\, ||B||_2^2$. Ainsi, $||AB||_2 \leqslant ||A||_2\, ||B||_2$ (c'est une norme d'algèbre). Ainsi, $||H^T A H||_2 \leqslant ||H^T||_2\, ||AH||_2 \leqslant ||A||_2\, ||H||_2^2$ car $||H^T||_2 = ||H||_2$ et on a bien $\Phi(I_n + H) - \Phi(I_n) - u(H) = H^T A H \underset{0}{=} o(||H||_2)$. D'après la définition de la différentielle, on a donc $d_{I_n}\Phi = u$ donc $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d_{I_n}\Phi(H) = H^T A + AH$.

• Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d_{I_n}\Phi(H) = 0 \iff H^T A + AH = 0 \iff H^T A^T = (AH)^T = -AH \iff AH \in A_n(\mathbb{R})$

(matrices antisymétriques) car A est symétrique. Ainsi, $\mathrm{Ker}(d_{I_n}\Phi) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AH \in A_n(\mathbb{R})\}$.

• Comme A est symétrique, pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $d_{I_n}\Phi(H) = H^T A + AH = (AH)^T + AH$ est symétrique. Réciproquement, si M est symétrique, comme A est inversible, on peut poser la matrice $H = \frac{1}{2}A^{-1}M$ et on a $d_{I_n}\Phi(H) = (AH)^T + AH = \frac{M^T}{2} + \frac{M}{2} = M$ donc $\mathrm{Im}\,(d_{I_n}\Phi) = S_n(\mathbb{R})$.

d. L'application $f : M \to AM$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car A est inversible ($f^{-1} : M \to A^{-1}M$). Comme $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, leurs images réciproques par f le sont aussi. D'après la question précédente, on a $\mathrm{Ker}(d_{I_n}\Phi) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, AH \in A_n(\mathbb{R})\} = f^{-1}(A_n(\mathbb{R}))$ et aussi $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, AM \in S_n(\mathbb{R})\} = f^{-1}(S_n(\mathbb{R}))$. Ainsi, $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM \in S_n(\mathbb{R})\}$ et $\mathrm{Ker}(d_{I_n}\Phi)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

e. La fonction $\det$ est polynomiale donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. On sait d'après le cours qu'alors $\det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Or $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ et $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ donc il existe par définition une boule ouverte $U = B(I_n, r)$ centrée en I_n et de rayon $r > 0$ telle que $U \subset GL_n(\mathbb{R})$.

24.11 **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n(t) \underset{+\infty}{=} o\big(e^{-t^2/2}\big) \underset{+\infty}{=} o\Big(\frac{1}{t^2}\Big)$ par croissances comparées donc f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par comparaison aux intégrales de RIEMANN et I_n existe.
Dans $I_{n+2} = \int_0^{+\infty} t^{n+1}(te^{-t^2})dt$, on pose $u : t \mapsto t^{n+1}$ et $v : t \mapsto -\frac{e^{-t^2}}{2}$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ avec $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées. Ainsi, $I_{n+2} = 0 + \frac{n+1}{2}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}dt = \frac{n+1}{2}I_n$.

b. Par parité de $t \mapsto e^{-t^2}$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ donc $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Classiquement, on obtient $I_{2p} = \frac{2p-1}{2}I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2} \times \frac{2p-3}{2}I_{2p-4} = \cdots = \frac{(2p-1)\times(2p-3)\times\cdots\times 1}{2^p}I_0$ qu'on transforme en $I_{2p} = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)\cdots.2.1}{(2p)(2p-2)\cdots.2 \times 2^p}I_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}p!}\sqrt{\pi}$.
Comme $I_1 = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt = \Big[-\frac{e^{-t^2}}{2}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$, de même, $I_{2p+1} = \frac{(2p)\times(2p-2)\times\cdots\times 2}{2^p}I_1 = \frac{p!}{2}$.

c. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par linéarité de l'intégrale, comme tout converge et que l'intégrale des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$ est nulle, on a $\sqrt{\pi}F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t^4 - 2(x+y)t^3 + 2xyt^2 + (x+y)^2t^2 - 2xy(x+y)t + x^2y^2)e^{-t^2}dt$ puis $\sqrt{\pi}F(x, y) = 2I_4 + 2(2xy + (x+y)^2)I_2 + 2x^2y^2I_0 = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} + (2xy + (x+y)^2)\frac{\sqrt{\pi}}{2} + x^2y^2\sqrt{\pi}$ et enfin $F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{2xy + (x+y)^2}{2} + x^2y^2$. Comme F est polynomiale, elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ car toutes ses dérivées partielles à tout ordre sont encore polynomiales.

d. Comme $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2xy^2 + 2y + x$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2yx^2 + 2x + y$, (x, y) est un point critique pour F si et seulement si $2xy^2 + 2y + x = 2yx^2 + 2x + y = 0$. Ceci équivaut, en faisant la somme et la différence de ces deux relations, à $(2xy + 3)(x + y) = (2xy + 1)(x - y) = 0$.

- $2xy + 3 = 2xy + 1 = 0$ est impossible.
- $x + y = x - y = 0$ revient à $x = y = 0$.
- $2xy + 3 = x - y = 0$ conduit à $2x^2 + 3 = 0$ ce qui est impossible car $x \in \mathbb{R}$.
- $2xy + 1 = x + y = 0$ conduit à $2x^2 = 1$ et $y = -x$ donc $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On a exactement trois points critiques pour F : $M_1 = (0, 0)$, $M_2 = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$ et $M_3 = \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$. Les dérivées partielles secondes de F sont $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = 2y^2+1$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 2x^2+1$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = 4xy+2$.

<u>Au voisinage de $M_1 = (0,0)$</u> : la hessienne de F en $(0,0)$ vaut $H = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et son polynôme caractéristique vaut $\chi_H = X^2 - 2X - 3$ qui admet deux racines de signes opposés car $\det(H) = -3$. Ainsi, $(0,0)$ est un point selle pour F. On pouvait le voir en considérant $F(x,0) = \frac{3}{4} + \frac{x^2}{2} \geqslant \frac{3}{4} = F(0,0)$ et $F(x,-x) = \frac{3}{4} - x^2 + x^4$ donc $F(x,-x) - F(0,0) \underset{0}{\sim} -x^2 < 0$ donc est localement négatif au voisinage de 0 ce qui montre que $F(x,-x) \leqslant F(0,0)$ si x est assez petit.

<u>Au voisinage de M_2</u> : la hessienne de F en M_2 vaut $H' = H_f(M_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ qui est clairement définie positive donc F admet en M_2 un minimum local.

<u>Au voisinage de M_3</u> : la hessienne de F en M_3 vaut $H' = H_f(M_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ et on a encore un minimum local pour F en M_3. On pouvait le voir en constatant que $F(-x,-y) = F(x,y)$ donc la surface d'équation $z = F(x,y)$ est invariante par la rotation d'angle π autour de la droite d'équation $x = y = 0$ (axe vertical). Comme M_3 est l'image de M_2 par cette rotation, ce qui se passe au voisinage de M_2 se passe aussi au voisinage de M_3. On a d'ailleurs $F(M_2) = F(M_3) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Mieux, comme $F(x,y) - F\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = F(x,y) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2xy+(x+y)^2}{2} + x^2y^2 = \frac{(2xy+1)^2}{4} + \frac{(x+y)^2}{2} \geqslant 0$ donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) \geqslant F(M_2) = F(M_3)$ donc F admet en M_2 et M_3 un minimum absolu.

24.12 **a.** La surface S est définie implicitement par $S\ :\ F(x,y,z) = 0$ avec $F(x,y,z) = f(x,y) - z = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - z$. La fonction f est de classe C^1 par opérations sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et, de même, F est de classe C^1 par opérations sur $(\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R}$. Comme $\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3,\ \overrightarrow{\text{grad}}\,F(x,y,z) = \Big(y - \frac{1}{x^2}, x - \frac{1}{y^2}, -1\Big) \neq (0,0,0)$, la surface S n'admet que des points réguliers donc $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)(y-b) + \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)(z-c) = 0$ est une équation du plan tangent P à S en $(a,b,c) \in S$. Ceci se simplifie en $P\ :\ \Big(b - \frac{1}{a^2}\Big)(x-a) + \Big(a - \frac{1}{b^2}\Big)(y-b) - (z-c) = 0$.

b. Comme la fonction f est de classe C^1 l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$, si elle admet en un point $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ un extremum local, c'est forcément en un point critique de f d'après le cours. Or, pour tout $x > 0$ et tout $y > 0$, $\nabla f(x,y) = \Big(y - \frac{1}{x^2}, x - \frac{1}{y^2}\Big) = (0,0) \iff (yx^2 = xy^2 = 1)$. Or si $yx^2 = xy^2 = 1$, on a $\frac{yx^2}{xy^2} = \frac{x}{y} = 1$ donc $x = y$ et $x^3 = 1$ impose $x = 1$ donc $y = 1$. Comme réciproquement, si $x = y = 1$, on a bien $\nabla f(x,y) = (0,0)$, le seul point critique de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est $(1,1)$.

Or $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = t$ et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) = 1$ donc la hessienne de f en $(1,1)$ est la matrice $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et elle est symétrique (normal avec le théorème de SCHWARZ car f est de classe C^2 par opérations sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$) et elle est définie positive car $\chi_H = X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$ donc $\text{Sp}(H) = \{1,3\} \subset \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, f admet en $(1,1)$ son unique extremum local et c'est un minimum local.

c. Soit $\big((x_n,y_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de K qui converge vers $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n y_n \leqslant 3$, $x_n \geqslant \frac{1}{3}$ et $y_n \geqslant \frac{1}{3}$ par définition de K donc, en passant à la limite dans ces inégalités larges, on a $xy \leqslant 3$, $x \geqslant \frac{1}{3}$ et $y \geqslant \frac{1}{3}$ donc $(x,y) \in K$. Ainsi, K est fermé. De plus, si $(x,y) \in K$, on a $x = \frac{xy}{y} \leqslant \frac{3}{1/3} = 9$ et $y = \frac{xy}{x} \leqslant \frac{3}{1/3} = 9$ donc K est borné.

d. Comme K est un fermé borné en dimension finie et que f est continue sur K, f admet un minimum absolu sur K par le théorème des bornes atteintes. Comme $(1,1) \in K$, $\underset{K}{\mathrm{Min}}(f) \leqslant f(1,1) = 3$. Mais f est strictement supérieure à 3 sur la frontière de K. En effet, K est un sorte de triangle avec un bord hyperbolique :

- Si $(x,y) \in K$ vérifie $xy = 3$, on a $f(x,y) = 3 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} > 3$.
- Si $(x,y) \in K$ vérifie $x = \dfrac{1}{3}$, on a $f(x,y) = xy + 3 + \dfrac{1}{y} > 3$.
- Si $(x,y) \in K$ vérifie $y = \dfrac{1}{3}$, on a $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x} + 3 > 3$.

Ainsi le minimum de f sur K est atteint à l'intérieur de K donc en un point critique or il n'en existe qu'un. Par conséquent, f atteint son minimum sur K en $(1,1)$ et $\underset{K}{\mathrm{Min}}(f) = f(1,1) = 3$.
Maintenant, pour un point $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)2$, on a deux possibilités :

- Si $(x,y) \in K$, d'après ce qui précède, $f(xx,y) \geqslant \underset{K}{\mathrm{Min}}(f) = f(1,1) = 3$.
- Si $(x,y) \notin K$, on a $f(x,y) > 3$ en distinguant selon que $xy > 3$ ou $x < \dfrac{1}{3}$ ou $y < \dfrac{1}{3}$.

Par conséquent, $\underset{(\mathbb{R}_+^*)^2}{\mathrm{Min}}(f) = \underset{K}{\mathrm{Min}}(f) = f(1,1) = 3$ et f admet un unique minimum absolu en $(1,1)$.

24.13 **a.** En définissant le cercle $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$, comme $x^2 + 2y^2 = 8 \iff \left(\dfrac{x}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 = 1$, on a $(x,y) \in \mathcal{E} \iff \left(\dfrac{x}{2\sqrt{2}}, \dfrac{y}{2}\right) \in C$ et l'application $a : \mathcal{E} \to C$ définie par $a(x,y) = \left(\dfrac{x}{2\sqrt{2}}, \dfrac{y}{2}\right)$ est donc bijective. Or, les applications $b : (x,y) \in C \mapsto z = x+iy \in \mathbb{U}$ et $c : t \in [0;2\pi[\mapsto \cos(t) + i\sin(t) \in \mathbb{U}$ (argument principal) sont des bijections classiques, de sorte que $\Phi = a^{-1} \circ b^{-1} \circ c$ est une bijection de $[0;2\pi[$ dans $\mathcal{E}$. Comme $\cos$ et $\sin$ sont de classe C^1 sur $[0;\pi[$, Φ est aussi de classe C^1 (coordonnée par coordonnée).
b. Δ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ car si $(x,y) \in \Delta$, $||(x,y)||_2^2 = x^2 + y^2 \leqslant x^2 + 2y^2 \leqslant 8$ donc $||(x,y)||_2 \leqslant 2\sqrt{2}$ et $h : (x,y) \mapsto x^2 + 2y^2$ est polynomiale donc continue (en dimension finie) et $\Delta = h^{-1}([0;8])$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue donc est lui-même un fermé. Comme f est continue par théorème généraux sur $\mathbb{R}^2$ donc a fortiori sur Δ, le théorème des bornes atteintes permet de conclure que f est bornée sur Δ et y atteint ses bornes.
c. • Clairement $\forall (x,y) \in \Delta,\ f(x,y) \geqslant \sqrt{1+0^2+0^2} + 0^2 = 1 = f(0,0)$ et $(0,0) \in \Delta$ donc $\underset{\Delta}{\mathrm{Min}}(f) = f(0,0) = 1$.
• Si le maximum de f sur Δ est atteint en un point intérieur (x,y) à Δ, on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y) = (0,0)$. Or $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + 2x = x\left(\dfrac{1+2\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ ce qui montre que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$. Mais comme f atteint en $(0,0)$ son minimum et qu'elle n'est pas constante, car par exemple, $f(0,1) = \sqrt{2} > f(0,0)$ avec $(0,1 \in \Delta$, ce n'est pas à l'intérieur de Δ que f admet son maximum sur Δ donc forcément à la frontière de Δ, c'est-à-dire sur $\mathcal{E}$ (ellipse). Pour tout $(x,y) \in \mathcal{E}$, $\exists t \in [0;2\pi[,\ (x,y) = (2\sqrt{2}\cos(t), 2\sin(t))$ et $f(x,y) = g(t) = \sqrt{1+8\cos^2(t)+4\sin^2(t)} + 8\cos^2(t)$. Il s'agit donc de déterminer le maximum de g sur $[0;2\pi[$. Or g est dérivable sur $[0;2\pi[$ et on obtient la relation $g'(t) = \dfrac{-8\sin(t)\cos(t) + 4\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{1+8\cos^2(t)+4\sin^2(t)}} - 16\sin(t)\cos(t) = -2\sin(2t)\left[\dfrac{1}{\sqrt{1+8\cos^2(t)+4\sin^2(t)}} + 4\right]$ donc g est décroissante sur $[0;\pi/2]$ et $[\pi;3\pi/2]$ et décroissante sur $[\pi/2;\pi]$ et sur $[3\pi/2;2\pi[$.
Comme $g(0) = 11 = g(\pi)$ donc g est maximale sur $[0;2\pi[$ en $t = 0$ et en π donc f est maximale sur Δ en $(x,y) = (2\sqrt{2},0)$ et $(x,y) = (-2\sqrt{2},0)$ et $\underset{\Delta}{\mathrm{Max}}(f) = 11$.

24.14 **a.** H est borné car $\forall (x,y) \in H,\ ||(x,y)||_\infty \leqslant 1$ par construction. De plus, si $\big((x_n,y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de H qui converge vers $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 \leqslant x_n \leqslant 1\ \ (1),\ 0 \leqslant y_n \leqslant 1\ \ (2)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ (passage par les coordonnées en dimension finie) donc, en passant à la limite dans les inégalités larges (1) et (2), on obtient $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$ ce qui prouve que $(x,y) \in H$. Par caractérisation séquentielle d'un fermé, on en conclut que H est fermé. Or f est continue sur H par théorèmes généraux car $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $\forall (x,y) \in H,\ y - yx^2 = y(1-x^2) \geqslant 0$. Ainsi, comme f est continue sur un fermé borné en dimension finie, d'après le théorème des bornes atteintes, f admet un minimum et un maximum sur H et ces valeurs sont atteintes.

b. La partie O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car, par exemple, si $(x,y) \in O^2$, en posant $r = \mathrm{Min}(1-x, x+1, y, 1-y) > 0$, la boule ouverte de centre (x,y) et de rayon r est incluse dans O (faire un dessin). La fonction f est de classe C^1 sur O par théorèmes généraux car $\forall (x,y) \in O,\ y(1-x^2) > 0$ donc si f admet un extremum en $(x,y) \in O$, le point (x,y) est un point critique de f. De plus, en écrivant $f(x,y) = x(1-y)\sqrt{y}\sqrt{1-x^2}$, on a la relation $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1-y)\sqrt{y}\sqrt{1-x^2} + x(1-y)\sqrt{y}\left(\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) = \dfrac{(1-2x^2)(1-y)\sqrt{y}}{\sqrt{1-x^2}}$ et, de même, on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x\sqrt{y}\sqrt{1-x^2} + x(1-y)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right)\sqrt{1-x^2} = \dfrac{x(1-3y)\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{y}}$. Pour un point (x,y) de O, on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y) = (0,0)$ si et seulement si $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $y = \dfrac{1}{3}$ d'après les expressions précédentes. Il y a donc deux points critiques de f dans O, ce sont les points $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3}\right)$ et $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3}\right)$.

Comme f est de classe C^2 sur O par théorèmes généraux, on peut considérer la hessienne de f en ces deux points. Or $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{(1-3y)\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{y}} - \dfrac{x^2(1-3y)}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{y}}$ donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3}\right) = 0$ et les deux hessiennes sont diagonales. De plus, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{x(1-2x^2)(1-y)\sqrt{y}}{(1-x^2)^{3/2}} - \dfrac{4x(1-y)\sqrt{y}}{\sqrt{1-x^2}}$ donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{8}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$. Enfin, on calcule la dernière dérivée partielle seconde $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\dfrac{x(1-3y)\sqrt{1-x^2}}{4y^{3/2}} - \dfrac{3x\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{y}}$ d'où $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. Ainsi, $H_f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3}\right)$ a des valeurs propres strictement négatives donc f admet en $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3}\right)$ un maximum local et $H_f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3}\right)$ a des valeurs propres strictement positives donc f admet en $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3}\right)$ un minimum local. Les valeurs de f en ces points sont $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ et $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

Les deux études n'étaient pas nécessaires en se rendant compte que $\forall (x,y) \in O,\ f(-x,y) = -f(x,y)$.

Le maximum de f sur H existe d'après la question **a.**. En les points (x,y) de la frontière du rectangle H, on a soit $x = -1$, soit $x = 1$, soit $y = 0$, soit $y = 1$ et, dans tous les cas, $f(x,y) = 0$. Comme f n'est pas une fonction négative sur H car par exemple $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} > 0$, le maximum de f sur H n'est pas atteint sur la frontière de H donc il est atteint à l'intérieur O de H, donc en un point critique. Puisque $\forall (x,y) \in H,\ f(-x,y) = -f(x,y)$, la recherche du maximum de f sur H nous permettra aussi de déterminer le minimum de f sur H. Comme il n'existe que deux points critiques de f dans O d'après la question précédente, et que l'on a déjà calculé $f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{3}\Big)=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ et $f\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{3}\Big)=-\frac{1}{3\sqrt{3}}$, on peut affirmer que f atteint son maximum sur H en $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{3})$ et son minimum sur H en $\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{3}\Big)$ et que $\underset{H}{\mathrm{Max}}(f)=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ et $\underset{H}{\mathrm{Min}}(f)=-\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

24.15 **a.** La fonction $h:\mathbb{R}_+^*:x\mapsto x^x=e^{x\ln(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations et $\forall x>0,\ h'(x)=(\ln(x)+1)x^x$ donc h est croissante sur $\Big]0;\frac{1}{e}\Big[$ et décroissante sur $\Big]\frac{1}{e};+\infty\Big[$ avec $h\Big(\frac{1}{e}\Big)=e^{-1/e}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=1=0^0$ car $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(x)=0$ et $\lim\limits_{t\to 0^-}e^t=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty$.

Comme $f(x,y)=e^{x\ln(x^2+y^2)}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par opérations. On a $\forall y\in\mathbb{R},\ f(0,y)=1$ donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Si $t\neq 0$, $\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\frac{e^{t\ln(t^2)}-1}{t}=\frac{e^{t\ln(t^2)}-1}{t\ln(t^2)}\times\ln(t^2)$ tend vers $-\infty$ quand t tend vers 0 car $\lim\limits_{t\to 0}t\ln(t^2)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\exp'(0)=e^0=1$ donc $\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{t\ln(t^2)}-1}{t\ln(t^2)}=1$ par composée. Ainsi, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'existe pas en $(0,0)$, la fonction f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction f est-elle continue en $(0,0)$? Par continuité de exp en 0, si $\varepsilon>0$, il existe $\alpha>0$ tel que $\forall z\in[-\alpha;\alpha],\ |e^z-1|\leqslant\varepsilon$. Comme $|x|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}$, on a $|x\ln(x^2+y^2)|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}|\ln(x^2+y^2)|$. Or $\lim\limits_{t\to 0}\sqrt{t}\ \ln(t)=0$ par croissances comparées, donc il existe $\beta>0$ tel que $\forall t\in]0;\beta],\ |\sqrt{t}\ \ln(t)|\leqslant\alpha$.

Par conséquent, dès que $||(x,y)||_2=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\beta$, on a $|\sqrt{x^2+y^2}\ \ln(x^2+y^2)|\leqslant\alpha$ et on traite deux cas :

- si $x\geqslant 0$, $|f(x,y)-f(0,0)|=f(x,y)-1=e^{x\ln(x^2+y^2)}-1\leqslant e^{\sqrt{x^2+y^2}\ \ln(x^2+y^2)}-1\leqslant\varepsilon$.
- si $x<0$, $|f(x,y)-f(0,0)|=1-f(x,y)=\frac{e^{(-x)\ln(x^2+y^2)}-1}{e^{(-x)\ln(x^2+y^2)}}\leqslant e^{(-x)\ln(x^2+y^2)}-1\leqslant e^{\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)}-1\leqslant\varepsilon$.

On a donc $||(x,y)||_2=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\beta\Longrightarrow|f(x,y)-f(0,0)|\leqslant\varepsilon$ d'où la continuité de f en $(0,0)$ donc sur $\mathbb{R}^2$.

b. On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\Big(\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2}{x^2+y^2}\Big)f(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\Big(\frac{2xy}{x^2+y^2}\Big)f(x,y)$.

Comme $f(x,y)>0$, en supposant $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(x,y)=(0,0)$, on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\Longleftrightarrow xy=0\Longleftrightarrow(x=0$ ou $y=0)$.

- Si $x=0$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\Longleftrightarrow\ln(y^2)=0\Longleftrightarrow y=\pm 1$.
- Si $y=0$, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\Longleftrightarrow\ln(x^2)+2=0\Longleftrightarrow x=\pm e^{-1}$.

Il existe donc 4 points critiques : $(0,1)$, $(0,-1)$, $(e^{-1},0)$ et $(-e^{-1},0)$.

Extrema locaux : comme $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ est un ouvert sur lequel f est de classe C^1, si f y admet un extremum local, c'est en un point critique d'après le cours. Comme on a $f(x,y)=f(x,-y)$, la surface S d'équation $z=f(x,y)$ est invariante par la réflexion de plan $y=0$. Il suffit donc d'étudier f au voisinage de $(0,1)$, $(e^{-1},0)$ et $(-e^{-1},0)$.

- Comme $f(0,1+t)=f(0,1)=1$, rien à dire dans cette direction. Mais $f(t,1)=e^{t\ln(1+t^2)}$ donc $f(t,1)<1$ si $t<0$ et $f(t,1)>1$ si $t>0$. Donc f n'admet pas en $(0,1)$ d'extremum local. En $(0,-1)$ non plus donc.
- En ce qui concerne l'étude de f au voisinage des points $(e^{-1},0)$ et $(-e^{-1},0)$, on va montrer que ce sont des extrema locaux en considérant une restriction de f à un fermé borné. Il semble logique de considérer la boule fermée unité $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$. Comme f est continue sur le fermé borné B (en dimension finie), f y est bornée et y atteint ses bornes. Sur la frontière de B, c'est-à-dire sur le disque unité $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\}$, la fonction f est constante et vaut 1. Comme les valeurs en ces deux points sont $f(e^{-1},0)=(e^{-2})^{e^{-1}}=e^{-2/e}<1$ et $f(-e^{-1},0)=(e^{-2})^{-e^{-1}}=e^{2/e}>1$, on a donc $\underset{B}{\mathrm{Max}}(f)\geqslant e^{2/e}$ et

$\underset{B}{\mathrm{Min}}(f) \leqslant e^{-2/e}$. Ainsi, la restriction de f à B n'atteint pas son minimum et son maximum sur sa frontière D mais dans son intérieur $\overset{\circ}{B} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$, c'est-à-dire sur un ouvert. On sait alors d'après le cours que ce minimum et ce maximum sont atteints en des points critiques de f, qui ne peuvent être d'après l'étude précédente que les points $(e^{-1},0)$ et $(-e^{-1},0)$. On en déduit donc que f atteint son minimum absolu sur B en $(e^{-1},0)$ et que $\underset{B}{\mathrm{Min}}(f) = f(e^{-1},0) = e^{-2/e}$ et que f atteint son maximum absolu sur B en $(-e^{-1},0)$ avec $\underset{B}{\mathrm{Max}}(f) = f(-e^{-1},0) = e^{2/e}$. Ces points sont donc des extrema locaux de f en tant que fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, f admet en $(e^{-1},0)$ un minimum local (sur B) et f admet en $(-e^{-1},0)$ un maximum local.

d. Si $x \in]0;1[$, $f(x,0) = e^{x\ln(x^2)} < 1 = f(0,0)$ donc f n'admet pas en $(0,0)$ un minimum local.

Si $x \in]-1;0[$, $f(x,0) = e^{x\ln(x^2)} > 1 = f(0,0)$ donc f n'admet pas en $(0,0)$ un maximum local.

f n'admet donc pas d'extremum local au point $(0,0)$.

<u>Extrema absolus</u> : on a $f(x,0) = (x^2)^x$ qui tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$ donc f n'admet pas de minimum absolu car f est strictement positive sur $\mathbb{R}^2$. Ce qui précède montre que $\underset{\mathbb{R}^2}{\mathrm{Inf}}\, f = 0$ alors que 0 ne peut pas être une valeur prise par la fonction f. De même $f(x,0) = (x^2)^x$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ donc f n'admet pas de maximum absolu sur $\mathbb{R}^2$ car f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^2$.

24.16 **a.** Pour tout $A \in \mathbb{R}$, par définition il existe $r \geqslant 1$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ||x|| \geqslant r \Longrightarrow \dfrac{f(x)}{||x||} \geqslant A$. Prenons $A = f(0) \in \mathbb{R}$, il existe donc $r \geqslant 1$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ||x|| \geqslant r \Longrightarrow \dfrac{f(x)}{||x||} \geqslant f(0)$. Comme f est continue (puisqu'elle y est C^1) sur la boule fermée bornée $K = B_f(0,r)$ (en dimension finie), la fonction f est bornée sur K et y atteint ses bornes donc on peux poser $m = \underset{K}{\mathrm{Min}}(f) = f(a)$ avec $a \in K$. Traitons deux cas :

- <u>Si $x \in K$</u>, par définition, on a $f(x) \geqslant m$.
- <u>Si $x \notin K$</u>, $||x|| > r$ donc $f(x) \geqslant \dfrac{f(x)}{||x||} \geqslant f(0) \geqslant m$.

Ainsi, f est minore sur $\mathbb{R}^n$ et on a $\underset{\mathbb{R}^n}{\mathrm{Min}}(f) = m$. Or f est de classe C^1 et $\mathbb{R}^n$ est un ouvert donc, comme f admet en a un minimum absolu donc local, a est un point critique pour f donc $\nabla f(a) = 0$.

b. Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, la fonction $f_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f_v(x) = f(x) - (x|v)$ est de classe C^1 car f l'est et que $g_v : x \mapsto (x|v)$ est polynomiale en les coordonnées de x donc de classe C^1 aussi, d'ailleurs elle est aussi linéaire donc continue car on est en dimension finie. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \nabla f_v(x) = \nabla f(x) - \nabla g_v(x)$ par linéarité des dérivées partielles. Or, si $v = (v_1,\cdots,v_n)$ et $x = (x_1,\cdots,x_n)$, $g_v(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k v_k$ donc $\nabla g_v(x) = (v_1,\cdots,v_n) = v$. Ainsi, $\nabla f_v(x) = \nabla f(x) - v$.

De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\forall x \in \mathbb{R}^2,\ |(x|v)| \leqslant ||x||\,||v||$ donc, par inégalité triangulaire,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ |f_v(x)| = |f(x) - (x|v)| \geqslant \big||f(x)| - |(x|v)|\big| \geqslant |f(x)| - |(x|v)| \geqslant |f(x)| - ||x||\,||v||.$$

Ainsi, dès que $x \neq 0$, $||x|| > 0$ donc $\dfrac{|f_v(x)|}{||x||} \geqslant \dfrac{|f(x)|}{||x||} - ||v||$. Or $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} \dfrac{|f(x)|}{||x||} = +\infty$ par hypothèse donc, par minoration, on a aussi $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} \dfrac{|f_v(x)|}{||x||} = +\infty$.

D'après la question précédente appliquée à f_v, il existe un point $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f_v(x) = \nabla f(x) - v = 0$ donc $\nabla f(x) = v$. Puisque ceci est valable pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, la fonction ∇f est surjective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.